МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

# Алгебра и геометрия

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине в LMS Moodle

САМАРА
2012

УДК 512, 514

Автор-составитель: **Жданов Александр Иванович**

**Алгебра и геометрия** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А.И. Жданов. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1. Курс лекций.
2. Методические пособия.
3. Расчетные работы.
4. Примеры контрольных работ.
5. Вопросы к экзамену.
6. Тесты для промежуточного контроля знаний.

УМКД «Алгебра и геометрия» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 010300.62 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 010900.62 «Прикладные математика и физика», 230100.62 «Информатика и вычислительная техника», а также для специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем» в 1 и 2 семестрах.

УМКД разработан на кафедре прикладной математики.

**Понятие матрицы. Операции над матрицами**

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность $mn$ чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из $m$ строк и $n$ столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы.

Матрицу обозначают прописными латинскими буквами, при этом саму таблицу заключают в скобки (либо круглые, либо квадратные, либо двойные вертикальные):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначают строчными латинскими буквами, снабженными двумя индексами: $a_{ij}$ – элемент матрицы, расположенный в $i$-й строке $j$-м столбце. В этих обозначениях матрица размера $m \times n$ в общем виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используются обозначения :

$A = (a_{ij})$ – матрица $A$ с элементами $a_{ij}$;

$\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$.

Матриц размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей* $n$*-го порядка.*

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее внедиагональные элементы $a_{ij},\ i \neq j$ равны нулю.

*Обозначение*: $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной.*

Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной.* Отметим, что для каждого порядка $n$ существует своя единичная матрица.

*Обозначение*: $E$ или $I$.

Матрица $O$, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если $i$-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы $i$-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами $k_i$ и $k_{i+1}$, то $k_i < k_{i+1}$.

Эти свойства означают, что все нулевые строки являются последними и что все элементы, расположенные слева и под первым ненулевым элементом каждой строки, равны нулю.

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой)ступенчатой* матрицы.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной*.

**Операции над матрицами.** Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

.

*Обозначение*: $A = B$.

***Суммой*** матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

*Обозначение*: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

**Свойства операции сложения**:

$\forall\ A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + O = O + A = A$;
4. $A + (-A) = -A + A = O$.

*Разностью* матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

*Обозначение*: $X = A - B$.

Очевидно, что для $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

*Обозначение*: $C = \alpha A$.

**Свойства операции умножения матрицы на число**:

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
4. $1 \cdot A = A$;
5. $-A = (-1)A$.

***Произведением матриц*** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

*Обозначение*: $C = AB$.

**!***Произведение $AB$ определено лишь в том случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.*

**Свойства операции умножения матриц**:
1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$,

выполненные для любых матриц $A, B, C$, для которых левые части равенств имееют смысл.

*Целой положительной степенью* $A^k$ $(k > 1)$ *квадратной матрицы* называется произведение $k$ матриц, каждая из которых равна $A$.

*Нулевой степенью квадратной матрицы* $A$ называется единичная матрица $E$ того же порядка, что и $A$, т. е. $A^0 = E$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$называется ***транспонированной*** к матрице $A$, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Переход от матрицы $A$ к $A^T$ называется *транспонированием матрицы* $A$. При транспонировании матрицы $A$ ее строки становятся столбцами $A^T$с теми же номерами, а столбцы – строками.

**Свойства операции транспонирования матриц**:
1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$;
4. $(A^T)^T = A$,

выполненные для любых матриц $A, B$, для которых левые части равенств имееют смысл.

**П р и м е р 1.** *Найти произведение матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

*<u>Решение.</u>* $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\Rightarrow$ *произведение* $AB$ *определено (число столбцов матрицы* $A$ *равно числу строк матрицы* $B$ *и равно трем) и* $AB = C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

*По формуле (3) находим*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 0\cdot 1 & 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix},$$

т.е. $c_{ij}$ – элементы матрицы $C$, которые получаются перемножением $i$-й строки матрицы $A$ на $j$-й столбец матрицы $B$.

**П р и м е р 2.** *Найти значение многочлена* $f(C)$, *если* $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $C = AB$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

*<u>Решение.</u> По формуле (3)* $C = AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $C^2 = CC = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$;

*Используя формулы (1) и (3) вычисляем*

$$f(C) = C^2 - 2C + 5E = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Определители. Основные методы вычисления определителей.**

Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, в которой

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$;

2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$

называется *перестановкой* из чисел $i = 1, 2, \dots, n$.

Говорят, что два числа $\alpha_i$ и $\alpha_j$ в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$ и порядок – в противном случае. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначается символами $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ или $N(\alpha)$.

***Определителем $n$-го порядка*** квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем, если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{N(\alpha)}$. Для обозначения определителя приняты символы $\Delta, |A|, \det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$.

Каждое произведение в сумме (4) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{N(\alpha)}$ – его *знаком.*

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя $n$-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Определение (4) для $n = 2$ и $n = 3$ приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array} \tag{6}$$

**Свойства определителя.**

**1.** Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

**2.** Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании: $|A| = |A^T|$.

*Следствие*. В определении (4) определителя можно поменять ролями строки и столбцы:

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

т.к. эта сумма равна $|A^T|$.

**3.** Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.

**4.** При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

**5.** Если каждый элемент некоторой $i$-й строки матрицы представлен в виде суммы:

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей: $\Delta = \Delta' + \Delta''$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \ldots & a'_{in} + a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**6.** При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.

**7.** Определитель матрицы, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

**8.** Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.

**9.** Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.

Определитель $k$-го порядка, составленный из элементов матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***минором*** $k$-го порядка матрицы $A$ и обозначается

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Минор порядка $n-k$, оставшийся после вычеркивания в квадратной матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ строк и столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***дополнительным минором к минору*** $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

Число

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{\sum_{p=1}^{k}(i_p+j_p)} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

называется ***алгебраическим дополнением*** к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

**П р и м е р 3.** *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Найти алгебраическое дополнение к минору* $M^{13}_{34}$.

*<u>Решение.</u> Вычеркнем из данной матрицы 1-ю и 3-ю строки, 3-й и 4-й столбцы. Минор*

$$\overline{M}^{13}_{34} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

*является дополнительным к минору* $M^{13}_{34}$. *Алгебраическим дополнением к минору* $M^{13}_{34}$ *будет*

$$(-1)^{1+3+3+4}\overline{M}^{13}_{34} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

**Теорема Лапласа**. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$. Пусть в матрице $A$ выбраны произвольные $k$ строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы $A$ равен сумме всевозможных произведений миноров $k$-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$ и строку (столбец) с номером $i$, то минорами первого порядка, расположенными в $i$-й строке (столбце), будут сами элементы $a_{ij}(a_{ji})$. Обозначив через $A_{ij}$ алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}$, получим из теоремы Лапласа, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}. \tag{7}$$

Представление определителя (7) называется ***разложением определителя по $i$-й строке (столбцу)***.

**П р и м е р 4.** *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Найти алгебраические дополнения элементов 2-го столбца.*

*Решение.*

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

**Теорема**. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей*:

$$\det AB = \det A \det B.$$

**Основные методы вычисления определителей.**

**1. Приведение к треугольному виду.** Этот метод заключается в преобразовании матрицы определителя к такому виду, когда элементы, стоящие по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю. Полученный определитель по свойству 1 равен произведению элементов главной диагонали (побочной диагонали, умноженной на $(-1)^{n(n-1)/2}$).

Для вычисления определителя таким способом используют ***метод Гаусса***, который приводит определитель $n$-го порядка матрицы $A = (a_{ij})$ к верхнему треугольному виду:

1. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки (столбцы) матрицы определителя так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

2. Умножаем 1-ю строку матрицы определителя последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{n1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots$ $n$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента $a_{11}$.

3. Повторяем процедуру п.1-2, применяя ее к измененной подматрице $(n-1)$-го порядка, у которой в верхнем левом углу стоит элемент $\tilde{a}_{22}$ и так далее.

*Замечание*. Преобразование определителя легче производить с целыми числами, поэтому диагональный элемент, если возможно, выбирают равным единице, меняя строки (столбцы) местами или вынося общий множитель строки (столбца) за знак определителя.

**П р и м е р 5.** *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 3 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

*приведением к треугольному виду.*

*Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 1-ой строки:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*В полученном определителе ко 2-ой строке прибавим 1-ю и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-2), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Прибавив к 3-й строке 2-ю, умноженную на (-2), и к 4-й строке – 2-ю, умноженную на (-1), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

*В полученном определителе к 4-ой строке прибавим 3-ю, умноженную на (-2), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}.$$

*Таким образом, данный определитель приведен к треугольному виду, и, следовательно,*

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 15 = -180.$$

**2. Метод понижения порядка** основан на использовании формул (7). Формула разложения определителя по строке (столбцу) принимает особенно простой вид, когда в этой строке (столбце) все элементы равны нулю, кроме одного.

**П р и м е р 6.** *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

*методом понижения порядка.*

<u>*Решение.*</u> *Вычтем из 3-й строки 4-ю и получим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Полученный определитель разложим по 3-й строке:*

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Прибавив к 3-му столбцу 2-ой, умноженный на 6, получим:*

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 16 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix}.$$

*Полученный определитель разложим по 2-й строке:*

$$\Delta = -3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot 25 = 75.$$

**Обратная матрица.**

Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной к матрице*** $A$, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрица $A$, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой.*

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц $A$ и $A^{-1}$ одинакового порядка.

Кваратная матрица $A$ называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из алгебраических дополнений $A_{ij}$ к элементам $a_{ij}$ матрицы $A$ называется *присоединенной* к матрице $A$.

**Теорема (критерий обратимости)**. *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}. \tag{8}$$

**Свойства обратной матрицы.**

1. $E^{-1} = E$, так как $E \cdot E = E$
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$.

**Вычисление обратной матрицы.**

Соотношение (8) дает явный вид обратной матрицы. Оно полезно в теоретических исследованиях и совершенно неэффективно для практического вычисления (разве что для матриц второго порядка) вследствие большого объема требуемых вычислений. Для получения обратной матрицы к матрице $n$-го порядка согласно (8) требуется вычислить $n^2$ определителей $(n-1)$-го порядка и один определитель $n$-го порядка. В вычислительной математике используются различные дополнительные приемы вычисления обратной матрицы, которые по объему вычислений равносильны вычислению всего лишь двух определителей $n$-го порядка. Рассмотрим один из таких методов, в основе которого лежит *метод Гаусса*:

1) формируем расширенную матрицу $(A|E)$ приписыванием к матрице $A$ справа матрицы $E$ того же порядка;

2) с помощью метода Гаусса, производя элементарные преобразования **только над строками**, приводим сформированную расширенную матрицу к виду $(E|B)$ , что всегда возможно, если $A$ не вырождена.

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующих типов:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

б) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

в) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Тогда $A^{-1} = B$.

**П р и м е р 7.** *Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

*и если существует, то найти ее.*

*<u>Решение.</u> Так как* $\det A = -6 \neq 0$, *то матрица* $A$ *невырожденная и* $A^{-1}$ *существует.*

*Способ 1. Найдем матрицу* $A$ *по формуле (8). Алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы* $A$*:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

*Следовательно,*

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Способ 2. Найдем* $A^{-1}$ *с помощью расширенной матрицы и метода Гаусса. Составим расширенную матрицу*

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

*Прибавим к 3-й строке 1-ю, получим*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

*Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки, тогда*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Прибавив ко 2-й строке 3-ю, умноженную на (-1), получим*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Умножив 2-ю строку на* $1/3$, *а 3-ю-на* $1/2$, *имеем*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Вычтем из 1-й строки 3-ю, тогда*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

*и*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4. Ранг матрицы.**

**4.1. Теоретические сведения**

**Терминология и обозначения.** *Рангом* ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю.

*Обозначение:* rg $A$, rang $A$ и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то $\mathrm{rg}A \le \min(m, n)$;

2) равенство $\mathrm{rg}A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:

   а) в матрице $A$ существует ненулевой минор $r$-го порядка,

   б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\mathrm{rg}A = r > 0$. Любой ненулевой минор $r$-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которым расположен базисный минор, – базисными строками и столбцами.

Разумеется, у матрицы может быть не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

**Метод Гаусса вычисление ранга матрицы.**

Теоретическую основу этого метода для решения данной задачи составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования не изменяют ее ранга;

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме.

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхне (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

**П р и м е р 8.** *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

*Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы на месте* $a_{11}$ *оказалась единица:*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

*Умножим 1-ю строку матрицы на -2, -5, -7 и прибавим соответственно ко 2-й, 3-й, 4-й строкам, получим*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

*Поменяем местами 3-ю и 4-ю строки и 3-й и 4-й столбцы, получим*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rgA = 3$, *так как трапециевидная матрица имеет три ненулевых строки.*

## Условие совместности линейной системы

*Системой $m$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с $n$ неизвестными* называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = & b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}$ – коэффициенты системы, $b_i$ – свободные члены, $x_j$ – неизвестные величины, $i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Система (1) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется *неоднородной.*

*Решением системы* (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система уравнений вида (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система вида (1)называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Совместная система вида (1)называется *неопределенной*, если у нее существуют по крайней мере два различных решения.

В матричной форме система (1) может быть записана в виде

$$Ax = b \qquad (2),$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Исследовать и решить систему – это значит:

- установить, совместна она или несовместна;
- если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:
  - в случае определенной системы найти единственное ее решение;
  - в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Рассмотрим однородную СЛАУ

$$Ax = 0 \tag{3}$$

Однородная СЛАУ (3) всегда совместна, ибо она всегда обладает *тривиальным* (*нулевым*) решением $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

**Теорема**. *Однородная система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $rgA < n$ .

Составим расширенную матрицу $B$ системы (2), приписав к основной матрице $A$ системы (1) столбец свободных членов: $B = [A|b]$. Матрица $B$ называется *расширенной матрицей* системы (2).

**Теорема (Кронекера – Капелли)**. *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

**Нахождение решений систем линейных уравнений общего вида**

Пусть СЛАУ (1) совместна и $rgA = rgB = r$. Будем считать, что базисный минор матрицы $A$ находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

.

Рассмотрим укороченную систему из первых $r$ уравнений системы (1), т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = & b_r. \end{cases} \tag{5}$$

**Теорема**. *Укороченная система эквивалентна исходной системе.*

Если $r = n$, то система (5) имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей.

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называются *свободными*.

Запишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Решим систему (6) относительно главных неизвестных:

$$\begin{gathered} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2} \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{7}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_r$ – некоторые однозначно определенные из (6) функции.

Соотношения (7) при произвольных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы.* В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, где $c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ – известные числа, называется *частным решением.*

Для однородной системы линейных уравнений в случае, когда она имеет бесконечное множество решений, из всей их совокупности выделяют так называемую фундаментальную систему решений.

*Фундаментальной системой решений (ФСР)* называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

ФСР существует тогда и только тогда, когда $r < n$, и может быть найдена следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ следующие $n-r$ наборов решений: $(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения главных неизвестных. Тем самым найдем $n-r$ решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)^T, \\ e_2 & = & (c_{21}, c_{22}, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T, \\ & \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e_{n-r} = & & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, 0, 0, \ldots, 1)^T. \end{array} \tag{8}$$

Совокупность решений (8) называется *нормальной фундаментальной системой решений.*

В общем случае свободным неизвестным придают $n-r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида $(c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}), \ldots, (c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,r+1} & \cdots & ca_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n-r$ линейно независимых решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n})^T, \\ & \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e_{n-r} = & & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})^T. \end{array}$$

Фундаментальная система решений $e_1, \ldots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Представление (9) решения называется *общим решением однородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений* (в отличие от общего решения (7) через свободные неизвестные).

**Связь между решениями однородной и неоднородной систем.**

Однородная система (3), полученная из системы (2) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (2).

Между решениями обеих систем существует тесная связь.

1. Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.

2. Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.

Найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (9) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$x = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $c$ – частное решение (2), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – ФСР (3). Представление (10) решения называется *общим решением неоднородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений.*

**Метод Гаусса исследования и решения систем**
**Теоретические сведения**

Для начала рассмотрим метод Гаусса приведения системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Мы не случайно выбрали это приведение. Для систем с верхней трапециевидной матрицей чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Пусть $B = [A|b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ – расширенная матрица системы (2).

Алгоритм этого метода заключается в следующем:

1. а) Элемент $a_{11}$ назовем *ведущим (главным)* элементом 1-го шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним ненулевые элементы 1-го столбца. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки матрицы $B$(столбцы матрицы $A$) так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

   б) Умножаем 1-ю строку матрицы $B$ последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots m$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента $a_{11}$.

   После выполнения 1-го шага матрица $B$ переходит в матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right).$$

   Если при этом все строки матрицы $A$, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, т.к. матрица уже приведена к верхней трапециевидной форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \neq O,$$

   то переходим ко 2-му шагу.

2. Этот шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

   описанного выше 1-го шага.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от 1-го шага ко 2-му. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большое через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат.

Итак, *исследование и решение систем линейных уравнений общего вида с использованием метода Гаусса проводится по следующей схеме:*

1. Система линейных уравнений (2) приводится к системе с верхней трапециевидной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right), \qquad (11)$$

   где $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$

   При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы $A$, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

2. Устанавливается совместность системы с верхней трапециевидной матрицей (система с матрицей (11) совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$, т.е ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.).

3. Если $r = n$, то система система станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = & b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = & b_2, \\ \qquad\quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = & b_r \end{cases},$$

   которая имеет единственное решение. Найти его несложно: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (12)$$

   Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (12) с треугольной матрицей.

**П р и м е р 3.** *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 & = & -1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 & = & 6. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 2 & 3 & 1 & | & -1 \\ 4 & 7 & -5 & | & 6 \end{array} \right)$$

*и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Прибавив ко 2-й строке 1-ю, умноженную на (-2), и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-4), получим:*

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 7 & | & -15 \\ 0 & -1 & 7 & | & -22 \end{array} \right).$$

*Из 3-й строки вычтем 2-ю:*

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 7 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & | & -7 \end{array} \right).$$

*Отсюда имеем $rgA = 2 \neq rgB = 3$ и согласно теореме Кронекера-Капелли система является несовместной.*

**П р и м е р 4.** *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + \qquad\quad x_4 + 2x_5 & = & 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 & = & -6, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = & -3. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B = \left( \begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & -2 & 3 & 0 & | & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & | & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & | & -3 \end{array} \right).$$

*и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Чтобы не производить действий с дробями, вначале вычтем из 1-й строки 2-ю:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

*Умножим 1-ю строку на 3,7,5 и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & -3 & -18 & 21 & -12 & -27 \\ 0 & -2 & -12 & 14 & -8 & -18 \end{array}\right).$$

*Умножим 2-ю строку на (-3),(-2) и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Имеем $rgA = rgB = 2$, следовательно, система является совместной. Т.к. $rgA = rgB = 2 <$ n-числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.*

*Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных умножим 2-ю строку на (-1) и сложим с 1-й строкой:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Исходная система эквивалентна следующей:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x_1 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 & = & 6, \\ -x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5 & = & -9. \end{array}\right.$$

*В качестве главных неизвестных возьмем $x_1$, $x_2$, тогда свободными будут $x_3, x_4, x_5$. Выразим базисные переменные через свободные:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -6 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5, \\ x_2 & = & 9 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5. \end{array}\right.$$

*Следовательно, общее решение можно записать в виде*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+4c_1-5c_2+2c_3 \\ 9-6c_1+7c_2-4c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

*Если положить* $c_1 = -2, \ c_2 = -3, \ c_3 = 0$, *то получим частное решение*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**П р и м е р 5.** *Найти общее решение и ФСР для системы однородных линейных уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+\ \ x_3+2x_4+5x_5 &= 0, \\ 6x_1+5x_2+3x_3+4x_4+7x_5 &= 0, \\ 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+\qquad\ \ 2x_4+8x_5 &= 0. \end{cases}$$

*Решение.* *Выпишем матрицу системы (расширенную матрицу не имеет смысла выписывать, т.к. система однородная)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

*и с помощью метод Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Умножим 1-ю строку на (-2),(-3), (-1) и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Умножим 2-ю строку на (-2),1 и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Имеем* $rgA = 2 <$ $n$*-числа неизвестных, то система имеет нетривиальное решение.*

*Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных вычтем из 1-й строки 2-ю:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Исходная система эквивалентна следующей:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 8x_5 & = & 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 - 3x_5 & = & 0. \end{cases}$$

*В качестве главных неизвестных возьмем* $x_1,\ x_3$*, тогда свободными будут* $x_2, x_4, x_5$*. Выразим базисные переменные через свободные:*

$$\begin{cases} x_1 & = & -(4x_2 + 2x_4 + 8x_5)/3, \\ x_3 & = & x_2 + 3x_5. \end{cases}$$

*Следовательно, общее решение можно записать в виде*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4c_1 + 2c_2 + 8c_3)/3 \\ c_1 \\ c_1 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

*Найдем ФСР, которая состоит из трех векторов* $e_1, e_2, e_3$*, т.к.* $n - rgA = 5 - 2 = 3$*. Придадим свободным неизвестным значения* $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$*, получим*

$$e_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Полагая* $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0$*, получим*

$$e_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*И, наконец, считая* $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,$ *имеем*

$$e_3 = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Общее решение через ФСР можно записать теперь следующим образом*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

*В качестве частного решения можно взять один из векторов ФСР. Полученное частное решение можно использовать для проверки правильности решения. Подставив в каждое из уравнений исходной системы значения частного решения, убеждаемся, что они обращаются в верные равенства.*

## Лекция 7
## ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

### § 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Различают величины скалярные и векторные. Величина, которая полностью характеризуется одним числовым значением, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения, называется скалярной величиной или скаляром. Таковы, например, масса тела, температура среды и т.п.

Величина, которая кроме числового значения характеризуется еще и н а - правлением, называется векторной величиной или вектором. К числу их относятся сила, перемещение, скорость. Вектор определяется числом и направлением.

Векторы будем обозначать $\bar{a}$ или $\boldsymbol{a}$. Геометрически вектор изображается направленным отрезком пространства (рис.1); при этом используется обозначение $\bar{a} = \overline{AB},$ где А — начальная точка отрезка, а точка В — концевая. В дальнейшем, векторы будем рассматривать как направленные отрезки.

Под модулем *(длиной)* вектора $\bar{a}$

$$|\bar{a}| = a$$

понимается его численное значение, без учета направления.

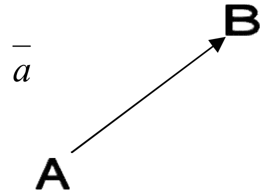


Рис.1

Вектор $\bar{0}$ , модуль которого равен нулю, называется нулевым или нуль-вектором. Направление нулевого вектора произвольно.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ считаются равными, если они расположены на параллельных или совпадающих прямых, имеют одинаковую длину и одинаково направлены. Мы условимся не различать равные векторы и, таким образом, приходим к понятию свободного вектора. Иными словами, свободный вектор допускает перенос его в любую точку пространства, при условии сохранения длины и направления. В частности, для свободных векторов всегда можно обеспечить общую начальную точку их.

### § 2. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

#### Сумма векторов

Суммой нескольких векторов, например, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ называется вектор

$$\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d},$$

по величине и направлению равный замыкающей пространственной ломаной линии, построенной на данных векторах.

Для случая двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис.2) их суммой $\bar{s}$ является диагональ параллелограмма, построенного на этихвекторах, исходящая из общей точки их приложения (правило параллелограмма).

Так как в любом треугольнике длина одной стороны не превышает суммы длин двух других сторон, то из рис. 2 имеем

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right| \le \left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|$$

т.е. модуль суммы двух векторов не превышает суммы модулей этих векторов.

Для случая трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c},$ (рис.3) их суммой $\overline{s}$ является диагональ ОМ параллелепипеда, построенного на этих векторах (правило параллелепипеда).

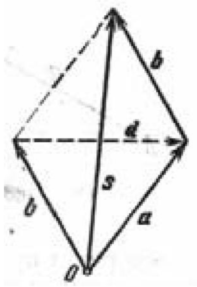



Рис.2

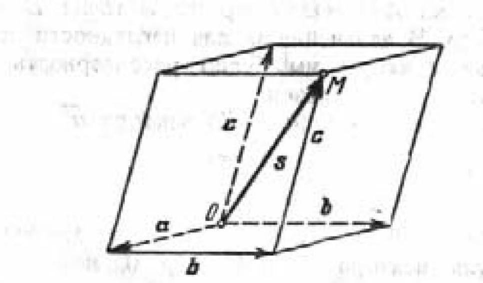



Рис.3

Легко проверить, что для векторного сложения справедливы следующие свойства:

1) переместительное свойство:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$

т. е. векторная сумма не зависит от порядка слагаемых;

2) сочетательное свойство:

$$\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},$$

т. е. сумма трех (и большего числа) векторов не зависит от порядка расстановки скобок.

Для каждого вектора

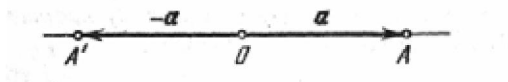



Рис.4

$\overline{a}=\overline{OA}$ (рис.4) существует противоположный вектор $-\overline{a}=\overline{OA'}$, имеющий ту же длину, но противоположное направление. По правилу параллелограмма имеем $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$, где $\overline{0}$ - нуль-вектор. Легко проверить, что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

## Разность векторов

Под разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис.5) будем понимать вектор

$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$ , такой что $\overline{b} + \overline{d} = \overline{a}$ .

Отметим, что в параллелограмме, построенном на данных векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис.2), их разностью является соответственно направленная вторая диагональ параллелограмма.

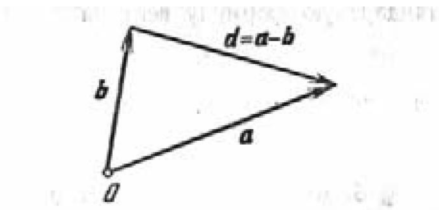



Рис.5

Легко проверить, что справедливо следующее правило вычитания:

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$$

## Умножение вектора на скаляр.

Определение. Произведением вектора $\overline{a}$ на скаляр $k$ (рис.6) называется вектор, имеющий длину $b = |k|a$ , направление, которого:

1) совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $k > 0$;
2) противоположно ему, если $k < 0$;
3) произвольно, если $k = 0$.

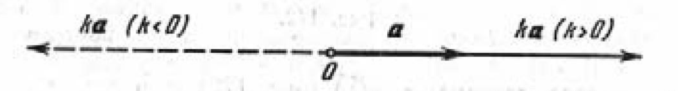



Рис.6

Нетрудно убедиться, что данная векторная операция обладает следующими свойствами:

1) $(k + l)\overline{a} = k\overline{a} + l\overline{a}$,
2) $k\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = k\overline{a} + k\overline{b}$,
3) $k\left(l\overline{a}\right) = (kl)\overline{a}$
4) $1^{*}\overline{a} = \overline{a}, (-1)\overline{a} = -\overline{a}, \quad 0^{*}\overline{a} = 0$ ,

($k, l$ - скаляры).

Пример 1. $\left(\overline{a} + 2\overline{b}\right) - \left(3\overline{a} - \overline{b}\right) = -2\overline{a} + 3\overline{b}$

Если ненулевой вектор $\overline{a}$ разделить на его длину $a = |\overline{a}|$, то мы получим единичный вектор $\overline{e}$, так называемый орт, того же направления: $\overline{e} = \overline{a} / a$
Отсюда имеем стандартную формулу вектора: $\overline{a} = a\overline{e}$.

## § 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они расположены или на параллельных прямых, или же на одной и той же прямой.

Так как направление нулевого вектора произвольно, то можно считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Справедлива Теорема 1. Два ненулевых вектор $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. $\bar{b} = k\bar{a}$, где $k$ — скаляр.

Доказательство.

1) Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ( $a \neq 0$, $в \neq 0$ ) коллинеарны и $\bar{e}, \bar{e'}$ — их орты. Имеем $\bar{a} = a\bar{e}$ и $\bar{b} = b\bar{e'}$, где $\bar{e'} = \pm\bar{e}$.

Знак плюс соответствует векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинакового направления, а знак минус — векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположного направления.

Тогда получаем, что $\bar{b} = \pm b\bar{e} = \pm b / a\left(a\bar{e}\right) = \pm(b / a)\bar{a}$

Отсюда вытекает формула $\bar{b} = k\bar{a}$ где $k = \pm b / a$.

2) Если выполнено равенство, то коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ непосредственно следует из смысла умножения вектора на скаляр.

Определение. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называются комплапарными, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Тогда можно сказать также, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему началу они лежат в одной плоскости.

По смыслу определения тройка векторов, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, компланарна.

Теорема 2. Три ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других, т. е., например $\bar{c} = k\bar{a} + l\bar{b}$.

Доказательство. 1) Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, расположены в плоскости Р (рис.7) и имеют общую точку приложения О.

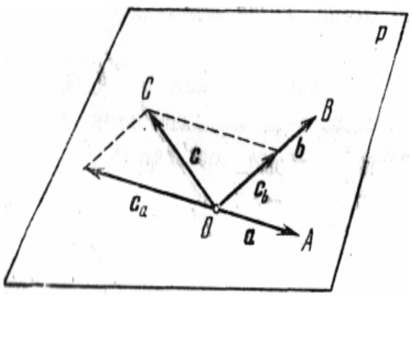



Рис.7

Предположим сначала, что эти векторы не все попарно коллинеарны, например, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. Тогда, производя разложение вектора $\bar{c}$ в сумму векторов $\bar{c_a}$ и $\bar{c_b}$ коллинеарных, соответственно, векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, будем иметь, $\bar{c} = \bar{c_a} + \bar{c_b} = k\bar{a} + l\bar{b}$ где $k$ и $l$ — соответствующие скаляры.

Если же векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ попарно коллинеарны, то можно написать

$$\bar{c} = k\bar{a} = k\bar{a} + 0\bar{b},$$

и таким образом, снова вы полнено условие теоремы.

2) Обратно, если для векторов $\bar{a} = \overline{OA}, \bar{b} = \overline{OB}$ и $\bar{c} = \overline{OC}$ (рис. 7) выполнено условие теоремы, то, на основании смысла соответствующих векторных операций, вектор $\bar{c}$ расположен в плоскости, содержащей векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. эти векторы компланарны.

Лекция *8*

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ (продолжение)

## § 1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось, т.е. направленная прямая. Направление прямой будем обозначать стрелкой. Заданное направление оси будем считать положительным, противоположное — отрицательным.

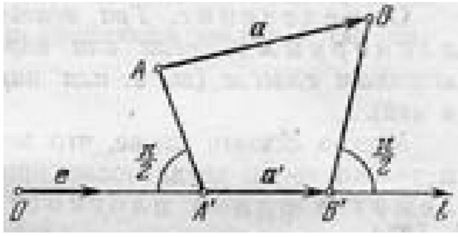


Рис. 1

Определение 1. Проекцией точки $A$ на ось $l$ (рис.1) называется основание $A'$ перпендикуляра $AA'$, опущенного из точки $A$ на эту ось.

Здесь под перпендикуляром $AA'$ понимается прямая, пересекающая ось $l$ и составляющая с ней прямой угол. Таким образом, проекция $A'$ есть пересечение плоскости, проходящей через точку $A$ и перпендикулярной оси $l$, с этой осью.

Определение *2*. Под компонентой (составляющей) вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ относительно оси $l$ (рис. 1) понимается вектор

$$\overline{a'} = \overline{A'B'},$$

начало, которого $A'$ есть проекция на ось $l$ начала $A$ вектора $\overline{a}$, а конец, которого $\overline{B'}$ есть проекция на ось $l$ конца $B$ этого вектора.

Определение 3. Под проекцией вектора, а на ось $l$ принимается скаляр

$$a_l = \pm \left| A' B' \right|,$$

равный длине его компоненты $\overline{a'}$ относительно оси $l$, взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси $l$, и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси $l$.

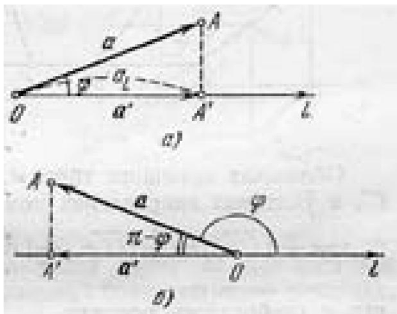


Рис. 2

Если, $\overline{a} = \overline{0}$, то полагают $a_l = 0$.

Заметим, что если $\overline{e}$ — единичный вектор оси $l$, то для компоненты $\overline{a'}$ справедливо равенство

$$\overline{a'} = a_l \overline{e}.$$

Теорема 1. Проекция вектора, а на ось $l$ равна произведению длины $a$ вектора на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т. е.

$$a_l = a \cos \varphi, \ \varphi = \angle\left(\overline{a}, l\right)$$

Доказательство. Так как вектор, $\overline{a} = \overline{OA}$ свободный, то можно предположить, что начало его $O$ лежит на оси $l$.

1) Если угол , между вектором $\overline{a}$ и осью $l$ острый ($0 \le \varphi \le \pi/2$),

то направление компоненты $\overline{a'} = \overline{OA'}$ вектора $\overline{a}$ совпадает с направлением оси $l$ (рис. 2, а). В этом случае имеем

$$a_l = np_l \overline{a} = +\left|\overline{OA'}\right| = OA\cos\varphi = a\cos\varphi,$$

2) Если же угол , между вектором $\overline{a}$ и осью $l$ тупой ($\pi/2 \le \varphi \le \pi$) (рис.2, б), то направление компоненты $\overline{a'} = \overline{OA'}$ вектора $\overline{a}$ противоположно направлению оси $l$. Тогда получаем

$$a_l = np_l \overline{a} = -\left|\overline{OA'}\right| = -OA\cos(\pi - \varphi) = +\cos\varphi$$

Таким образом, требуемая формула получена.

Следствие 1 Проекция вектора на ось:

*1)* положительна, если вектор образует с осью острый угол;
*2)* отрицательна, если этот угол— тупой,
*3)* равна рулю, если этот угол - прямой.

Следствие 2 Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Теорема 2. Проекция суммы нескольких векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.

Следствие**.** Проекция замкнутой векторной линии на любую ось равна нулю.

Теорема **3.** При умножении вектора на скаляр его проекция на данную ось умножается на этот скаляр, т. е.

$$np_l\left(k\overline{a}\right) = knp_l\overline{a}.$$

Данная формула следует из теоремы 1 и смысла умножения вектора на скаляр.

Следствие**.** Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов, т. е.

$$np_l\left(k_1\overline{a} + k_2\overline{b}\right) = k_1 np_l\overline{a} + k_2 np_l\overline{b}.$$

## §2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть (рис. 3) $Ox, Oy, Oz$ — три взаимно перпендикулярные оси в трехмерном пространстве (оси координат), исходящие из общей точки $O$ (начало координат) и образующие правую тройку (правая система координат), т. е. ориентированные по правилу правого буравчика. Иными словами, для наблюдателя, направленного по оси $Oz$, кратчайший поворот оси $Ox$ к оси $Oy$ происходит против хода часовой стрелки. Три взаимно перпендикулярные плоскости $Oyz$, $Ozx$ и $Oyx$, проходящие через соответствующее оси, называются координатными плоскостями, они делят все пространство на восемь октантов.

Для каждой точки М пространства (рис. 3) существует ее радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, начало, которого есть начало координат $O$ и конец, которого есть данная точка $M$.

<u>Определение</u>. Под декартовыми прямоугольными координатами $x, y, z$ точки $M$ понимаются проекции ее радиус-вектора $\bar{r}$ на соответствующие оси координат т. е.

$$x = r_x \qquad y = r_y \qquad z = r_z.$$

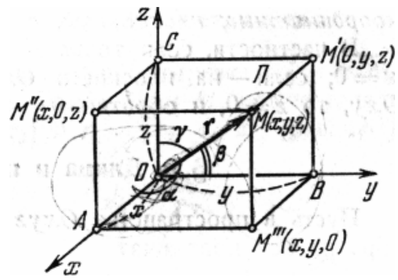



Рис. 3

В дальнейшем для краткости декартовы прямоугольные координаты мы будем называть просто прямоугольными координатами.

Точка $M$ с координатами $x, y, z$ обозначается через $M(x, y, z)$, причем первая координата называется абсциссой, вторая - ординатой, а третья - аппликатой точки $M$.

Для нахождения этих координат через точку $M$ проведем три плоскости $MA, MB, MC$, перпендикулярные соответственно осям $Ox, Oy, Oz$ (рис. 3). Тогда на этих осях получатся направленные отрезки

$$OA = x,\ OB = y,\ Oc = z,$$

численно равные координатам точки $M$.

Радиус-вектор $\bar{r}$ является диагональю параллелепипеда П с измерениями $|x|, |y|, |z|$, образованного плоскостями $MA, MB, MC$ и координатными плоскостями. Поэтому

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Если обозначить через $\alpha, \beta, \gamma (0 \le \alpha, \beta, \quad \le \pi/2)$ углы, образованные радиус-вектором $\bar{r}$ с координатными осями, то будем иметь $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$.

Косинусы $\cos a, \cos p, \cos y$ называются направляющими косинусами радиус-вектора $\bar{г}$. Тогда с учетом приведенных формул получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = x^2/r^2 + y^2/r^2 + z^2/r^2$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов радиус-вектора точки пространства равна 1.

Легко видеть, что координата точки $M$ положительна, если радиус-вектор этой точки образует острый угол с соответствующей координатной осью, и отрицательна, если этот угол тупой. В частности, в I октанте пространства, ребра которого составляют положительные полуоси координат, все координаты точек положительны. В остальных октантах пространства отрицательными координатами точек будут те, которые соответствуют отрицательно направленным ребрамоктанта.

Измерения $|x|,|y|,|z|$ параллелепипеда П равны расстояниям точки М соответственно от координатныхплоскостей $Oyz, Ozx, Oxy$. Таким образом, декартовы прямоугольные координаты точки М пространства представляют собой расстояния этой точки от координатных плоскостей, взятые с надлежащими знаками.

В частности, если точка М *(*х*,* у*, z)* лежит на плоскости *Oyz,* то $x = 0$ ; если - на плоскости *Ozx ,* то $y = 0$ ; если же - на плоскости *Oxy ,* то $z = 0$ , и обратно.

## Лекции *10* и *11*
## ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ (продолжение)

### § 1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

<u>Определение</u>. Под скалярным произведением двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е. в обычных обозначениях:

$$\bar a \cdot \bar b = \left(\bar a, \bar b\right) = ab\cos\varphi, \qquad \text{где } \varphi = \angle\left(\bar a, \bar b\right).$$

Заметим, что в приведенной формуле скалярное произв еще записывать как $\overline{ab}$, опуская точку. Так как (рис.

$b\cos\varphi =$ п$p_{\bar a}\bar b$ и $a\cos \; =$ п$p_{\bar b}\bar a$

то можно записать

$$\overline{ab} = a \cdot np_{\bar a} b = b \cdot np_{\bar b}\bar a,$$

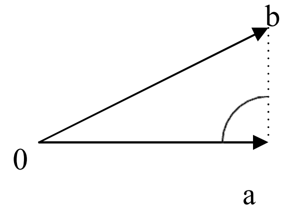



Рис. 1

т. е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого на ось с направлением первого.

Скалярное произведение обладает <u>основными свойствами:</u>

1) Скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка этих сомножителей (переместительное свойство):

$$\overline{ab} = \overline{ba}.$$

Эта формула непосредственно следует из определения скалярного произведения.

2) Для трех векторов $\bar a, \bar b$ и $\bar c$ справедливо распределительное свойство

$$\left(\bar a + \bar b\right)c = \overline{ac} + \overline{bc}$$

т. е. при скалярном умножении суммы векторов на вектор можно «раскрыть скобки».

Действительно, учитывая свойства проекций векторов, имеем

$$\left(\bar a + \bar b\right)\bar c = np_c\left(a + b\right)c = \left(np_{\bar c}\bar a + np_{\bar c}\bar b\right) = np_{\bar c}\bar a \bullet \bar c + np_{\bar c}\bar b = \overline{ac} + \overline{bc}$$

3) Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, т. е.

$$\overline{a^2} = a^2.$$

Действительно,

$$\overline{a^2} = \bar a \cdot \bar a = \overline{aa}\cos\left(\bar a, \bar a\right) = a^2.$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$$

4) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения, т.е.

$$\left(\overline{\lambda}\,\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \overline{\lambda b}\right) = \overline{\lambda}\left(a, b\right).$$

Это свойство также легко получается из определения.

5) Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор, т. е.

$$\left(\lambda\overline{a} + \mu\overline{b}, \overline{c}\right) = \lambda\left(\overline{a}, \overline{c}\right) + \mu\left(\overline{b}, \overline{c}\right), =$$ , где и — скаляры.

Это — очевидное свойств 2) и 4).

Из определения также вытекает, что косинус угла $\varphi = \angle(\mathrm{a,b})$ между двумя ненулевыми векторами а и b равен

$$\cos\varphi = ab\ /\ ab\ .$$

Из последней формулы получаем, что два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, т. е. $\varphi = \pi/2$ , тогда и только тогда, когда

$$\overline{a}\overline{b} = 0$$

Это утверждение справедливо также и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой.

## Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k} \text{ и } \quad \overline{b} = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}$$

Перемножая эти векторы как многочлены, учитывая соотношения

$$\overline{i}\,\overline{j} = \overline{j}\overline{k} = \overline{k}\overline{i} = 0$$

и

$$\overline{i}\overline{i} = \overline{j}\,\overline{j} = \overline{k}\overline{k} = 0$$

будем иметь

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат. Отсюда, обозначая через угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, получим

$$\cos\varphi = \bar{a}\bar{b} / ab = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) / (\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2})(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2})$$

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (параллельны). Согласно условию коллинеарности

$$\bar{b} = k\bar{a},$$

где k — скаляр, что эквивалентно

$$b_x = ka_x,\ b_y = ka_a,\ b_z = ka_z$$

или

$$b_x / a_x = b_y / a_y = b_z / a_z$$

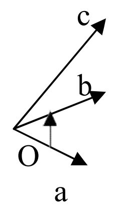
Таким образом, векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны.

Для перпендикулярных (ортогональных) векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеем $\varphi = \pi/2$ и, следовательно, $\cos\varphi = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

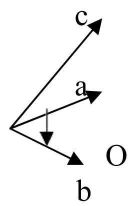
Таким образом, два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма парных произведений их одноименных координат равна нулю.

## § 2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Напомним, что тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарных векторов называется правой (рис. 1, а), или левой (рис. 1, б), если она ориентирована по правилу правого винта или соответственно по правилу левого винта.




а)




б)

Рис. 2.

Рис.1.а) Рис.1.б)

Заметим, что если в тройке некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ переставить два вектора, то она изменит свою ориентацию, т. е. из правой сделается левой или наоборот.

В дальнейшем правую тройку мы будем считать стандартной.

Определение. Под векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}],$$

для которого:

1) модуль равен, площади параллелограмма, построенного на данных векторах, т. е.

$$c = |\bar{c}| = ab \sin \varphi$$

где $\varphi = \angle(a, b)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ (рис. 2);

2) этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (иначе говоря, перпендикулярен плоскости построенного на них параллелограмма), т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) если векторы неколлинеарны, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Укажем основные свойства векторного произведения.

1) При изменений порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль, т. е.

$$\bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Действительно, при перестановке векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ площадь построенного на них параллелограмма остается неизменной, т. е. $|b \times a| = |a \times b|$. Однако тройка векторов $b, a, a \times b$ является левой.

Поэтому направление вектора $\bar{b} \times \bar{a}$ противоположно направлению вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ (a и b неколлинеарны). Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то равенство очевидно.

Таким образом, векторное произведение двух векторов не обладает переместительным свойством.

2) Векторный квадрат равен нуль-вектору, т. е.

$$\bar{a} \times \bar{a} = 0.$$

Это — очевидное следствие свойства 1).

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т. е. если — скаляр, то

$$\left(\lambda \bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\bar{a} \times \lambda \bar{b}\right) = \lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right).$$

Это свойство непосредственно вытекает из смысла произведения вектора на скаляр и определения векторного произведения.

4) Для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо равенство

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{c}\right) + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$$

т. е. векторное произведение обладает распределительным свойством.

С помощью векторного произведения удобно формулировать легко проверяемое необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$a \times b = 0 .$$

## § 3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

и

$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$$

Перемножая векторно эти равенства и используя свойства векторного произведения, получим сумму девяти слагаемых

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left[a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + \right]$$

$$\left[a_x b_y \left(\bar{i} \times \bar{j}\right) + a_y b_y \left(\bar{j} \times \bar{j}\right) + a_z b_y \left(\bar{k} \times \bar{j}\right)\right] +$$

$$\left[a_x b_z \left(\bar{i} \times \bar{k}\right) + a_y b_z \left(\bar{j} \times \bar{k}\right) + a_z b_z \left(\bar{k} + \bar{k}\right)\right]$$

Из определения векторного произведения и его свойств следует, что для ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0,\ \bar{j} \times \bar{j} = 0,\ \bar{k} \times \bar{k} = 0$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = -\left(\bar{j} \times \bar{i}\right) = k$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = -\left(\bar{k} \times \bar{j}\right) = \bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = -\left(i \times \bar{k}\right) = \bar{j}$$

Поэтому получаем

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \bar{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \bar{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right) =$$

$$\bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

## § 4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Под смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ понимается число

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right)c$$

Построим параллелепипед П (рис. 1), ребрами которого, исходящими из общей вершины О, являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, и $\bar{c}$.

Тогда $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = S$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. есть площадь основания параллелепипеда.

Высота этого параллелепипеда H, очевидно, равна H=± $np_S c$ = ± c cos ,

где $\bar{S} = \bar{a} \times \bar{b}$ и знак плюс соответствует острому углу $\varphi = \angle(c, S)$, а знак минус —тупому углу . В первом случае векторы a, b, c

ром — левую тройку.

алярного произведения имеем

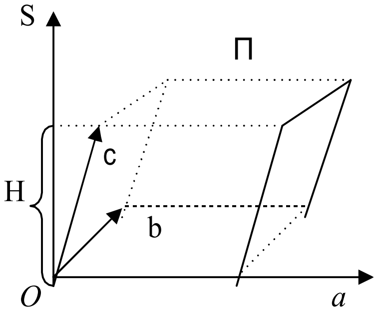



Рис.1

$(a \times b)c = Sc = S * np_S c = \pm SH = \pm V$, где $V$ —объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Отсюда

$$abc = \pm V,$$

т. е. смешанное произведение трех векторов равно объему $V$ параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

Справедливы следующие основные свойства смешанного произведения.

1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е.

$$\overline{abc} = \overline{bca} = \overline{cab}$$

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда П, ни ориентация его ребер.

2) При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на обратный, т. е.

$$\overline{bac} = \overline{acb} = \overline{cba} = -\overline{abc}.$$

Это следует из того, что перестановка соседних множителей, сохраняя объем параллелепипеда, изменяет ориентацию тройки векторов, т. е. правая тройка переходит в левую, а левая — в правую.

С помощью смешанного произведения получаем необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

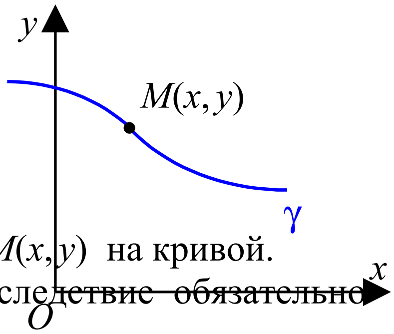
$$\overline{abc} = 0$$

## §1. *Уравнение кривой и поверхности.*

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая на плоскости, а $\varphi(x, y)$ – функция двух переменных. Говорим, что уравнение

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (1)$$

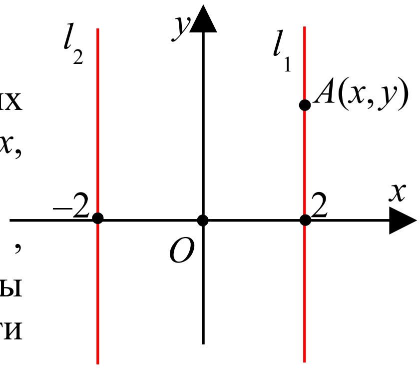
есть *уравнение кривой $\gamma$ в неявном виде*, если координаты любой точки $M\in\gamma$ удовлетворяют (1), и обратно, каждая пара $(x,y)$ чисел, удовлетворяющих (1), задает точку $M(x,y)$ на кривой.




Подчеркнем, что при составлении уравнений следствие обязательно надо проверять в обе стороны.

***Пример* 1.** Уравнение

$$x^2-4=0 \qquad (*)$$

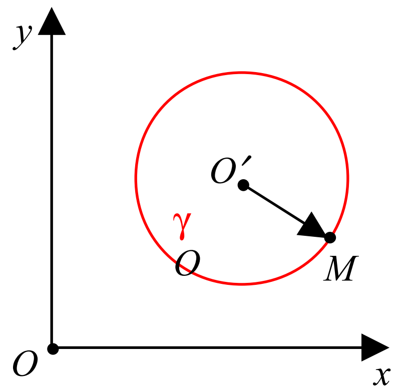



задает на плоскости пару прямых (см.чертеж). Координаты любой точки $A(x, y)\in l_1$ удовлетворяют $(*)$, но нельзя сказать, что $(*)$ есть уравнение $l_1$, поскольку есть еще точки, координаты которых удовлетворяют $(*)$, но на $l_1$ эти точки не лежат.

С другой стороны, каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$x-2=0, \qquad (**)$$

лежит на фигуре $l_1\cup l_2$, но нельзя сказать что $(**)$ задает эту фигуру, поскольку есть еще точки на $l_1\cup l_2$, координаты которых $(**)$ не удовлетворяют.




***Пример* 2.** Составим уравнение окружности $\gamma$ радиуса $R$ с центром в точке $O'(a, b)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка окружности $\gamma$. Тогда

$$R=|O'M|= \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2), то $|O'M|=R$, а значит, $M\in\gamma$. Таким образом (2) и есть уравнение нашей окружности.

Если из уравнения (1) удается выразить одну координату через другую, то получим *уравнение в явном виде*:

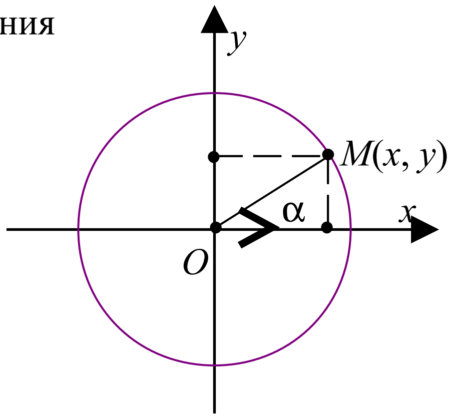
$$y = f(x), \tag{3}$$

Не всегда удается привести неявное уравнение кривой к явному виду. В каком случае это возможно гласит *теорема о неявной функции*, изучаемая в курсе математического анализа. Например, с уравнением окружности это сделать нельзя.

Предположим, что точка  движется по кривой. Тогда ее координаты изменяются со временем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{4}$$

При этом параметр $t$ изменяется в определенных пределах: $t \in I$, где $I$ – интервал числовой прямой. Говорим, что (4) есть параметрические уравнения кривой $\gamma$, если точка $M(x, y)$ лежит на кривой $\gamma$ тогда и только тогда, когда найдется такое $t \in I$, что будут выполнены оба равенства (4) одновременно. При этом, обязательно к системе (4) надо добавлять интервал изменения параметра. Физический смысл параметра в (4) не всегда время.



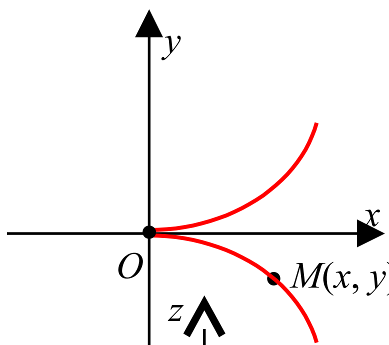

***Пример* 2.** Параметрические уравнения окружности радиуса $R$ с центром в начале координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = R\cdot\cos\alpha, \\ y = R\cdot\cos\alpha, \ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Не важно, что для одной и той же точки может найтись несколько (или даже бесконечно много) соответствующих ей значений параметра. Это не запрещается.

***Пример* 3.** Уравнения

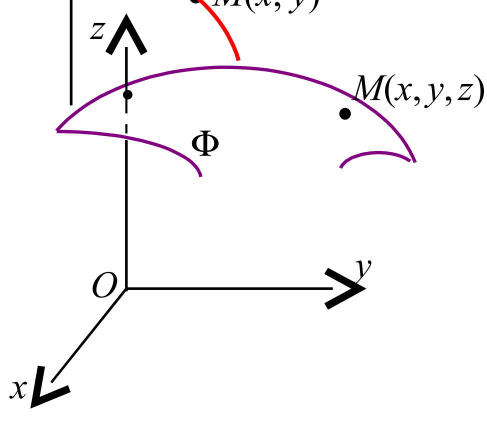
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$




задают полукубическую параболу. Уравнения

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{$*_*$}$$

тоже задают полукубическую параболу, но не всю, а только ее верхнюю половину. Для точки $M$, лежащей ниже оси, $Ox$ не найдется такого $t$, для которого выполнено ($*_**$).



***Определение.*** Пусть Φ – некоторая поверхность в пространстве, а $F(x, y, z)$ – функция от трех переменных. Говорим, что

$$F(x,y,z)=0 \qquad (6)$$

есть *уравнение поверхности Φ в неявном виде*, если координаты любой точки $M\in\Phi$ удовлетворяют (6), и обратно, каждая пара $(x, y)$ чисел, удовлетворяющих (6), задает точку $M(x,y,z)$ на поверхности.

Так же, как и для кривой, при составлении уравнения поверхности, необходимо проверять следствие в обе стороны.

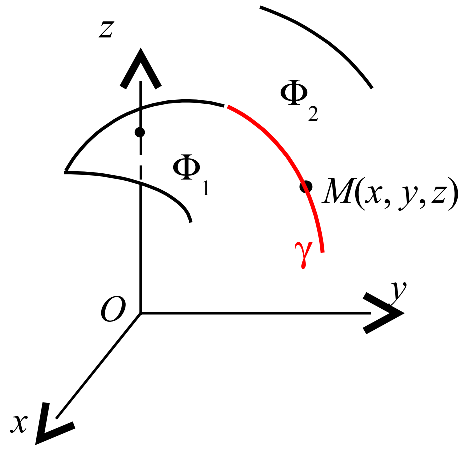
***Упражнение.*** Самостоятельно докажите, что сфера радиуса $R$ с центром в точке $O'(a,b,c)$ задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (7)$$

Если из уравнения (6) удается выразить одну переменную через две другие, то получим уравнение поверхности *в явном виде*: $z=f(x, y)$. Вопрос, когда это возможно сделать, изучается в курсе математического анализа. Уравнение сферы невозможно переписать в явном виде.

Кривая в пространстве одним уравнением, как правило, не задается. Бывают исключительные случаи, типа уравнения $x^2+y^2=0$, которое задает прямую – ось $Oz$. Кривая в пространстве обычно задается системой из двух уравнений

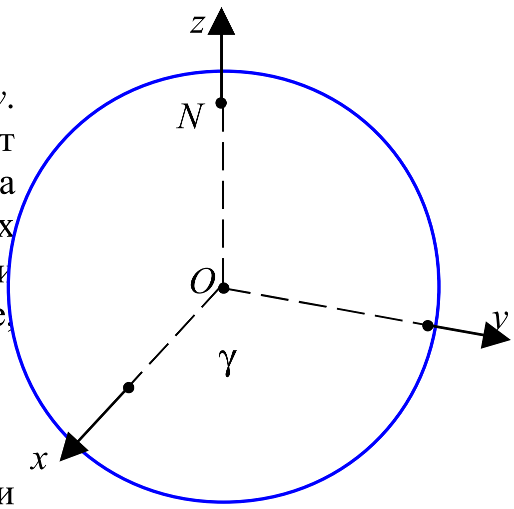
$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (8)$$




Каждое из уравнений в отдельности задает поверхность. Если координаты точки удовлетворяют системе, то она лежит на двух поверхностях одновременно, т.е. $M\in\Phi_1\cap\Phi_2$. Таким образом, система (8) задает линию пересечения двух поверхностей (хотя заметим, что не всегда это пересечение будет кривой). Аналогично, *если мы хотим найти точки пересечения любых двух множеств, заданных своими уравнениями, мы должны объединить данные уравнения в одну систему*.

***Пример* 4.** Система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2. \\ z=0. \end{cases}$$




задает окружность в плоскости $Oxy$. Первое уравнение системы задает сферу с центром в начале координат, а второе – плоскость $Oxy$. Их пересечение есть окружность γ. Если подставить $z=0$ в первое уравнение, то получим

$$x^2+y^2=R^2. \quad (*_*{*}_*\ )$$

Казалось бы, можно сказать, что это и есть уравнение окружности γ. Но это не так. Уравнение $(*_*{*}_*)$ задает цилиндрическую поверхность (см. параграф «цилиндрические и конические поверхности»). Подставляя $z=0$ в первое уравнение системы, нельзя отбрасывать при этом само уравнение $z=0$.

Также кривая в пространстве может быть задана параметрическими уравнениями вида

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\sigma(t), \ t\in I, \end{cases}$$

где $I$ – интервал числовой прямой. С параметрическими уравнениями поверхности мы встретимся в разделе «Дифференциальная геометрия».

Обозначим  – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ на кривой, т.е. вектор с координатами, составленными из неизвестных $(x, y, z)$, а  – вектор с координатами $(\varphi(t), \psi(t), \sigma(t))$. Тогда параметрические уравнения кривой можно переписать в виде одного векторного уравнения

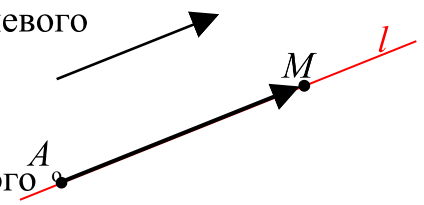
$$= \ , t\in I.$$

## §2. *Уравнение прямой на плоскости.*

Прямую $l$ на плоскости можно задать

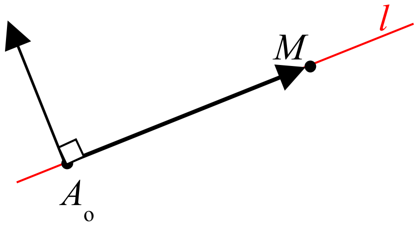
а) с помощью точки $A_o\in l$ и ненулевого вектора $\ ||\ l$; тогда можем написать, что

$$l=\{M|\ \ ||\ \ \}; \quad (*)$$




б) с помощью точки $A_o\in l$ и ненулевого вектора $\ \perp l$; тогда можем написать, что

$$l=\{M|\ \perp\}; \ (**)$$




в) с помощью двух точек $A_o, A_1\in l$.

Вектор $\,||\, l$ называется *направляющим вектором прямой*, а вектор $\perp l$ называется *вектором нормали к прямой*.

***Теорема* 1.** **1.** *Прямая $l$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая направляющий вектор $(a_1, a_2)$, задается уравнением*

$$= \, , \tag{9}$$

*которое называется* *каноническим уравнением прямой*, *или* *параметрическими уравнениями*:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t\,, \\ y = y_o + a_2 t\,,\ t \in \mathbf{R}\,, \end{cases} \tag{10}$$

*которые можно записать в векторном виде так*:

$$= + \, t,\ t \in \mathbf{R}\,, \tag{10$'$}$$

*где* $= -$ *радиус-вектор точки* $A_o$.

**2.** *Прямая, проходящая через две точки* $A_o(x_o, y_o)$ и $A_1(x_1, y_1)$, *задается уравнением*

$$= \, , \tag{11}$$

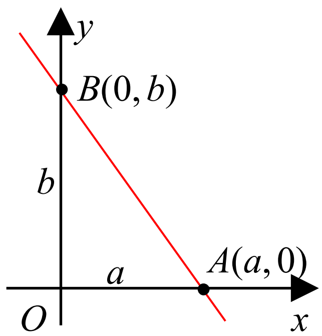
**3.** *Прямая, проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o)$, *и имеющая вектор нормали* $(A, B)$, *задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0. \tag{12}$$

**4.** *Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины* $a \neq 0$, $b \neq 0$, *задается уравнением*

$$+ = 1\,, \tag{13}$$

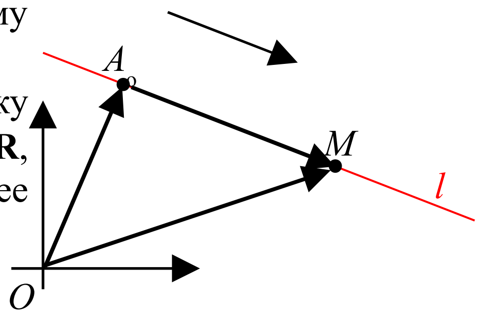
(*уравнение прямой в отрезках*).




Предполагается, что в пунктах 1, 2 и 4 СК является произвольной аффинной, а числа $a$ и $b$ в п°4 могут быть отрицательными. В уравнениях (10) и (10′) в дальнейшем писать $t \in \mathbf{R}$ не будем: это будет подразумевается.

***Доказательство.*** **1.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x - x_o,\ y - y_o) \,||\, (a_1,\ a_2)$, а по второму признаку коллинеарности векторов (теор.1′ §7, гл.1) это равносильно (9).

Обратно, если для координат точки $M(x, y)$ выполнено (9), то по тому же признаку $\,||\,$, а значит, $M \in l$.




По первому признаку коллинеарности векторов $\,||\, \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbf{R}$, такое что $= t$. В координатах последнее равенство имеет вид

$$x - x_o = t\, a_1,\ \ y - y_o = t\, a_2,$$

Для того, чтобы получить уравнение $(10)$ осталось перенести $x_o$ и $y_o$ в другую часть равенства.

**2.** Если прямая проходит через две точки $A_o(x_o, y_o)$ и $A_1(x_1, y_1)$ , то вектор $(x_1 - x_o,\ y_1 - y_o)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой. Подставляя его координаты в (9) вместо $a_1, a_2$, получим (11).

**3.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x - x_o, y - y_o) \perp (A, B) \Leftrightarrow \cdot = 0$, а в координатах это условие как раз имеет вид (12). Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (12), то $\perp$ , а значит, $M \in l$ .

**4.** Условие означает, что прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Подставляя их координаты в (10), получим

$$= \quad \Leftrightarrow \quad = \quad \Leftrightarrow (13)\ .$$

■

При ответе на экзамене недостаточно написать уравнение прямой: требуется обязательно указать, что означает каждый из параметров, входящих в уравнение. Например, выписав каноническое или параметрическое уравнение прямой, следует указать, что $(x_o, y_o)$ – это координаты точки, через которую проходит прямая, а $(a_1, a_2)$ – координаты направляющего вектора. Без данных пояснений ответ в виде выписанного уравнения расценивается, как отсутствие ответа.

***Следствие.*** *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax+By+C=0\ , \qquad (14)$$

*которое называется общим уравнением прямой. И обратно, любое уравнение вида* (14) *на плоскости задает прямую.*

***Доказательство.*** Любую прямую на плоскости можно задать с помощью точки и вектора нормали. Тогда ее уравнение в декартовой СК будет иметь вид (12). Раскроем скобки:

$$Ax+By-Ax_{o}-By_{o}=0$$

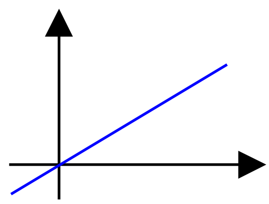
и обозначим $C=-Ax_{o}-By_{o}=\text{const}$ . Получим уравнение (14).

Обратно, пусть некоторое множество $l$ определяется уравнением (14), и $A_{o}(x_{o},\ y_{o})$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (14): $Ax_{o}+By_{o}+C=0 \ \Rightarrow\ C=-Ax_{o}-By_{o}$. Подставляя это значение в (14) получим (12), а это уравнение, как уже известно, определяет прямую. ■

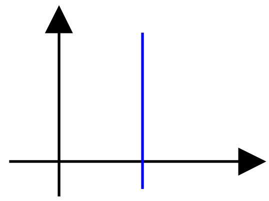
Попутно мы выяснили *геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой*: ($A$, $B$). И этот факт чрезвычайно важен при исследовании положения прямой и при решении различных задач про прямую на плоскости. Но этот факт верен только в случае декартовой СК.

Если СК на плоскости не является декартовой, то это следствие можно доказать с помощью уравнения (9). В дальнейшем, СК предполагается декартовой, если не оговорено противное.

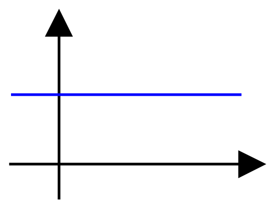
Рассмотрим различные частные случаи общего уравнения прямой.



1. $C=0 \ \Leftrightarrow\ l: Ax+By=0$. Тогда урав-нению удовлетворяют координаты точки $O(0,\ 0)$, т.е. прямая проходит через начало координат.



2. $A=0 \ \Leftrightarrow\ By+C=0 \ \Leftrightarrow\ y=-C/B$. Прямая $l\,||\,Ox$ .



3. $B=0 \ \Leftrightarrow\ Ax+C=0 \ \Leftrightarrow\ x=-C/A$. Прямая $l\,||\,Oy$ .

4. $B\neq 0$ . Тогда (14) можно переписать так: $y=-\ x-$ . Обозначим $k=-A/B$, $q=-C/B$, и получим уравнение

$$y=kx+q, \qquad (15)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. *Угловым* называется коэффициент $k$. Выясним почему.

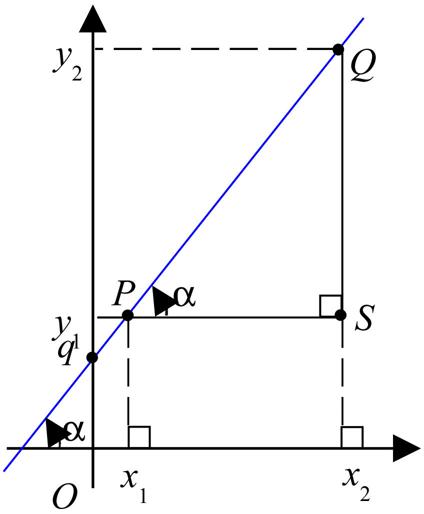
Пусть $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ – две произвольные точки на прямой $l$, где $y_2 \geq y_1$. Подставим их координаты в уравнение прямой: $y_1 = kx_1 + q$, $y_2 = kx_2 + q$ . Вычтем из второго равенства первое:

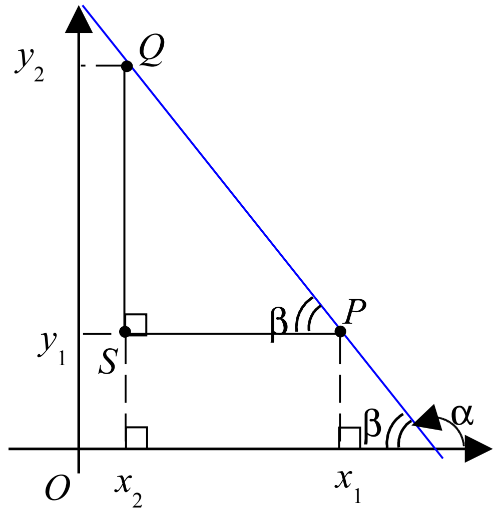
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Поскольку мы исключили случай $l || Oy$, то $x_2 \neq x_1 \Rightarrow$

$$k = \; . \quad (*_*\,*)$$

Выберем на прямой $l$ направление, соответствующее возрастанию ординаты $y$, и назовем его положительным. Пусть $\alpha$ – угол между положительным направлением оси $Ox$ и положительным направлением прямой $l$. Назовем его углом наклона прямой. Пусть $S$ – точка с координатами $(x_2, y_1)$.




1 *случай*: $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = PS$ и из $\Delta PQS$ находим, что $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

2 *случай*: $x_2 < x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = -PS \Rightarrow k = -QS/PS = = -\operatorname{tg}\beta$, где $\beta = \angle QPS$. Но $\beta = \pi - \alpha \Rightarrow -\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, как и в первом случае $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

Итак, мы доказали, что $k$ есть тангенс угла наклона прямой. Поэтому он называется *угловым коэффициентом*. А геометрический смысл коэффициента $q$ очевиден: это отрезок, отсекаемый прямой на оси $Oy$.

## §3. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие прямые – это частный случай параллельных.

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1)$ и $(A_2, B_2)$ – это векторы нормали к $l_1$ и $l_2$.

***Теорема* 2.** **1.** $l_1 || l_2$ и $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow \; = \; \neq \;$.

**2.** $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \; = \; = \;$.

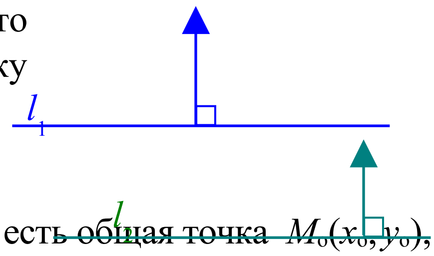
**3.** $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

**4.** *угол между* $l_1$ *и* $l_2$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \; = \; . \qquad (16)$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Очевидно, что $l_1 || l_2 \Leftrightarrow \; || \;$, а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$$= \; = \lambda . \quad (*)$$




При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o)$, т. е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2 = 0.$$

Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

В силу $(*)$ обе скобки равны нулю $\Rightarrow C_1 - \lambda C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1/C_2 = \lambda.$ $(**)$

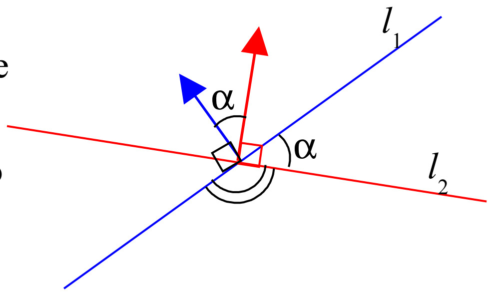
Объединяя $(*)$ и $(**)$, получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения прямых $l_1$ и $l_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, мы получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что углом между двумя прямыми называется меньший из двух углов, которые образуются при их пересечении. Таким образом, угол $\alpha$ между прямыми находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$.

Пусть $\beta = \angle( \, , \, )$. Тогда $0 \le \beta \le \pi$.

Очевидно, что $\beta$ совпадает с одним из двух углов, которые образуют прямые при пересечении.

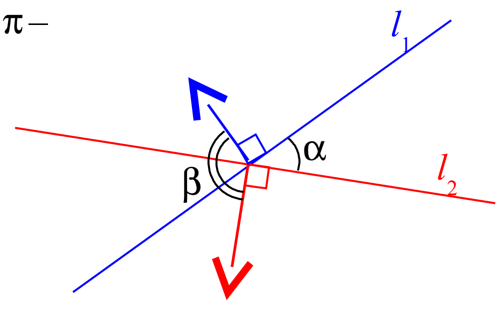



<u>*1 случай*</u>: $0 \le \beta \le \pi/2$. Тогда $\alpha = \beta \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \; .$$

<u>*2 случай*</u>: $\pi/2 < \beta \le \pi$. Тогда $\alpha = \pi - \beta$ и $\cos\beta < 0 \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta =$$
$$= |\cos\beta| = \; .$$



Эта формула подойдет и к первому случаю: неотрицательную величину модулем не испортишь. Последнее равенство в (16) – эта та же формула, только расписанная в координатах. В частности, из (16) следует, что $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \cdot = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. ■

***Упражнение* 1.** *Прямые на плоскости могут быть заданы не только общим уравнением. После изучения темы «Взаимное расположение прямой и плоскости» вы легко напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, одна из которых задана каноническим или параметрическим уравнением, а вторая – общим уравнением.*

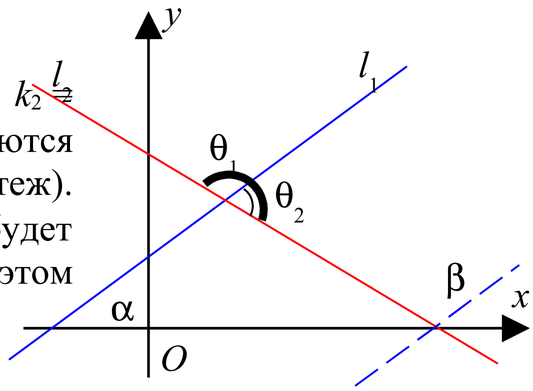
***Упражнение* 2.** *Самостоятельно напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.*

***Теорема* 2.** *Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом*

$$l_1 \colon y = k_1 x + q_1, \qquad l_2 \colon y = k_2 x + q_2.$$

*Тогда угол между ними вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tg}\theta = \quad .$$




***Доказательство.*** Пусть $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а $\theta_1$ и $\theta_2$ – углы, которые образуются при пересечении прямых (см. чертеж). Тогда $\theta_1 = \beta - \alpha$, и, если $\theta_1 \le \pi/2$, то он будет считаться углом между $l_1$ и $l_2$. В этом случае $\operatorname{tg}\theta_1 \ge 0$.
Находим:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \quad = \quad .$$

Если $\theta_1 > \pi/2$, то между прямыми считается $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \theta_1) = -\operatorname{tg}\theta_1 = |\operatorname{tg}\theta_1| = \quad .$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Заметим, что если убрать в числителе модуль, то получится формула, по которой можно вычислить ориентированный угол от $l_1$ до $l_2$, (отсчитываемый против часовой стрелки). Данный угол может находиться в пределах $-\pi \le \theta \le \pi$.

## §4. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой.*

***Определение.*** Говорим, что общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \,, \tag{14}$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (14) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на :

$$x+\ y+\ =0.$$

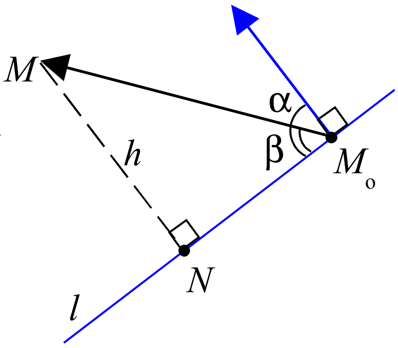
Тогда $\ ^2+\ ^2=1.$

***Теорема 3.*** *Пусть прямая* $l$ *определяется уравнением* (14) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1,\ y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h=|Ax_1+By_1+C|\ . \tag{17}$$

***Следствие.*** *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (14), *то*

$$h=\ . \qquad (17')$$




***Доказательство.*** Пусть $(A,B)$ – вектор нормали к $l$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\ |=1$. Пусть $M_o(x_o,\ y_o)$ – произвольная точка на прямой. Опустим перпендикуляр $MN$
на прямую $l$. Пусть $\alpha=\angle(\ ,\ ),\quad \beta=\angle MM_oN.$

<u>*1 случай*</u>. Точка $M$ и вектор лежат в одной полуплоскости относительно прямой $l$. Тогда

$$h=|MN|=|MM_o|\cdot\sin\beta=|\ |\cdot\sin(\ -\alpha)=$$
$$=|\ |\cdot\cos\alpha\cdot|\ |=\ \cdot$$

(мы домножили на $|\ |$, поскольку эта величина равна единице). Находим, что $(x_1-x_o, y_1-y_o)\ \Rightarrow$

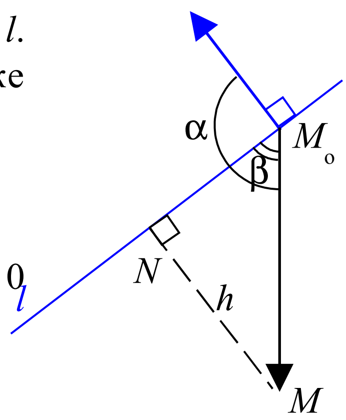
$$h=A(x_1-x_o)+B(y_1-y_o)=Ax_1+By_1+C-(Ax_o+By_o+C)$$

(мы добавили и отняли $C$). Поскольку $M_o\in l$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h=Ax_1+By_1+C.$$

<u>*2 случай*</u>. Точка $M$ и вектор лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $l$. Тогда $\beta=\alpha-\pi/2\quad\Rightarrow\quad \sin\beta=-\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h=-\ \cdot\ =-Ax_1-By_1-C.$$




Поскольку $h$ – это расстояние, то $h\geq 0$. Это значит, что во втором случае $Ax_1+By_1+C<0$ (равенство исключается, т.к. $M\notin l$). Поэтому

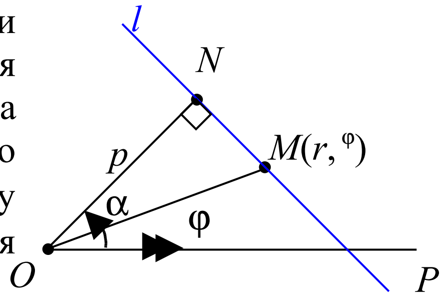
$$h=|Ax_1+By_1+C|\ .$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1+By_1+C$ зависит от того, в какой полуплоскости находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полуплоскости относительно прямой $l$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ прямую $l$ или нет).

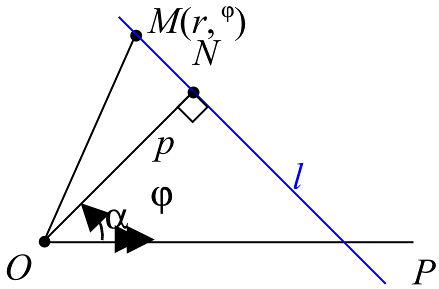
## §5. *Уравнение прямой в полярных координатах.*

Пусть на плоскости заданы прямая $l$ и полярная система координат, $OP$ – полярная ось. Опустим перпендикуляр $ON$ из полюса на прямую $l$. Обозначим $p = |ON|$ – его длина, $\alpha$ – ориентированный угол между $OP$ и $ON$. Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка прямой.




Тогда из $\Delta OMN$ находим

$p = r \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ или $p = r \cdot \cos(\varphi - \alpha)$. (18)




Поскольку косинус четная функция, то достаточно только первого уравнения.

Обратно, если координаты точки $M(r, \varphi)$ удовлетворяют (18), то $\Delta OMN$ – прямоугольный $\Rightarrow$ $M \in l$.

Итак, (18) представляет собой *уравнение прямой в полярных координатах*.

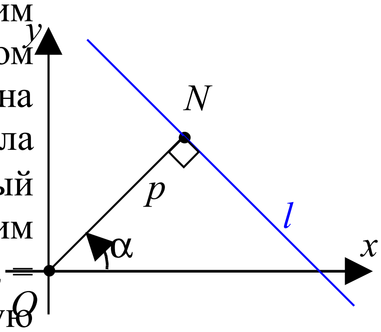
Введем теперь декартову СК так, чтобы $Ox \uparrow\uparrow OP$. Уравнение (18) можно переписать так:

$$r \cos\varphi \cos\alpha + r \sin\varphi \sin\alpha - p = 0.$$

Согласно формулам перехода $r \cdot \cos\varphi = x$, $r \cdot \sin\varphi = y$ $\Rightarrow$

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение называют *нормальным уравнением прямой*. Еще раз отметим геометрический смысл используемых в этом уравнении параметров: $p$ – это длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а $\alpha$ – ориентированный угол между осью $Ox$ и этим перпендикуляром. Поскольку $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то это уравнение имеет нормальную форму, как это было определено в предыдущем параграфе.




***Упражнение.*** *Пусть две прямые заданы своими уравнениями в полярных координатах*: $l_1$: $p_1 = r \cdot \cos(\alpha_1 - \varphi)$, $l_2$: $p_2 = r \cdot \cos(\alpha_2 - \varphi)$. *Выпишите условия параллельности и совпадения этих прямых, а также найдите угол* *между ними. Найдите, чему равно расстояние между* $l_1$ и $l_2$, *если они параллельны.*

## §6. *Пучок прямых.*

Пусть две несовпадающие прямые на плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0\ ,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0\ .$$

Рассмотрим совокупность всех прямых, которые задаются различными уравнениями вида

$$(\lambda A_1+\mu A_2)\,x+(\lambda B_1+\mu B_2)\,y+\lambda C_1+\mu C_2=0, \qquad (20)$$

где $\lambda$ и $\mu$ – числа не равные нулю одновременно. Это множество называется *пучком прямых*. Очевидно, при $\lambda=1,\ \mu=0$ мы получим уравнение прямой $l_1$, а при $\lambda=0,\ \mu=1$ – уравнение прямой $l_2$. Таким образом, прямые $l_1$ и $l_2$ тоже входят в пучок.

***Теорема 4.*** **1.** *Если прямые* $l_1$ *и* $l_2$ *пересекаются в точке* $M_o$, *то определяемый ими пучок прямых, состоит из всех прямых, проходящих через* $M_o$.

**2.** *Если* $l_1 \,||\, l_2$ , *то определяемый этими прямыми пучок состоит из всех параллельных им прямых.*

***Доказательство.*** **1.** Перепишем (20) в виде

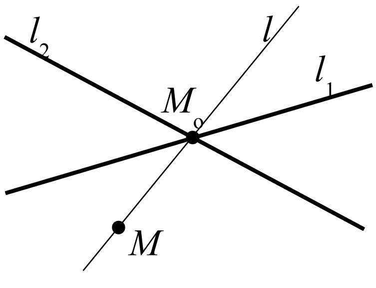
$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (20')$$

Пусть $M_o(x_o,y_o)=l_1\cap l_2$. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Подставим ее координаты в (20′):

$$\lambda(A_1x_o+B_1y_o+C_1)+\mu(A_2x_o+B_2y_o+C_2)=0.$$

Поскольку обе скобки должны быть равны нулю, то мы получаем верное равенство независимо от $\lambda$ и $\mu$. Таким образом, все прямые пучка (20) проходят через $M_o$.

Покажем, что в пучок входят все прямые, проходящие через $M_o$. Пусть $M(x_1,y_1)$ – произвольная точка плоскости, отличная от $M_o$. Подставим ее координаты в (20′) и обозначим

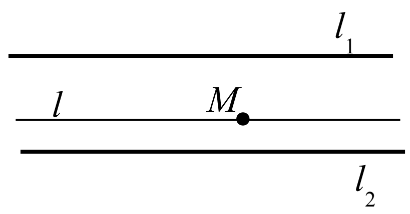



$$X=A_1x_1+B_1y_1+C_1,\quad Y=A_2x_1+B_2y_1+C_2.$$

Получим уравнение

$$\lambda X+\mu Y=0 \qquad (*)$$

относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$. Это уравнение всегда имеет решение ($\lambda_o$, $\mu_o$). При $\lambda=\lambda_o$ и $\mu=\mu_o$ уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую через $M$.




**2.** Пусть $l_1 || l_2$. Тогда выполнено

$$= = k.$$

Пусть $l$ – произвольная прямая из пучка (20). Применим к ней признак параллельности с прямой $l_2$:

$$= \quad \Leftrightarrow \quad \lambda + \mu = \lambda + \mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda k + \mu = \lambda k + \mu,$$

т.е. имеем верное равенство. Значит $l || l_2$.

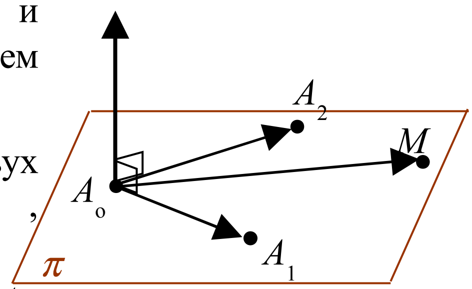
Покажем, что в пучок входят все прямые параллельные $l_1$ и $l_2$. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на $l_1$, ни на $l_2$. Подставив ее координаты в (20′) также получим уравнение (*) относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$, где $X$ и $Y$ оба ненулевые. При $\lambda$ и $\mu$, удовлетворяющих (*) уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую через $M$. ■

Если все прямые пучка пересекаются в точке $M_o$, то точка $M_o$ называется *центром пучка*, и *пучок прямых называется собственным или центральным*. Если все прямые пучка параллельны друг другу, то *пучок называется нецентральным или несобственным*.

## §7. *Уравнение плоскости в пространстве.*

Плоскость $\pi$ в пространстве можно задать

а) с помощью точки $A_o \in \pi$ и ненулевого вектора $\perp\pi$; тогда можем написать, что $\pi = \{M | \perp\}$; (*)




б) с помощью точки $A_o \in l$ и двух неколлинеарных векторов и , параллельных $\pi$;

в) с помощью трех точек $A_o$, $A_1$, $A_2 \in \pi$, не лежащих на одной прямой.

***Теорема* 4. 1.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, перпендикулярно вектору $(A, B, C)$, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \tag{21}$$

**2.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам и задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

**3.** *Плоскость* $\pi$*, проходящая через три точки* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, *не лежащие на одной прямой задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0 . \qquad (23)$$

**4.** *Плоскость* $\pi$*, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки* $a$, $b$, $c$ *задается уравнением*

$$+ + = 1 \qquad (24)$$

(*предполагается, что* $a$, $b$, $c$ *могут быть отрицательными*).

***Доказательство.*** **1.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\cdot = 0$. Поскольку $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$, то последнее равенство в координатах как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (21), то $\perp$ $\Leftrightarrow$ $M \in \pi$.

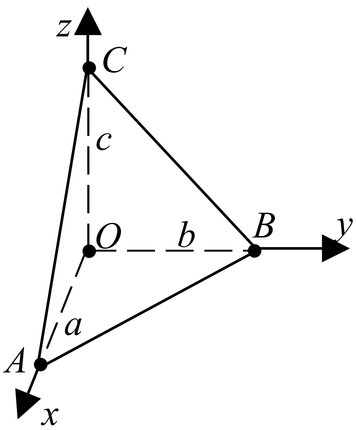
**2.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда компланарен векторам и , а это равносильно тому, что смешанное произведение этих трех векторов равно нулю: $= 0$. В координатах последнее равенство как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (22), то векторы , , компланарны, а значит $M \in \pi$.

**3.** Если плоскость проходит через три точки $A_o(x_o, y_o, z_o)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, то векторы $(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o)$ и $(x_2 - x_o, y_2 - y_o, z_2 - z_o)$ неколлинеарны друг другу и параллельны плоскости $\pi$. Подставим их координаты в (22) вместо координат векторов и , и получим (23).

**4.** Условие означает, что плоскость проходит через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Подставим их координаты в уравнение (23):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 .$$




Самостоятельно раскройте определитель и приведите получившееся уравнение к виду (24).

Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках. ■

***Следствие.*** *Любая плоскость определяется уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \qquad (25)$$

*которое называется общим уравнением плоскости. И обратно, всякое уравнение вида* (25) *определяет плоскость.*

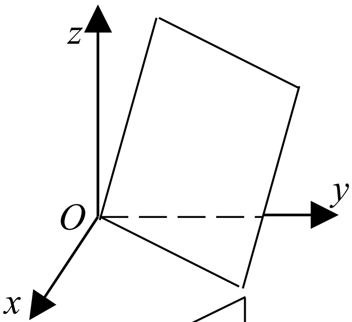
***Доказательство.*** Любая плоскость может быть задана с помощью точки и вектора нормали, а значит ее можно задать уравнением вида (21). Раскроем скобки и обозначим $D = -Ax_o - By_o - Cz_o = \text{const}$. Получим уравнение (25).

Обратно, пусть некоторое множество $\pi$ определяется уравнением (25). Пусть $A_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (25):

$$Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0.$$

Отсюда $D = -Ax_o - By_o - Cz_o$ , и подставляя это значение в (25) получим (21). А это уравнение, как уже известно, задает плоскость. ■

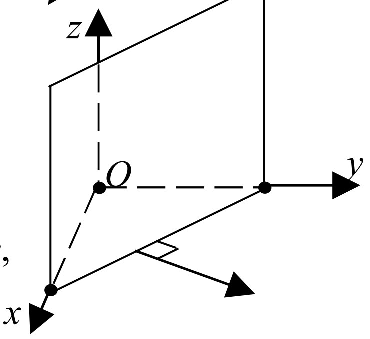
Рассмотрим различные частные случаи плоскостей, задаваемых уравнениями вида (25).




**1.** $D = 0$. Тогда уравнению

$$Ax + By + Cz = 0$$

удовлетворяют координаты точки $O(0,0,0)$. Плоскость проходит через начало координат.

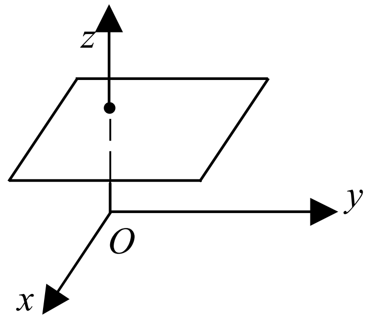



**2.** $C = 0$. Имеем уравнение

$$Ax + By + D = 0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости – $(A, B, 0)$ и $\perp Oz$, а значит, $\pi \parallel Oz$.

Аналогично, при $B = 0$ получим $\pi \parallel Oy$, а при $A = 0$ – $\pi \parallel Ox$.




**3.** $A = B = 0$. Имеем уравнение

$$Cz + D = 0,$$

которое равносильно $z = -C/D$. Тогда $\pi \perp Oz$.

Аналогично, при $A = C = 0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B = C = 0$ – $\pi \perp Ox$.

## §8. *Уравнение плоскости в нормальной форме. Расстояние от точки до плоскости.*

***Определение.*** Говорим, что *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0\ , \qquad (25)$$

*имеет нормальную форму*, если $A^2+B^2+C^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $(A, B, C)$ – единичный.

Если уравнение (25) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu =$. Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2+(B/\mu)^2+(C/\mu)^2=1$.

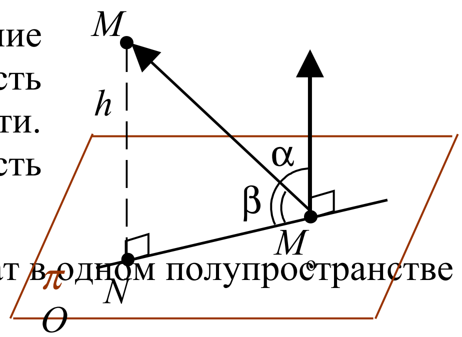
***Теорема 5.*** *Пусть плоскость $\pi$ определяется уравнением* (25) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |\,Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\,|\ . \qquad (26)$$

***Следствие.*** *Если плоскость определяется произвольным уравнением вида* (25), *то*

$$h = \ . \quad (26')$$

***Доказательство.*** Пусть $(A,\ B)$ – вектор нормали к $\pi$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\ |=1$. Пусть $M_o(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляр $MN$ на плоскость $\pi$. Пусть $\alpha = \angle(\ ,\ )$, $\beta = \angle MM_oN$.




1 *случай*. Точка $M$ и вектор лежат в одном полупространстве относительно плоскости $\pi$. Тогда

$$h = |MN| = |MM_o|\cdot\sin\beta = |\ |\cdot\sin(-\alpha) = |\ |\cdot\cos\alpha\cdot|\ | = \ \cdot$$

(мы домножили на $|\ |$, поскольку это единица). Находим, что

$$(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z - z_o)\ \Rightarrow$$

$$h = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) + C(z_1 - z_o) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_o + By_o + Cz_o + D)$$

(мы добавили и отняли $D$). Поскольку $M_o \in \pi$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

2 *случай*. Точка $M$ и вектор лежат в разных полупространствах относительно плоскости $\pi$. Тогда так же, как и в случае прямой на плоскости $\beta = \alpha - \pi/2\ \Rightarrow\ \sin\beta = -\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h = -\ \cdot\ = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D.$$

Поскольку $h$ – это расстояние, то $h \geq 0$. Это означает, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому $h = |Ax_1 + By_1 + C|$ . Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ зависит от того, в каком полупространстве находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полупространстве относительно плоскости $\pi$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ плоскость $\pi$ или нет).

***Упражнение.*** *Нарисуйте чертеж к второму пункту в доказательстве теоремы и покажите, что в этом случае* $\beta = \alpha - \pi/2$.

## §9. *Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие плоскости – это частный случай параллельных.

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ,$$
$$\pi_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ .$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1, C_1)$ и $(A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к $\pi_1$ и $\pi_2$.

***Теорема* 6.** **1.** $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $=\ =\ \neq$ .

**2.** $\pi_1 = \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $=\ =\ =$ .

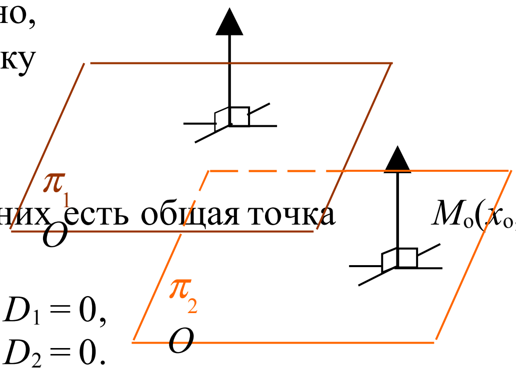
**3.** $\pi_1 \perp \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

**4.** *угол между* $\pi_1$ и $\pi_2$ *вычисляется по формуле*

$\cos\alpha =\ =\ .$ (27)

***Доказательство.*** **1, 2.** Очевидно, что $\pi_1 || \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $||$ , а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$=\ =\ = \lambda\ .$ (*)




При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$, т.е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1z_o + D_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2 = 0.$$

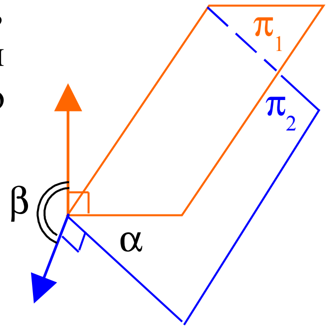
Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$ :

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + (C_1 - \lambda C_2)z_o + (D_1 - D_2) = 0.$$

В силу (*) обе скобки равны нулю $\Rightarrow$ $C_1 - \lambda C_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $C_1/C_2 = \lambda$. (**). Объединяя (*) и (**) получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что плоскости при пересечении образуют две пары вертикальных двугранных углов, и углом между двумя плоскостями называется величина меньшей пары углов. Таким образом, угол $\alpha$ между плоскостями находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\cos\alpha \ge 0$. Пусть $\beta = \angle(\,,\,)$. Тогда, очевидно, что $\beta$, либо равен $\alpha$, либо является смежным с ним (на рисунке изображен только второй случай).




В первом случае

$$\cos\alpha = \cos\beta = \;,$$

а во втором –

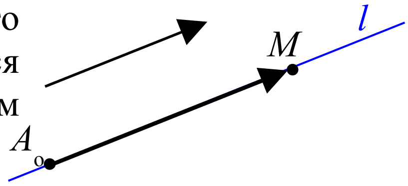
$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = |\cos\beta| = \;.$$

Последняя формула подойдет и к первому случаю. ■

## *Уравнение прямой в пространстве.*

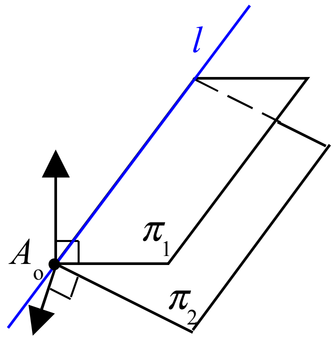
Прямую в пространстве можно задать

а) с помощью точки $A_o \in l$ и ненулевого вектора $||$ $l$, который называется <u>*направляющим вектором прямой*</u>; тогда можем написать, что




$$l=\{M| \;||\; \}; \;(*)$$

б) как пересечение двух плоскостей $l = \pi_1 \cap \pi_2$ ; в этом случае $l$ будет задаваться системой из двух уравнений (см. §1); это равносильно заданию точки $A_o \in l$ и двух векторов перпендикулярных прямой.




Задать прямую в пространстве с помощью одного вектора нормали нельзя: через данную точку перпендикулярно данному вектору проходит бесконечно много прямых.

***Теорема 6.*** **1.** *Прямая* $l$, *проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *параллельно вектору* $(a_1, a_2, a_3)$ *задается уравнением*

$$= \; = \; , \qquad (28\,)$$

(<u>*каноническое уравнение*</u>), *или* <u>*параметрическими уравнениями*</u>

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t\,, \\ y=y_o+a_2\,t\,, \\ z=z_o+a_3\,t\,, \;\; t\in \mathbf{R}\,, \end{cases} \qquad (29\,)$$

*которые можно записать в векторном виде*: $=+\;t,\; t\in \mathbf{R}$ , *где* $=$ – *радиус-вектор точки* $A_o$.

**2.** *Прямая, проходящая через две точки* $A_o(x_o, y_o, z_o)$ *и* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, *задается уравнением*

$$= \; = \; , \qquad (30\,)$$

**3.** *Прямая, проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *перпендикулярно двум векторам нормали* $(A_1, B_1, C_1)$ *и* $(A_2, B_2, C_2)$ *задается в декартовой СК системой уравнений*

$$\begin{cases} A_1(x-x_o)+B_1(y-y_o)+C_1(z-z_o)=0, \\ A_2(x-x_o)+B_2(y-y_o)+C_2(z-z_o)=0. \end{cases} \qquad (31)$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Доказательство этих пунктов дословно повторяет доказательство пунктов 1 и 2 из теоремы 1, с той лишь разницей, что у всех точек и векторов добавляется еще третья координата.

**3.** Первое из уравнений системы (31) задает плоскость $\pi_1$, проходящую через точку $A_o$, перпендикулярно вектору , а второе уравнение – плоскость $\pi_2$, проходящую через точку $A_o$ , перпендикулярно вектору . Пересечение этих плоскостей и задает нашу прямую.

■

## §11. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.*

Пусть плоскость $\pi$ задана общим уравнением, а прямая $l$ – каноническим уравнением:

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0\ , \qquad l:\ = \ = \ .$$

Тогда сразу можем отметить, что $(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости $\pi$, $(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой $l$ и точка $A_o(x_o, y_o, z_o)\in l$.

Для удобства изложения, в этом параграфе будем считать, что $l\in\pi$ – это частный случай $l\,||\,\pi$.

***Теорема* 7.** **1.** $l\in\pi \iff \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, & (32.1) \\ Ax_o+By_o+Cz_o+D=0, & (32.2) \end{cases}$

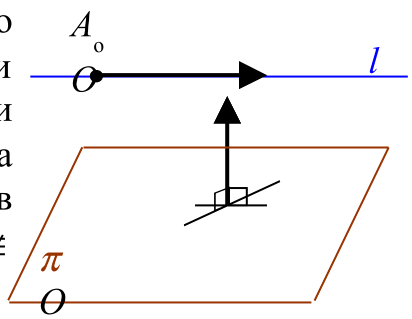
**2.** $l\,||\,\pi$ *и* $l\notin\pi \iff \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, & (32.1) \\ Ax_o+By_o+Cz_o+D\neq 0, & (32.3) \end{cases}$

**3.** $l\perp\pi \iff \ = \ = \ .$ (33)

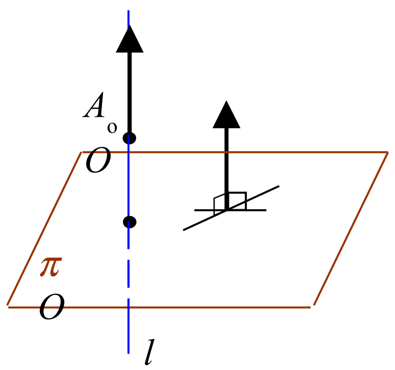
**4.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

$$\sin\alpha = \ = \ . \qquad (34)$$

***Доказательство.*** **1,2.** Очевидно, что $l\,||\,\pi \iff \ \perp \ \iff \ \cdot \ = 0$, а именно это и означает равенство (32.1). При этом, если выполнено (32.2), то $A_o(x_o, y_o, z_o)\in\pi$, а значит, и вся прямая будет лежать в плоскости. Если выполнено (32.3) , то $A_o\notin\pi$, а значит, и $l\notin\pi$.

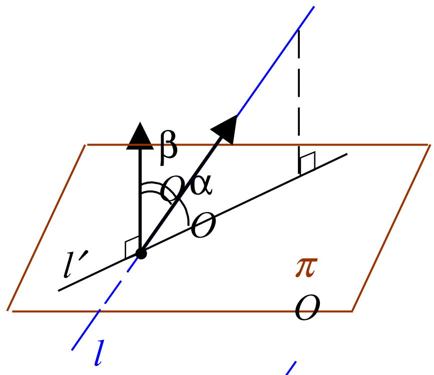



**3.** Очевидно, что $l\perp\pi \iff \ ||\ $, а (33) как раз представляет собой условие коллинеарности этих векторов.




**4.** Напомним, что углом меж-ду прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Поэтому, если $\alpha$ – угол между $l$ и $\pi$, то $0\le\alpha\le\pi/2$, и $\sin\alpha\ge 0$.

Обозначим $\beta = \angle(\ ,\ \ )$. Тогда возможны два случая: $\alpha = \pi/2 - \beta$ или $\alpha = \beta - \pi/2$. Оба случая изображены на рисунках.

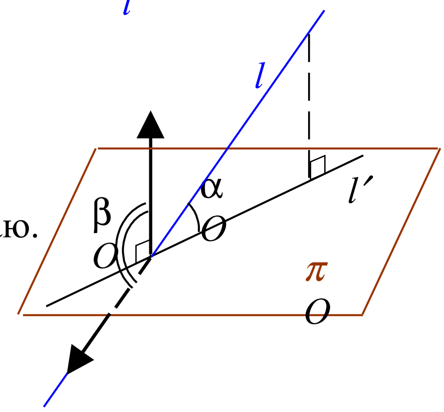



В первом случае имеем

$$\sin\alpha = \cos\beta = \ ,$$

а во втором случае –

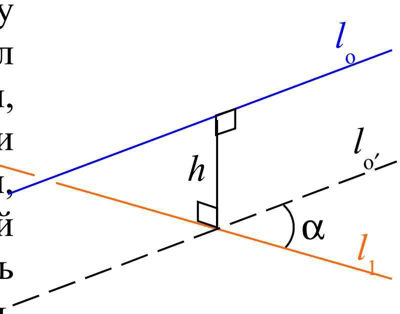
$$\sin\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = \ .$$




Эта формула подойдет и к первому случаю.

■

## *Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между прямыми.*




Напомним, что углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку. Другими словами, если прямые $l_o$ и $l_1$ скрещиваются, то мы должны совершить параллельный перенос прямой $l_o$, так чтобы получилась прямая $l_o'$, пересекающаяся с $l_1$, и измерять угол между $l_o'$ и $l_1$.

Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр. Его длина называется расстоянием между прямыми.

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$l_o$: = = ,  $l_1$: = = .  (35)

Тогда сразу можем сделать вывод, что $(a_1, a_2, a_3) \,||\, l_o$, $(b_1, b_2, b_3) \,||\, l_1$, $A_o(x_o, y_o, z_o) \in l_o$, $A_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$. Составим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

и пусть $\Delta = \det \mathbf{A}$.

***Теорема* 8.** **1.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

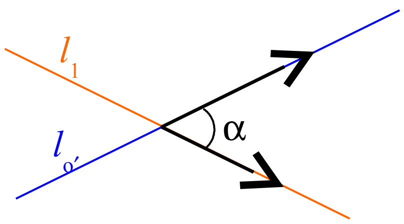
$\cos\alpha =  = $ .  (36)

**2.** *Прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\Delta \neq 0$.

**3.** *Прямые* $l_o$ и $l_1$ *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ и  *не коллинеарен* .

**4.** $l_o \,||\, l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$ и  $||$ .

**5.** $l_o = l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 1$.

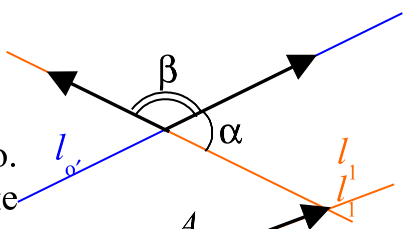



***Доказательство.*** **1.** Угол $\alpha$ между прямыми $l_o$ и $l_1$ может быть равен углу $\beta$ между их направляющими векторами , , а может быть смежным с ним. В первом случае

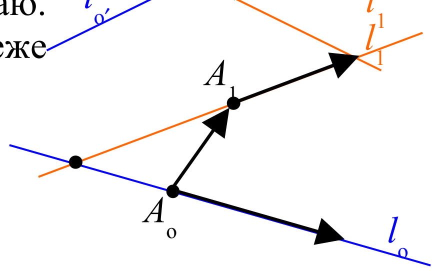
$\cos\alpha = \cos\beta = $ ,

а во втором случае

$\cos\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = $ .

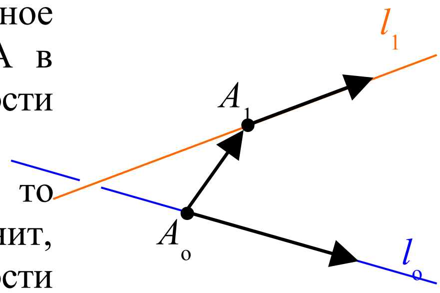



Эта формула подойдет и к первому случаю. Обратите внимание, что на чертеже



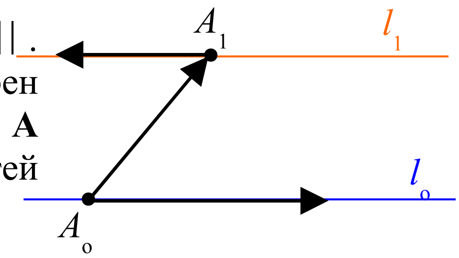
изображена не прямая $l_o$, а параллельная ей прямая $l_o'$ .

**2, 3.** Очевидно, что прямые $l_o$ и $l_1$ не параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы и не коллинеарны. При этом, прямые лежат в одной плоскости и пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы , , компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю: = 0. А в координатах это произведение точности равно $\Delta$ .

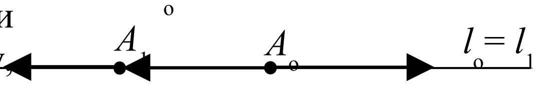



Соответственно, если $\Delta \neq 0$, то векторы , , не компланарны, а значит, прямые $l_o$ и $l_1$ не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они скрещиваются.

**4, 5.** Если $l_o || l_1$ или $l_o = l_1$, то || . Но в первом случае вектор неколлинеарен и , и поэтому первая строка в матрице **A** непропорциональна второй и третьей строкам. Значит, rank **A** = 2.




Во втором случае все три вектора , , коллинеарны друг другу, и поэтому, все строки в матрице **A** пропорциональны. Значит, rank **A** = 1.




И обратно, если || , то прямые $l_o$ и $l_1$ параллельны или совпадают; при этом, вторая и третья строки матрицы **A** пропорциональны. Если, при этом, rank **A** = 2, то первая строка матрицы непропорциональна второй и третьей, а значит, вектор неколлинеарен и $\Leftrightarrow$ $l_o || l_1$. Если же rank **A** = 1, то все строки в матрице **A** пропорциональны, а значит, все три вектора , , коллинеарны друг другу $\Leftrightarrow$ $l_o = l_1$.

■

***Теорема 9.*** *Пусть две прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *в пространстве заданы своими каноническими уравнениями* (35). *Тогда*

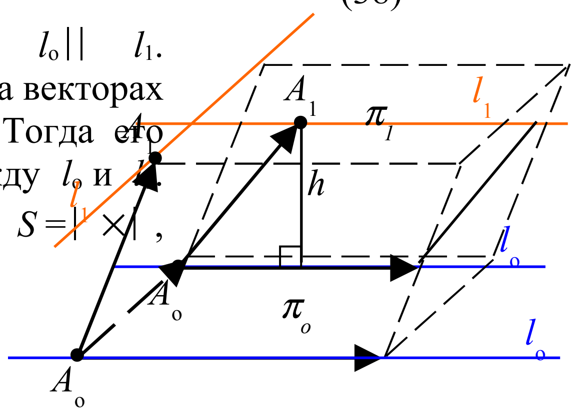
**1.** *если* $l_o || l_1$ , *то расстояние между* $l_o$ *и* $l_1$ *находится по формуле*

$$h = \quad , \qquad (37)$$

**2.** *если* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются, то расстояние между ними находится по формуле*

$$h = \quad . \qquad (38)$$

***Доказательство.*** **1.** Пусть $l_o || l_1$. Отложим вектор от точки $A_o$, и на векторах и построим параллелограмм. Тогда его высота $h$ будет расстоянием между $l_o$ и $l_1$. Площадь этого параллелограмма: $S = | \times |$ ,



а основание равно $|\quad|$. Поэтому

$$h = S/|\quad| = \quad (37).$$

**2.** Пусть $l_о$ и $l_1$ скрещиваются. Проведем через прямую $l_о$ плоскость $\pi_о \,||\, l_1$, а через прямую $l_1$ проведем плоскость $\pi_1 \,||\, l_о$.

Тогда общий перпендикуляр к $l_о$ и $l_1$ будет общим перпендикуляром к $\pi_о$ и $\pi_1$. Отложим векторы и из точки $A_о$ и на векторах , и построим параллелепипед. Тогда его нижнее основание лежит в плоскости $\pi_о$, а верхнее – в плоскости $\pi_1$. Поэтому высота параллелепипеда будет общим перпендикуляром к $\pi_о$ и $\pi_1$, а ее величина $h$ будет расстоянием между $l_о$ и $l_1$. Объем параллелепипеда равен $|\quad|$, а площадь основания – $|\times|$ $\Rightarrow$

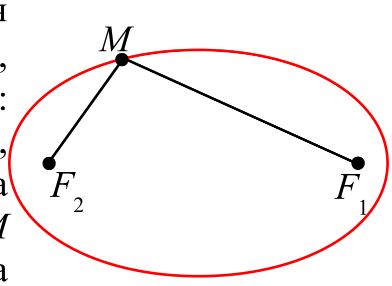
$$h = V/S_{осн} = \quad (38). \quad \blacksquare$$

***Следствие.*** *Расстояние от точки* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой* $l$, *заданной уравнением*

$$l: \quad = \quad =$$

*вычисляется по формуле* (37).

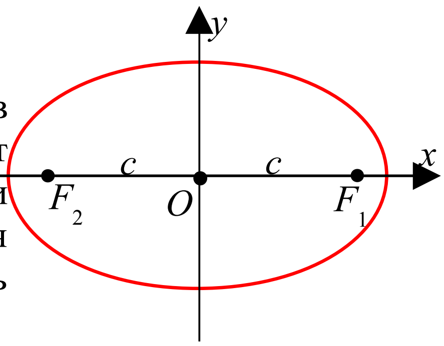
# §1. Эллипс.




***Определение.*** Эллипсом называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые *фокусами*, что сумма расстояний от произвольной точки $M$ эллипса до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \text{const}, \qquad (1)$$

т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$ .




Составим уравнение эллипса в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox \uparrow\uparrow$. Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$|MF_1| = \ , \qquad |MF_2| = \ .$$

Согласно определению (1) имеем

$$= 2a - \ .$$

Возведем обе части равенства в квадрат и сократим одинаковые слагаемые:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \ + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \ .$$

$$4xc = 4a^2 - 4a \quad \Leftrightarrow \quad a \ = a^2 + xc.$$

Еще раз возводим в квадрат, сокращаем и группируем:

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Согласно определению $a < c$; поэтому можем обозначить $b^2 = a^2 - c^2$ , и разделив на $a^2b^2$, окончательно получаем

$$+ \ = 1 \ . \qquad (2)$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки эллипса удовлетворяют уравнению (2). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (2), то выполнено (1).

Из (2) выразим $y^2 = b^2(1- \ )$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2 = a^2 - c^2$:

$$|MF_1| \ = \ = \ =$$

$$= \ =$$

$= \; = \; = | \; a - \; |.$

Аналогично получаем, что $| \; MF_2 | = | a + \; |$. Из (2) следует, что $| \; x \; | \leq a$ (иначе уже первое слагаемое будет больше 1), а по определению, $a < c \;\Rightarrow$ оба выражения под модулем неотрицательны. Поэтому

$$| \; MF_1 | + | \; MF_2 | = a - \; + a + \; = 2a. \qquad \blacksquare$$

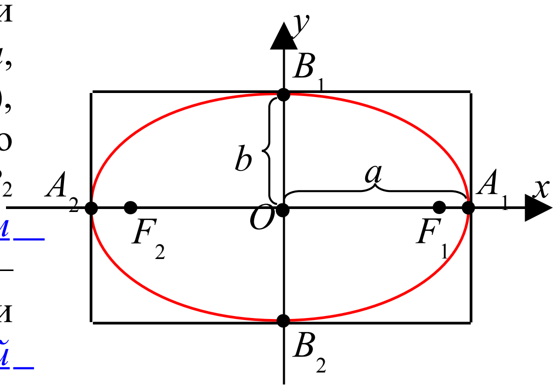
Уравнение (2) называется *каноническим уравнением* эллипса.

*Геометрические свойства эллипса.*

**1.** Из (2) следует, что $| \; x \; | \leq a$, $| \; y \; | \leq b$. Значит, эллипс целиком содержится в прямоугольнике, определяемыми этим неравенствами.

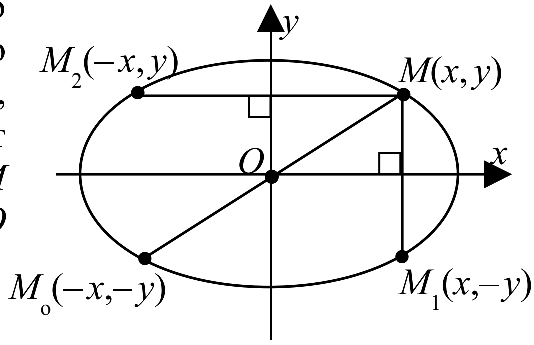
Подчеркнем, что это и все другие свойства выводятся только из уравнения эллипса, без ссылки на наглядность чертежа. Поэтому и раздел геометрии, который мы сейчас изучаем, называется «Аналитическая геометрия».

**2.** Координатные оси пересекают эллипс в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, которые называются его *вершинами*. Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$ называются *большим и малым диаметрами эллипса*, а вместе – главными диаметрами. Числа $a$ и $b$ называются *большой и малой полуосями*.




**3.** Координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда пара $(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также и пары $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, которые задают точки, симметричные $M$ относительно $Ox$, $Oy$ и точки $O$ соответственно.

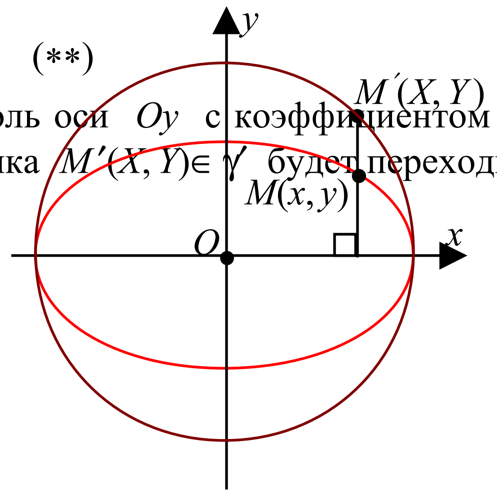



**4.** Эллипс может быть получен из окружности

$$\gamma': X^2 + Y^2 = a^2 \qquad (**)$$

в результате равномерного ее сжатия вдоль оси $Oy$ с коэффициентом $k = a/b$. Действительно, при таком сжатии точка $M'(X, Y) \in \gamma'$ будет переходить в точку $M(x, y)$, где

$$\begin{cases} x = X, \\ \phantom{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x, \\ \phantom{Y} \end{cases}$$

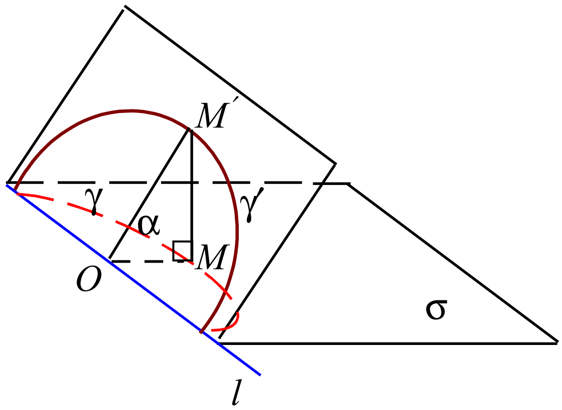


$$\Leftrightarrow$$

$y = Y$. $\qquad\qquad$ $Y = y$.

Подставляя последние формулы в (**), получим, что координаты точки $M$ удовлетворяют (2), т.е. $M \in \gamma$.

**5.** Эллипс может быть получен из окружности в результате проекции окружности на плоскость $\sigma$ непараллельную плоскости окружности . Действительно, при такой проекции отрезки параллельные линии пересечения плоскостей $l = \sigma \cap$ сохраняют длину, а отрезки перпендикулярные $l$ сжимаются в $1/\cos\alpha$ раз, где $\alpha$ – угол между $\sigma$ и . Таким образом, окружность сжимается по одному направлению, и согласно свойству 4, из нее получается эллипс.




**6.** Самостоятельно убедитесь, что [параметрические уравнения эллипса]() имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha\,, \\ y = b\sin\alpha\,,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

## §2. *Гипербола.*

***Определение.*** *Гиперболой* называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые *фокусами*, что модуль разности расстояний от произвольной точки $M$ гиперболы до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$||MF_1|-|MF_2||=2a=\text{const}, \tag{3}$$

т.е. независящая от выбора точки $M\in\gamma$, и $2a<2c=|F_1F_2|$ .

Составим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox\uparrow\uparrow$. Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. $x$

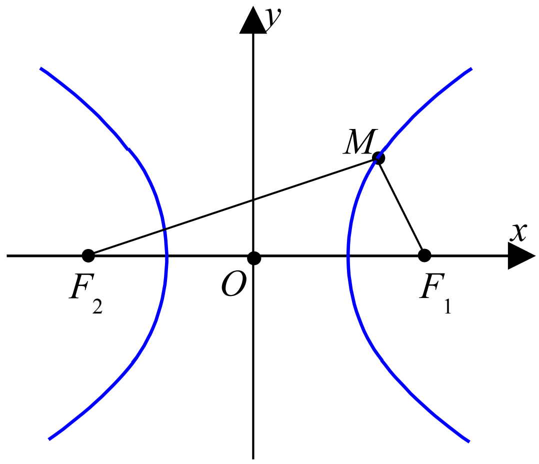
Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$|MF_1|=$ ,

$|MF_2|=$ .

Согласно определению (3) имеем

$=\pm 2a+$ .




Далее совершаем дословно такие же преобразования, что и для эллипса. В результате получим уравнение

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

***Упражнение.*** *Проделайте эти преобразования самостоятельно.*

По определению $a<c$; поэтому можем обозначить $b^2=c^2-a^2$, и разделив на $a^2b^2$ окончательно получаем

$$-=1\ . \tag{4}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки гиперболы удовлетворяют (4). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (4), то выполнено (3). Из (4) выразим $y^2$ $=b^2(\ \ -1)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2=c^2-a^2$. Точно так же, как и для эллипса получим

$$|MF_1|=|a-\ |,\qquad |MF_2|==|a+\ |. \qquad (**)$$

***Упражнение.*** *Проделайте это самостоятельно.*

Из (4) вытекает, что $x^2=a^2(1+\ )\ \Rightarrow\ |x|\geq a$, и по определению $c>a$. Значит, второе слагаемое в формулах (**) по модулю больше первого и при $x\geq a$ получаем

$$|MF_1|=\ -a,\qquad |MF_2|=a+\ ,$$

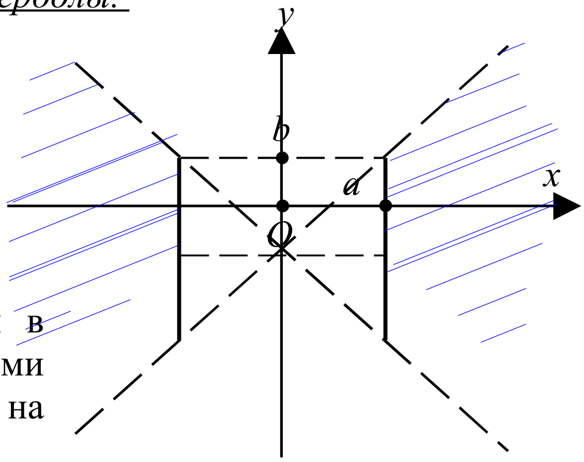
а при $x\leq -a$ получаем

$$|MF_1| = a - \ , \qquad\qquad |MF_2| = -a - \ .$$

В обоих случаях выполняется (3). ■

Уравнение (4) называется *канонически уравнением гиперболы*.

*Геометрические свойства гиперболы.*




**1.** Мы уже отмечали, что для любой точки $M(x,y)$ на гиперболе

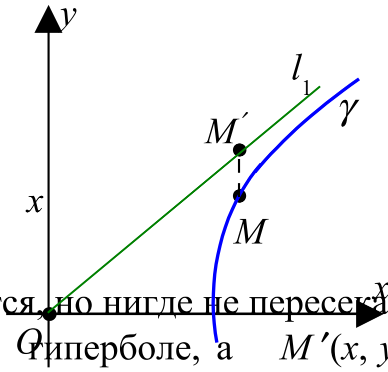
$$x^2 = a^2(1+) \ \Rightarrow \ |\ x\ | \geq a,$$

кроме того (4) $\Rightarrow$

$$x^2 > \ \Leftrightarrow \ |\ x\ | > |\ y\ | \ .$$

Значит вся гипербола содержится в области, определяемой этими неравенствами. Она заштрихована на рисунке.

**2.** Ось $Ox$ пересекает гиперболу в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Ось $Oy$ ее не пересекает. Числа $a$ и $b$ называются *полуосями гиперболы* – *действительной и мнимой*.




**3.** Дословно так же, как и для эллипса доказывается, что координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

**4.** Прямые $l_1$: $y = \ x$ и $l_2$: $y = - \ x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Гипербола неограниченно к ним приближается, но нигде не пересекает. Действительно, пусть $M(x, y)$ – точка на гиперболе, а $M'(x, y')$ – на соответствующей асимптоте. Тогда расстояние от точки $M$ до асимптоты меньше, чем $|MM'|$. При этом

$$|MM'| = |\ y'\ | - |\ y\ | \ .$$

$$(y')^2 = \ x^2, \quad y^2 = b^2(\ -1) \quad (*_*^*)$$

Из этих равенств вытекает, что при $|\ x\ | \longrightarrow \ \infty$ будет $|\ y'\ | \longrightarrow \ \infty$ и $|\ y\ | \to \infty$ . Кроме этого,

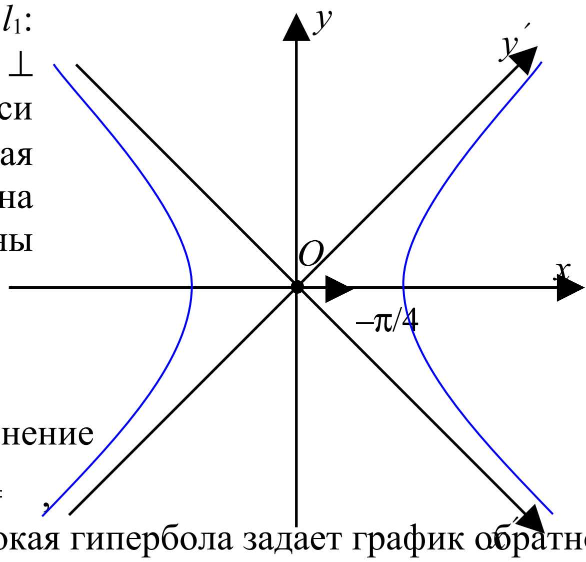
$$(y')^2 - y^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ |\ y'\ | - |\ y\ | = \ \longrightarrow \ 0 \text{ при } |\ x\ | \longrightarrow \ \infty.$$

Заметим, что обе асимптоты вместе можно задать вместе одним уравнением $\ - \ = 0$ . Для его получения достаточно в правой части уравнения (4) заменить 1 на 0. Асимптоты проходят через диагонали прямоугольника, который определяется неравенствами $|\ x\ | \leq a$, $|\ y\ | \leq b$. Он называется *фундаментальным прямоугольником гиперболы*. Для построения гиперболы рекомендуется сначала изобразить этот прямоугольник.

**5.** При $a = b$ гипербола называется <u>*равнобокой*</u>. Ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{5}$$

а асимптоты имеют уравнения $l_1$: $y = x$, $l_2$: $y = -x$. Очевидно, что $l_1 \perp l_2$, и мы можем выбрать их за оси новой декартовой СК $Ox'y'$, которая получается из $Oxy$ поворотом на угол $-45°$. Тогда формулы замены координат имеют вид:




$$\begin{cases} x = (x' + y'), \\ y = (-x' + y'). \end{cases}$$

Подставим их в (5) и получим уравнение

$$2x'y' = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \;,$$

где $k = a^2/2$. Таким образом, равнобокая гипербола задает график обратной пропорциональности.

**6.** *Параметрические уравнения гиперболы* имеют вид:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\, t\,, \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t,\ t \in \mathbf{R}\,. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a(t + 1/t), \\ y = b(t - 1/t),\ t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}\,. \end{cases}$$

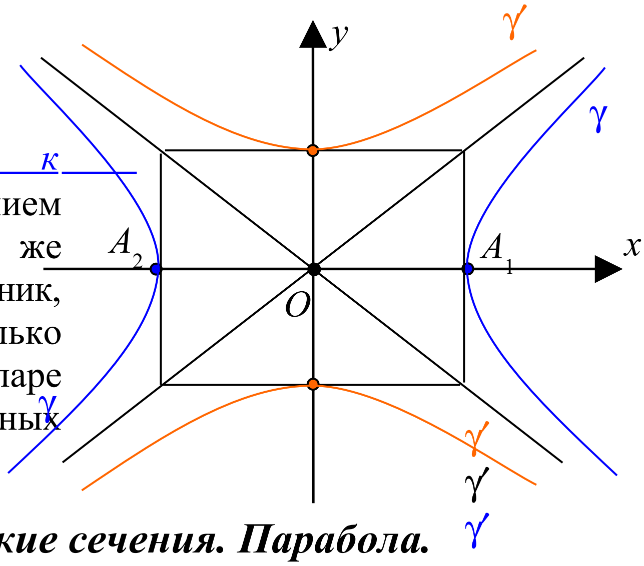
Знак «+» соответствует одной ветви гиперболы, а «–» – другой ветви.

***Упражнение.*** Проверьте это самостоятельно.

**7.** Гипербола

$$\gamma'\colon\ - \ = -1\ ,$$

называется *сопряженной к гиперболе* γ, заданной уравнением (4). Она имеет тот же фундаментальный прямоугольник, те же асимптоты, только расположена в другой паре вертикальных углов, образованных этими асимптотами.




## §3. *Конические сечения. Парабола.*

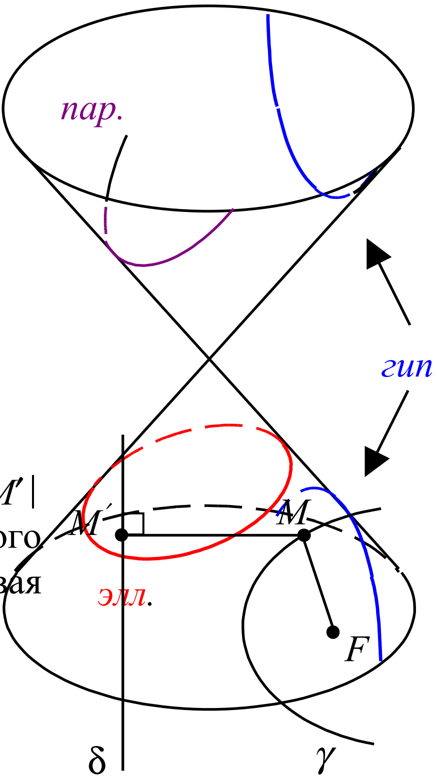
***Определение.*** *Коническим сечением* (КС) называется кривая, по которой коническую поверхность пересекает плоскость, не проходящая через вершину этой поверхности.

В следующей главе мы изучим, что коническая поверхность выглядит именно так, как это изображено на рисунке, и убедимся, коническими сечениями могут быть эллипс, гипербола и парабола. Причем, парабола получается тогда и только тогда, когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса.

Следующие две теоремы примем без доказательства.

***Теорема 1.*** *Для всякого КС $\gamma$, кроме окружности существуют точка $F$, называемая фокусом, и прямая $\delta$, называемая директрисой, такие что отношение расстояний от произвольной точки $M \in \gamma$ до $F$ и от $M$ до $\delta$ есть величина постоянная (т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$).*

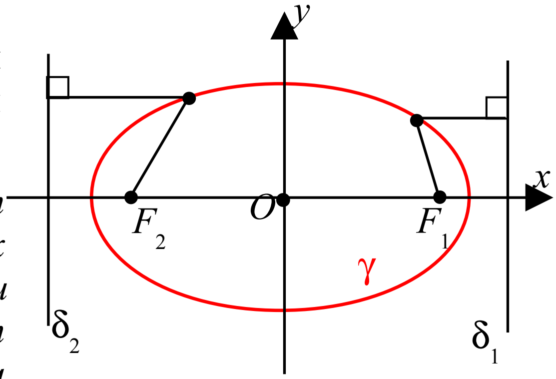
Эта величина $\varepsilon = |MF|/|MM'|$ называется *эксцентриситетом* конического сечения. Чем меньше ε, тем ближе кривая



расположена к фокусу. При $0<\varepsilon<1$ кривая замкнута и представляет собой эллипс. Чем ближе $\varepsilon$ к единице, тем более эллипс вытянут. При $\varepsilon=1$ он, как бы, достигает бесконечной длины, и происходит его разрыв: эллипс превращается в параболу.

Чем больше $\varepsilon$, тем ближе кривая расположена к директрисе. При $1<\varepsilon<\infty$ получается гипербола.

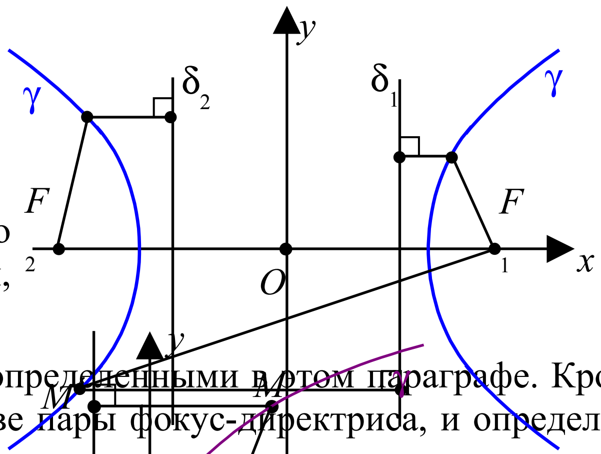

Очевидно, что эксцентриситет и расстояние $|FF'|$ от фокуса до директрисы однозначно определяют КС. Действительно, если два КС имеют одинаковое расстояние от фокуса до директрисы, то мы можем движением совместить их фокусы и директрисы. А если у них еще одинаковое $\varepsilon$, то и сами КС совместятся. Если же два КС имеют одинаковое $\varepsilon$, но разное расстояние от $F$ до $\delta$, то они подобны. В частности, все параболы подобны друг другу.




***Теорема 2.*** *Эксцентриситет эллипса или гиперболы, заданных своими каноническими уравнениями* (2) *или* (4), *равен* $c/a$, *фокусы имеют координаты* $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, *а директрисы задаются уравнениями*

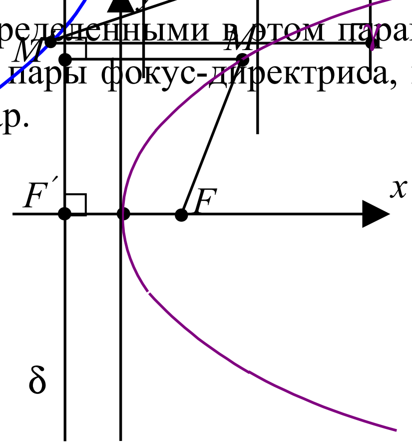
$\delta_1$: $x=$ , $\delta_2$: $x=$

(напомним, что $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса, и $c^2 = a^2 + b^2$ для гиперболы).




Из этой теоремы следует, что фокусы эллипса или гиперболы, которые мы определили в §1 и в §2, совпадают с фокусами, определенными в этом параграфе. Кроме того, эллипс и гипербола имеют две пары фокус-директриса, и определить фигуру можно с помощью любой из пар.

***Определение.*** *Параболой* называется КС, эксцентриситет которого равен единице.



Составим уравнение пара-болы в декартовой СК. Пусть $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы. Начало координат поместим в середину отрезка $FF'$ и направим $Ox \uparrow\uparrow$ . Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокус будет иметь координаты $F(p/2,\, 0)$, а директриса – уравнение $\delta\colon x = -p/2$ .

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда

$$|MF| = \ , \quad |MM'| = x + \ .$$

Согласно определению $|MF|^2 = |MM'|^2 \Leftrightarrow {}^2 + y^2 = {}^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 2px . \qquad (6)$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (6), то

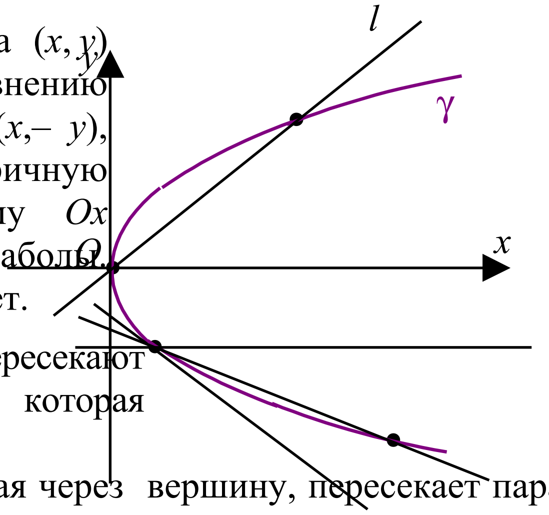
$$|MF|^2 = {}^2 + y^2 = x^2 - px + \ + 2px = x^2 + px + \ = {}^2 = |MM'|^2$$

Уравнение (6) называется *канонического уравнением параболы*. ■

*Геометрические свойства параболы.*

**1.** Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.

**2.** Если $M(x, y) \in \gamma$, т.е. пара $(x, y)$ удовлетворяет (6), то этому уравнению удовлетворяет также и пара $(x, -y)$, которая задает точку симметричную $M$ относительно оси $Ox$. Поэтому $Ox$ является осью симметрии параболы. Других симметрий у параболы нет.




**3.** Координатные оси пересекают параболу только в точке $O$, которая называется *вершиной параболы*.
Любая другая прямая, проходящая через вершину, пересекает параболу еще в одной точке.

Действительно, любую прямую $l$, проходящую через $O$, кроме оси $Oy$ можно задать уравнением $y = kx$ . Для того, чтобы найти ее общие точки с параболой $\gamma$ решаем систему уравнений

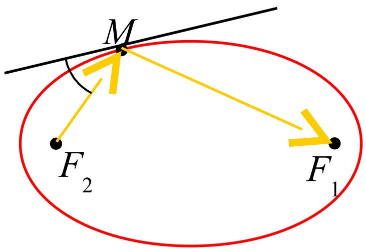
$$\begin{cases} y^2 = 2px , \\ y = kx . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0, \\ y = kx . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k^2x - 2p) = 0, \\ y = kx . \end{cases}$$

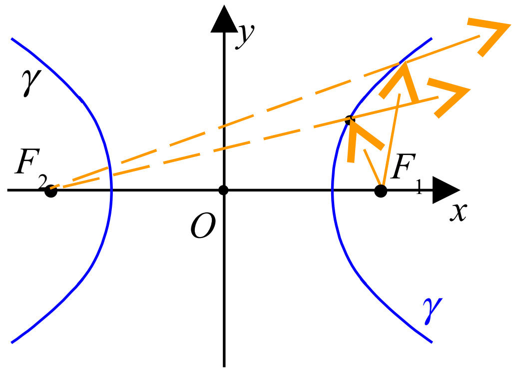
При $k \neq 0$ получаем два решения – $(0, 0)$ и $^2$, а при $k = 0$ – только одно – $(0, 0)$. Значение $k = 0$ соответствует оси $Ox$.

Аналогично, можно доказать, что любая прямая, параллельная оси параболы пересекает ее в одной точке, а любая другая прямая, проходящая через эту точку, кроме касательной, обязательно пересечет параболу еще в одной точке.

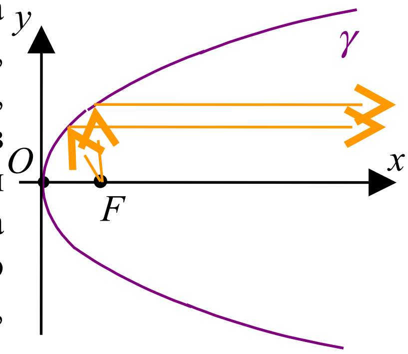
Отметим еще ряд интересных *оптических свойств* конических сечений.

Луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса, проходит через второй его фокус. Математически это означает, что $\forall\ M \in \gamma$, отрезки $MF_1$ и $MF_2$ образуют с касательной к эллипсу в точке $M$ равные углы. Луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажется исходящим из второго фокуса.




Луч света, исходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы, движется параллельно ее оси. И, наоборот, лучи, приходящие из бесконечности параллельно оси параболы, концентрируются в фокусе. На этом свойстве параболы и основано действие параболических рефлекторов, параболических антенн и радаров.



# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ
# С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## Часть I. ***Аналитическая геометрия***

Для самостоятельной работы студентов
физического и математического факультетов

УДК 514.072
ББК 22.151 р 30

*Автор*: доцент кафедры геометрии и математического анализа
УО «ВГУ им. П.М.Машерова», кандидат физико-математических
наук ***М.Н.Подоксенов***

*Рецензент*: доцент кафедры прикладкой математики УО «ВГУ им. П.М.Машерова,
кандидат физико-математических наук Л.В.Командина

Данное учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Геометрия» для студентов физического факультета обучающихся по специальности «физика и математика». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

Рекомендуется также для студентов очного и заочного отделений математического факультета, обучающихся по специальности «Математики и информатика».

**УДК 514.072**
**ББК 22.151 р 30**

# *СОДЕРЖАНИЕ.*

# ВВЕДЕНИЕ

Данный курс лекций рассчитан на студентов физического факультета, обучающихся по специальности «физика и математика» и написан в соответствии с учебной программой по данной специальности. Он также будет полезен студентам заочного отделения математического факультета, обучающимся по специальности «математика и информатика».

Курс лекций сопровождается примерами решения задач. Это будет очень полезно студентам заочного отделения при решении контрольных работ и студентам очного отделения при решении индивидуальных практических заданий. Это особенно актуально в связи с тем, что большое количество часов в учебной программе отводится на самостоятельную работу студентов.

Основное внимание уделяется изложению фактического материала. Доказательства приводятся по-возможности кратко.

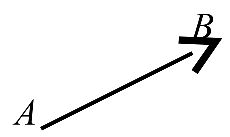
В первую часть курса вошли разделы, относящиеся к аналитической геометрии: векторная алгебра и системы координат, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка. В приложении приводятся сведения из алгебры, необходимые для изучения аналитической геометрии. Это связано с тем, что данные разделы изучаются в курсе алгебры, как правило, слишком поздно. Материал, изложенный мелким шрифтом, считается дополнительным.

Во вторую часть курса предполагается включить разделы: векторное и аффинное пространство, группы преобразований, дифференциальная геометрия, методы изображений.

# ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.

## §1. *Направленные отрезки. Понятие вектора.*

***Определение.*** *Отрезок* $AB$ называется *направленным*, если указано, какая из точек $A$ или $B$ является его началом, а какая концом. Если $A$ – начало, а $B$ – конец, то этот отрезок обозначается , а на чертеже его конец обозначается стрелочкой.




***Определение.*** Длиной направленного отрезка называется длина отрезка $AB$.

***Определение.*** Направленные *отрезки* и называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если лучи $AB$ и $A_1B_1$ сонаправлены (противоположно направлены). Пишем ↑↑ (↑↓).

***Определение.*** Два направленных отрезка и называются *эквивалентными* или *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишем ~. Очевидно, ~ ⇔ они совмещаются параллельным переносом.

Легко проверить, что данное отношение, определенное на множестве всех направленных отрезков плоскости или пространства обладает следующими свойствами:

**1.** ~ (*рефлексивность*),

**2.** ~ ⇔ ~ (*симметричность*),

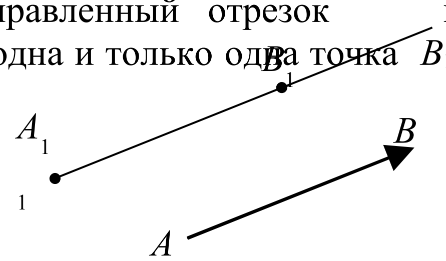
**3.** (~ & ~)⇒ ~ (*транзитивность*).

Таким образом, отношение, которое мы определили, действительно является отношением эквивалентности (это отношение изучается в курсе алгебры). Поэтому множество всех направленных отрезков распадается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

***Определение.*** *Вектором* называется класс эквивалентных между собой направленных отрезков. Другими словами, каждый направленный отрезок задает вектор, при этом, эквивалентные отрезки задают один и тот же вектор. Направление всех отрезков данного класса называется *направлением вектора*, а их длина – *длиной вектора*. Длина вектора обозначается | | .

Если вектор задается направленным отрезком , то пишем = , и говорим, что есть *вектор* , *отложенный из точки* $A$ . На чертеже вектор изображается любым из задающих его направленных отрезков.

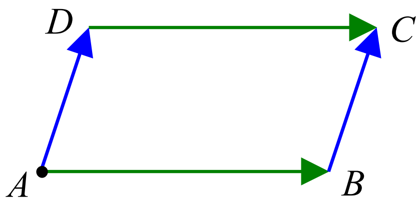
***Предложение* 1.** Пусть задан направленный отрезок и произвольная точка $A_1$. Тогда существует одна и только одна точка $B_1$,



такая что ~. Другими словами, данный вектор можно отложить из любой точки, и притом, единственным образом.

***Упражнение.*** Доказательство проведите самостоятельно

***Пример.*** Пусть *ABCD* – параллелограмм. Тогда ~ , и поэтому эти направленные отрезки они задают один и тоже вектор. Аналогично и задают один и тот же вектор.

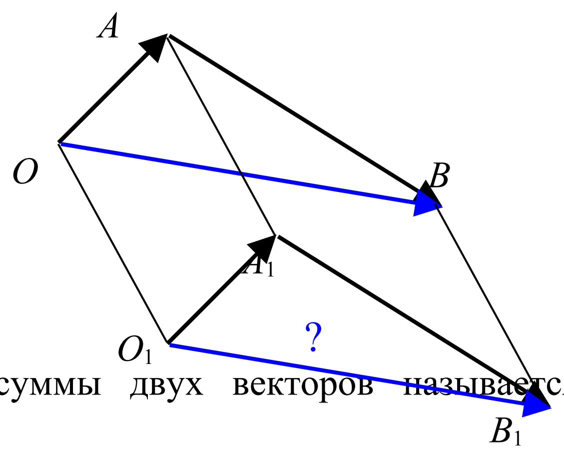



***Определение.*** Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается . Вектор, длина которого равна 1, называется единичным.

***Определение.*** Векторы и называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если задающие их направленные отрезки сонаправлены (противоположно направлены). Пишем ↑↑ ( ↑↓ ). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Пишем || . Считается, что у направление неопределено и он коллинеарен любому вектору. Три и более векторов, параллельных одной плоскости называются *компланарными.*

## §2. *Операции над векторами.*

***Определение.*** Пусть заданы два вектора и . Отложим вектор от произвольной точки *O*: = , а из точки *A* отложим вектор : = . Пусть – вектор, который задается направленным отрезком . Тогда называется *суммой векторов* и .
Пишем = + .




Этот способ построения суммы двух векторов называется *правилом треугольника.*

Однако, в нашем определении использовалась произвольная точка *O*. Возникает вопрос: что если мы начнем построение от другой точки $O_1$? Не получится ли другой вектор ? Другими словами, требуется еще доказать, что наше определение корректно. Самостоятельно докажите, пользуясь чертежом, что (~ & ~) ⇒ ~.

***Свойства операции сложения векторов.***

∀ , , выполнено

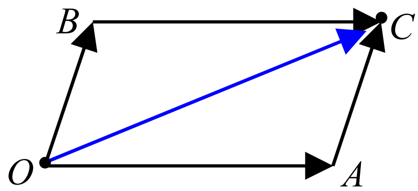
**1.** + = + (*коммутативность*);

**2.** ( + )+ = (*ассоциативность*);

**3.** + = .

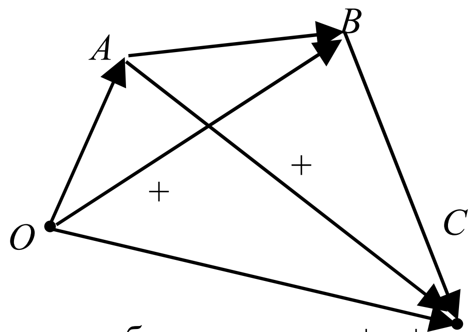
**4.** ∃! такой что + = . Этот вектор называется *противоположным вектором* к и обозначается – .

***Доказательство.*** **1.** Отложим и от одной точки $O$: = , = . Достроим $\Delta OAB$ до параллелограмма $OACB$. Пусть = . Очевидно, что ~, т.е. = . Тогда по правилу треугольника + = . С другой стороны, ~, ⇒ = и по правилу треугольника + = .




Данный способ построения суммы векторов называется *правилом параллелограмма.*

**2.** Доказательство обозначено на чертеже. Здесь мы видим, что с одной стороны, ( + )+ = = , а с другой стороны, + ( + ) = .




Это свойство позволяет использовать обозначение + + без расстановки скобок.

**3.** Пусть = , а можем задать с помощью направленного отрезка . Тогда по правилу треугольника + = . Значит, + = .

**4.** Пусть = . Зададим = . Тогда по правилу треугольника + = . Значит, + = . Тем самым мы доказали существование противоположного вектора. Докажем единственность.

Предположим, что существует еще один вектор такой что + = . Прибавим к последнему равенству справа и слева вектор :

( + ) + = + .

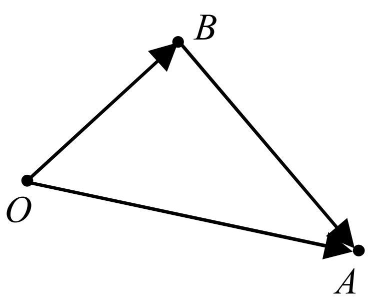
Используя свойства **1** и **2** получаем

( + ) + = + ⇒ + = + ⇒ = . ■

***Определение.*** *Разностью двух векторов* и называется такой вектор , что + = . Пишем = – .

Докажем, что разность векторов существует и определяется однозначно.

Отложим и от одной точки $O$: = , = , и пусть = . Тогда по правилу



треугольника $+=$ (*). Значит, разность двух векторов существует.

Докажем единственность. Прибавим справа и слева к к равенству (*) вектор $-$:

$$(+)+(-)=+(-).$$

Используя свойства **1** и **2** получаем

$$+=+(-) \Rightarrow =+(-).$$

Тем самым мы доказали, что $-=+(-)$. А поскольку единственность противоположного вектора мы уже доказали, то и разность определяется однозначно. Кроме того, мы увидели, как построить разность на чертеже.

***Определение.*** Произведением вектора на число $\lambda$ называется такой вектор , что

**1.** $\uparrow\uparrow$, если $\lambda>0$, и $\uparrow\downarrow$, если $\lambda<0$;

**2.** $||=|\lambda|\cdot||$.

Пишем $=\lambda$. (Часто еще добавляют **3.** если $\lambda=0$, то $=$. Но это следует из **2.**)

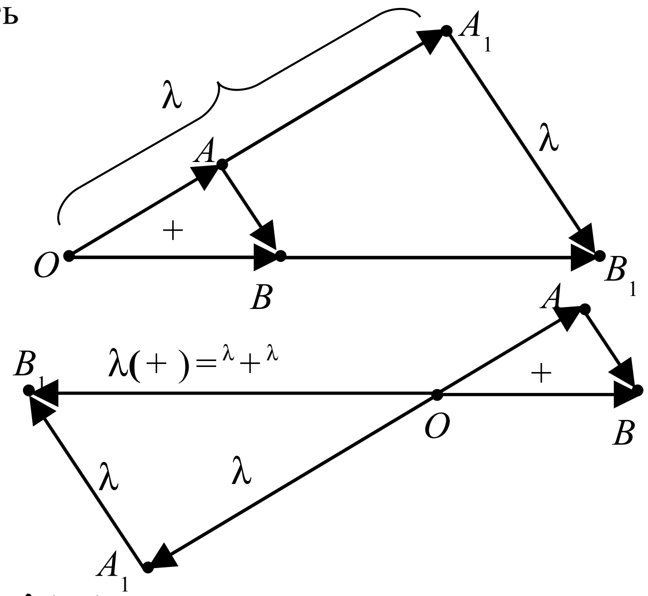
***Свойства операции умножения вектора на число.***

**1.** $\lambda(+)=\lambda+\lambda$; **3.** $(\lambda+\mu)=\lambda+\mu$;

**2.** $\lambda(\mu)=(\lambda\mu)$; **4.** $1\cdot=$.

***Доказательство.*** **1.** Пусть

$$=,=,$$
$$\lambda=,\lambda=. \qquad (**)$$




Тогда по правилу треугольника

$$+=,\lambda+\lambda=.$$

Нам требуется доказать, что $\lambda(+)=$.

Из (**) вытекает подобие треугольников $\Delta OAB\sim\Delta OA_1B_1$ по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $||$ и $||=\lambda||$.

Отсюда, с учетом $+=$, вытекает $\lambda(+)=$. На первом рисунке изображен случай $\lambda>0$, а на втором – $\lambda<0$. В случае же $\lambda=0$, обе части равенства дают . ■

***Упражнение.*** Остальные свойства докажите самостоятельно.

***Теорема* 1** (*первый признак коллинеарности векторов*). *Для того, чтобы ненулевые векторы и были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $\lambda$, *что* $=\lambda$.

***Доказательство.*** Достаточность вытекает непосредственно из определения произведения вектора на число. Если $=\lambda$, то по определению $\|$.

Необходимость. Пусть $\|$.

1 случай: $\uparrow\uparrow$. Положим $\lambda = |\ |/|\ | > 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \uparrow\uparrow \Rightarrow \lambda \uparrow\uparrow, \\ |\lambda| = |\lambda|\,|\ | = \lambda|\ | = |\ | = |\ |. \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = .$$

2 случай: $\uparrow\downarrow$. Положим $\lambda = -|\ |/|\ | < 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \uparrow\downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow\uparrow, \\ |\lambda| = |\lambda|\,|\ | = -\lambda|\ | = |\ | = |\ |. \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = .$$

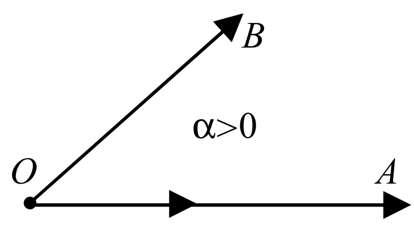
Что и требовалось доказать. ■

В процессе доказательства мы показали, как решить следующую задачу: найти вектор сонаправленный с данным вектором и имеющий заданную длину $|\ | = \beta$. Это будет вектор $=$ . В частности, единичный вектор $\uparrow\uparrow$ находится так: $=$ . Такой вектор называется *ортом вектора* .

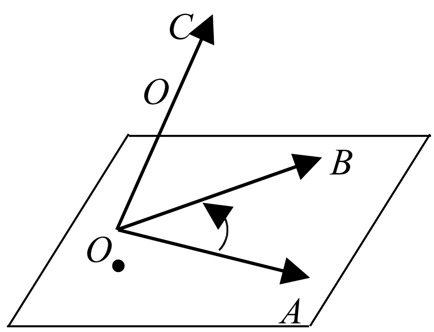
## §3. *Угол между векторами. Ориентация пары векторов на плоскости или тройки векторов в пространстве.*

***Определение.*** Пусть и – два ненулевых вектора. Отложим их из одной точки $O$: $=$ , $=$ . Тогда *углом между векторами* и называется угол между лучами $OA$ и $OB$, т.е. $\alpha = \angle AOB$. Пишем $\alpha = \angle(\ ,\ )$.

Если речь идет о векторах на плоскости, то можем ввести понятие *ориентированного угла между векторами*. Если кратчайший поворот от луча $OA$ к лучу $OB$ осуществляется против часовой стрелки, то считаем, что $\alpha > 0$, а если по часовой – то $\alpha < 0$. Таким образом, $-\pi < \alpha \le \pi$. Если $\alpha > 0$, то *пара векторов* $(\ ,\ )$ называется *правой*, а если $\alpha < 0$ – то *левой*.




В пространстве понятие ориентированного угла не имеет смысла. Если посмотреть на плоскость, в которой лежат лучи



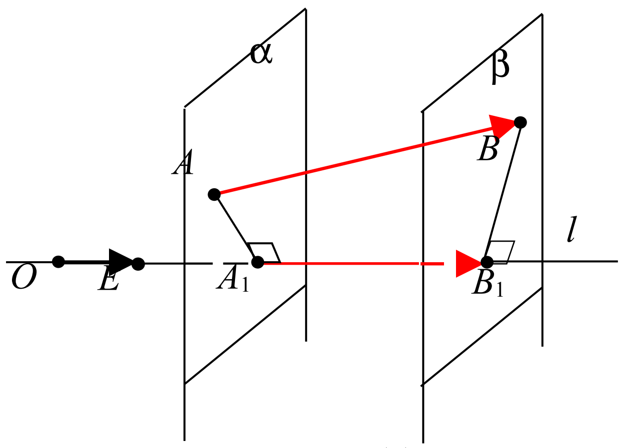
$OA$ и $OB$ с одной стороны, то увидим, что кратчайший поворот от $OA$ к $OB$ осуществляется в одном направлении, а если посмотреть на плоскость с другой стороны, то мы увидим тот же поворот в другом направлении.

Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора , , . Отложим их из одной точки $O$: = , = , = . [Тройка векторов]() ( , , ) называется [правой](), если кратчайший поворот от луча $OA$ к лучу $OB$, если смотреть из точки $C$, выглядит как осуществляющийся против часовой стрелки. Соответственно, если этот поворот выглядит как осуществляющийся по часовой стрелке, то [тройка векторов]() ( , , ) называется [левой](). На рисунке изображена правая тройка векторов.

## §4. *Проекция вектора на ось.*

Пусть $l$ – некоторая прямая в пространстве. Выберем точку $O\in l$ и единичный вектор $||\, l$. Построим направленный отрезок = . Прямая $l$ с отрезком называется [осью](). Иногда говорят, что ось – это прямая, на которой задано направление.

***Определение.*** Пусть – произвольный вектор, а – произвольный направленный отрезок, который представляет . Опустим перпендикуляры $AA_1$ и $BB_1$ на прямую $l$. Пусть = . Тогда вектор называется [векторной проекцией]() вектора на ось $l$ и обозначается $\pi_l$.




Мы имеем || . Поэтому согласно теореме 1 существует такое число $p$, что = $p$. Это число называется [скалярной проекцией]() вектора на ось $l$ . Поскольку – единичный вектор, то $p$ – это длина вектора , если ↑↑, и $p$ = – ||, если ↑↓. Будем обозначать скалярную проекцию так: $\Pi_l$.

Зная скалярную проекцию вектора мы можем найти его векторную проекцию:

$$\pi_l = (\Pi_l); \qquad (*)$$

Если ⊥, то, очевидно, $A_1=B_1$ и $\Pi_l=0$.

Необходимо еще доказать, что определения скалярной и векторной проекции корректны, т.е. не зависят от выбора направленного отрезка , который представляет вектор . Другими словами, если мы отложим вектор от другой точки, то его скалярная и векторная проекции не изменятся,– и это надо доказать.

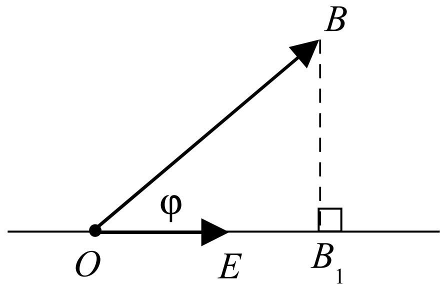
Проведем через точки $A$ и $B$ плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярно $l$. Тогда $|p|=|\Pi_l|$ есть расстояние между $\alpha$ и $\beta$ . Выберем другой направленный отрезок , представляющий и проведем через точки $A'$, $B\,'$ плоскости $\alpha'$ и $\beta'$ перпендикулярно $l$. Направленные отрезки и эквивалентны, а значит, они совмещаются параллельным переносом. При этом переносе плоскость $\alpha$ совместится с $\alpha'$, а плоскость $\beta$ – с $\beta'$. Значит, расстояние между $\alpha'$ и $\beta'$ равно расстоянию между $\alpha$ и $\beta$, и оно равно $|p|$. Поэтому $|p|$ не зависит от выбора направленного отрезка. Направление векторной проекции также не изменится при переносе, поэтому и знак $p$ не изменится. Итак, скалярная проекция не зависит от выбора направленного отрезка, представляющего . В силу равенства (∗) $\pi_l$ также не зависит от выбора направленного отрезка.

***Теорема 2.*** *Свойства проекции вектора на ось.*

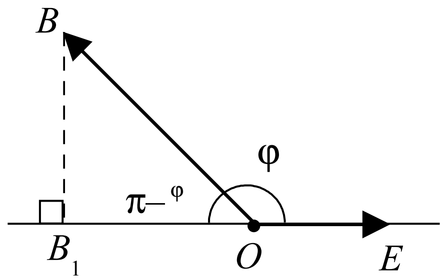
**1.** $\Pi_l = |\ | \cos\angle(\ ,\ )$;

**2.** $\Pi_l(\lambda\ ) = \lambda\Pi_l\ $, $\pi_l(\lambda\ ) = \lambda(\pi_l\ )$;

**3.** $\Pi_l(\ +\ ) = \Pi_l\ + \Pi_l\ $, $\pi_l(\ +\ ) = \pi_l\ + \pi_l\ $.




***Доказательство.*** **1.** Поскольку определение проекции не зависит от выбора точки $A$ , из которой отложен вектор , мы можем отложить его из точки $O$. Обозначим $\varphi=\angle(\ ,\ )$.




<u>*1 случай*</u>: $\varphi \le \pi/2$. Тогда из $\Delta OBB_1$ получим, что

$$p=|OB_1|=|OB|\cdot\cos\varphi=|\ |\cos\varphi.$$

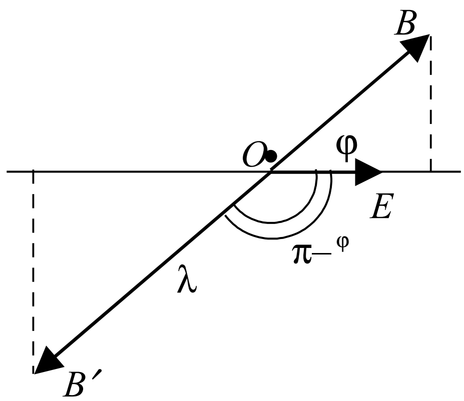
<u>*2 случай*</u>: $\varphi > \pi/2$. Тогда из $\Delta OBB_1$ получим, что

$$p=-|OB_1|=-|OB|\cdot\cos(\pi-\varphi)=|\ |\cos\varphi.$$

**2.** Для скалярных проекций:

<u>*1 случай*</u>: $\lambda > 0$. Тогда $\lambda\ \uparrow\uparrow\ $ и $\angle(\ ,\lambda\ ) = \varphi$. Значит,

$$\Pi_l(\lambda\ )=|\lambda\ |\cos\angle(\ ,\lambda\ )=$$
$$=\lambda|\ |\cos\varphi = \lambda\Pi_l\ .$$




<u>*2 случай*</u>: $\lambda < 0$. Тогда $\lambda\ \uparrow\downarrow\ $, $\angle(\ ,\lambda\ ) = \pi-\varphi$ и $\cos\angle(\ ,\lambda\ ) = -\cos\varphi$,

$\Pi_l(\lambda)=|\lambda|\cos\angle(,\lambda)=-\lambda|\,|\,(-\cos\varphi)=$

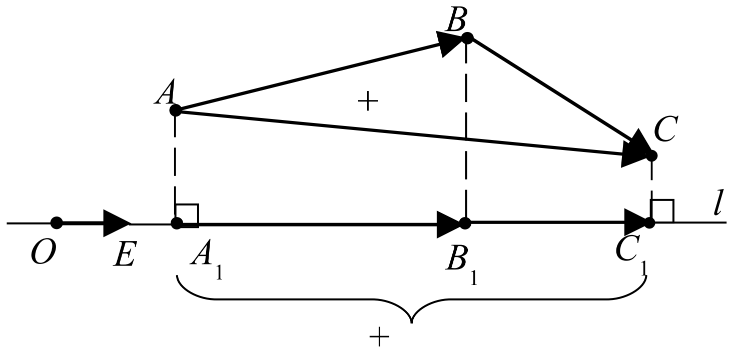
$=\lambda|\,|\cos\angle(,)=\lambda\Pi_l.$

3 _случай_: $\lambda=0$. Тогда равенство очевидно.

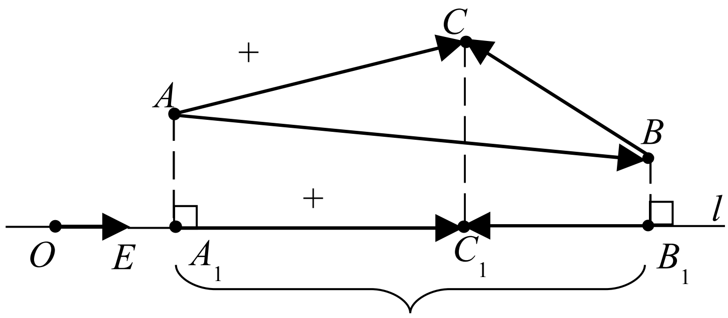
Для векторных проекций с помощью равенства (*) получаем:

$$\pi_l(\lambda)=(\Pi_l(\lambda))\cdot=\lambda(\Pi_l)\cdot=\lambda(\pi_l).$$

**3.** Доказательство для векторных проекций показано на чертеже, но только для случая векторов на плоскости. Рисунок для векторов в пространстве можно найти в учебнике [10].




Для скалярных проекций равенство вытекает из равенства для векторных проекций. Например, в случае, изображенном на втором рисунке,




$\Pi_l(+)=|A_1C_1|$,

$\Pi_l=|A_1B_1|$,

$\Pi_l=-|B_1C_1|$,

и мы видим, что

$$|A_1C_1|=|A_1B_1|+(-|B_1C_1|).\ \blacksquare$$

## §5. *Скалярное произведение векторов.*

***Определение.*** _Скалярным произведением_ двух векторов и называется _число_

$$\cdot=|\,|\,|\,|\cos\angle(,). \qquad (1)$$

Число $^2=\cdot$ называется _скалярным квадратом_ вектора .

Из определения получаем

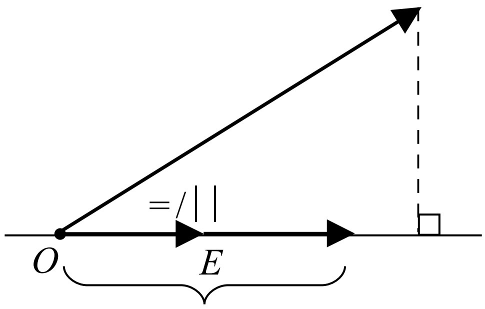
$$^2=-|\,||\,|\cos 0^\circ=|\,|^2 \quad\Rightarrow\quad |\,|=\ .$$

Также из определения очевидно, что равенство $\cdot=0$ возможно только в следующих случаях: 1. $|\,|=0$, 2. $|\,|=0$, 3. $\angle(,)=\pi/2$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

***Теорема 3.*** **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

**2.** *Для того, чтобы ненулевые векторы и были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю* ( $\perp \Leftrightarrow \cdot = 0$).




Согласно п°1 теоремы 2 величина $|\,|\cos\angle(\ ,\ )$ равна скалярной проекции вектора на ось, направление которой определяется вектором . Обозначим эту величину П. Тогда

$$\cdot = |\,| \cdot \Pi = |\,|\,\Pi . \qquad (2)$$

***Свойства скалярного произведения.***

**1.** $\cdot = \cdot$ (*коммутативность*);

**2.** $(\lambda)\cdot = \lambda(\ \cdot\ )$; } (*линейность*)

**3.** $\cdot(\ +\ ) = \cdot + \cdot$;

**4.** $\cdot \geq 0$, и $\cdot = 0 \Leftrightarrow =$ (*положительная определенность*).

***Доказательство.*** **1.** Вытекает непосредственно из определения.

**2.** Согласно формулам (2) и свойствам скалярной проекции (п°2 теоремы 2)

$$(\lambda)\cdot = |\,|\,\Pi(\lambda) = |\,|(\lambda\Pi) = \lambda(|\,|\,\Pi) = \lambda(\ \cdot\ ).$$

**3.** Согласно п°3 теоремы 2 и формулам (2) имеем

$$\cdot(\ +\ ) = |\,|\Pi(\ +\ ) = |\,|(\Pi + \Pi) = |\,|\Pi + |\,|\Pi = \cdot + \cdot$$

**4.** Вытекает непосредственно из п°1 теоремы 3. ■

***Замечание.*** Если мы знаем, чему равно скалярное произведение векторов и и знаем их длины, то мы можем вычислить угол между ними:

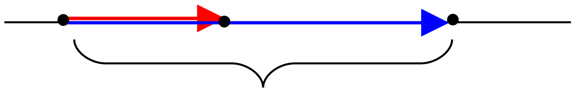
$$\cos\angle(\ ,\ ) = \ . \qquad (3)$$

Используется также следующее обозначение для скалярного произведения: ( , ).

## §6. *Координаты вектора и точки на прямой.*

Пусть $l$ – произвольная прямая. Рассмотрим множество всех векторов параллельных $l$. Пусть – один из них. Назовем его базисным. Пусть $\parallel l$ – другой вектор.

*O* *A* *B* *l*



Тогда ||, а значит, согласно теореме 1,найдется такое число $x$, что $=x$.

Число $x$ называется *координатой вектора* относительно базиса $\mathcal{B}=\{\}$. Пишем $(x)_{\mathcal{B}}$ .

Если $=y$, то $+=(x+y)$, а если $\alpha$ – произвольное число, то $\alpha=(\alpha x)$ . Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

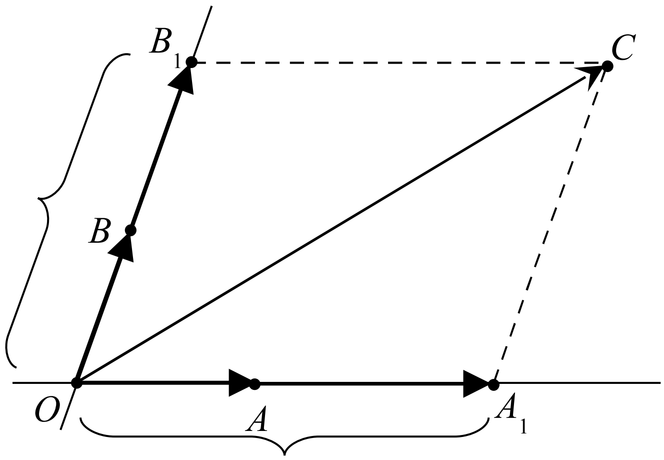
Выберем теперь произвольную точку $O\in l$. Пару $\mathcal{R}=\{O,\ \}$ назовем *репером*. Пусть $B$ – произвольная точка на прямой, а $=$, и $(x)_{\mathcal{B}}$ . Тогда $x$ называется *координатой точки* $B$ относительно репера $\mathcal{R}$ .

Очевидно, точка $O$ делит прямую $l$ на два луча. На одном из них точки имеют координату $x\geq 0$, а на втором – $x\leq 0$. Точка $O$ называется началом координат. Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *единичными*, если $||=1$. Очевидно, что в этом случае $|OB|=||=|x|||=|x|$.

Если $A$ – такая точка, что $=$, то репером еще называют пару $\{O,A\}$.

## §7. *Координаты вектора и точки на плоскости.*

Пусть на плоскости заданы два неколлинеарных вектора , и произвольная точка $O$. Пару $\mathcal{B}=\{,\}$ назовем *базисом*, а тройку $\mathcal{R}=\{O,\ ,\ \}$ – *аффинным репером*. Пусть – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки $O$:




$=,=,=.$

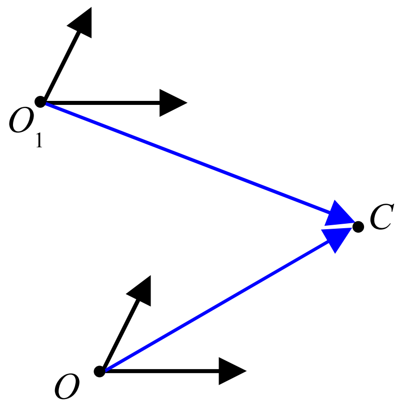
Проведем прямые $l_1=OA$ , $l_2=OB$. Построим параллелограмм, две стороны которого лежат на прямых $l_1$, $l_2$, так чтобы $C$ являлась его вершиной. Пусть $A_1$ и $B_1$ – вершины параллелограмма, лежащие на $l_1$ и $l_2$ соответственно. Пусть $=$, $=$. Тогда по правилу параллелограмма $=+$. Поскольку ||, а ||, то существуют такие числа $x_1, x_2$ , что $=x_1$ , $=x_2$ $\Rightarrow$

$$=x_1+x_2. \qquad (4)$$

Это выражение называется *разложением вектора по базису* $\mathcal{B}=\{,\}$. Числа $x_1, x_2$ называются *координатами вектора в данном базисе*. Они же называются *координатами точки* $C$ *относительно репера* $\mathcal{R}$= $\{O, \ , \ \}$. Пишем $(x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$ , $C(x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ . Если заранее известно, о каком базисе или репере идет речь, то их обозначение к координатам не добавляют. Репером на плоскости также называют тройку точек $\{O, A, B\}$.

Точка $O$ называется *началом координат*. Прямые $l_1$, $l_2$ вместе с выбранными на них направленными отрезками , называются координатными осями. А совокупность координатных осей и начала координат называется *аффинной системой координат* (СК) на плоскости. Иногда *репером* называют также тройку точек $\{O, A, B\}$, не лежащих на одной прямой.

Вектор называется *радиус-вектором* точки $C$ в данной СК или в данном репере. Если мы выберем другое начало координат $O_1$, то та же самая точка $C$ будет задаваться другим радиус-вектором = . Поэтому ее координаты изменятся. Координаты же вектора не зависят от выбора начала координат.




Действительно, пусть мы имеем еще одно разложение:

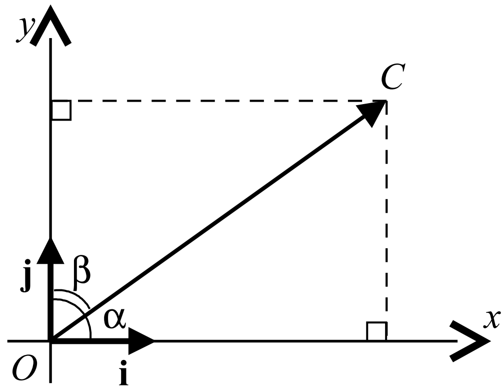
$$= y_1 + y_2, \qquad (4')$$

где, например, $x_2 \neq y_2$. Вычтем (4′) из (4):

$$= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \quad \Rightarrow \quad = \ .$$

Мы получили, что ||, но мы с самого начала предполагали, что векторы и неколлинеарны. Противоречие. Значит, $x_2 = y_2$. Аналогично доказывается, что $x_1 = y_1$.

***Определение.*** Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *ортонормированными*, если базисные векторы являются единичными и взаимно перпендикулярными (| | = | | =1 и · = 0). В этом случае СК тоже называется *ортонормированной*. Если, к тому же, пара ( , ) является правой, то СК называется *декартовой*.




Тогда приняты следующие обозначения: координаты $(x, y)$, координатные оси – $Ox$, $Oy$, базисные векторы – $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ , направленные отрезки на осях – $OE_1$, $OE_2$ . Векторы **i**, **j** называются *базисными ортами*.

Пусть произвольный вектор в декартовой СК имеет координаты $(x,y)$, т.е. $=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$. Домножим это равенство скалярно на вектор **i**:

$$\cdot\,\mathbf{i}=x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})=x\cdot 1+y\cdot 0=x.$$

А, с другой стороны,

$$\cdot\,\mathbf{i}=|\;||\,\mathbf{i}|\cos\angle(\;,\mathbf{i})=|\;|\cos\angle(\mathbf{i},\;)=\Pi_{Ox}.$$

Значит, $x=\Pi_{Ox}$ . Аналогично получаем $y=\Pi_{Oy}$. Таким образом, *в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси*.

Пусть $\alpha=\angle(\mathbf{i},\;)$, $\beta=\angle(\mathbf{j},\;)$. Тогда величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* вектора .

Пусть в произвольной аффинной СК, которая задаётся репером $\mathcal{R}=\{O,\;,\;\}$ известны координаты двух векторов: $(x_1,x_2)$, $(y_1,y_2)$. Тогда

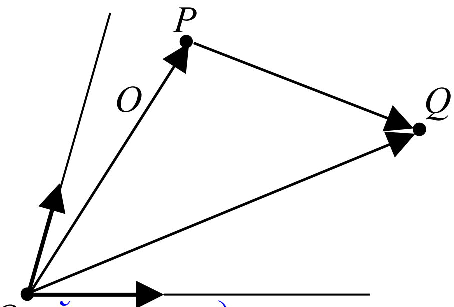
$$+\;=(x_1\;+x_2\;)+(y_1\;+y_2\;)=(x_1+y_1)\;+(x_2+y_2)\;.$$

$$\lambda\;=\lambda(x_1\;+x_2\;)=(\lambda x_1)\;+(\lambda x_2)\;.$$

Значит, вектор $+$ имеет координаты $(x_1+y_1,x_2+y_2)$, а вектор $\lambda$ имеет координаты $(\lambda x_1,\lambda x_2)$. Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*. Также легко убедиться, что при вычитании векторов их координаты вычитаются.

Допустим, нам известны координаты двух точек $P(x_1,x_2)$, $Q(y_1,y_2)$, а $=$. Выясним, как найти координаты этого вектора.

Пусть $=\;,\;=\;$. Согласно определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Значит, $(x_1,x_2)$, $(y_1,y_2)$. По правилу тре-угольника $+\;=\;$, т.е. $=\;-\;$.
Значит, $(y_1-x_1,y_2-x_2)$.

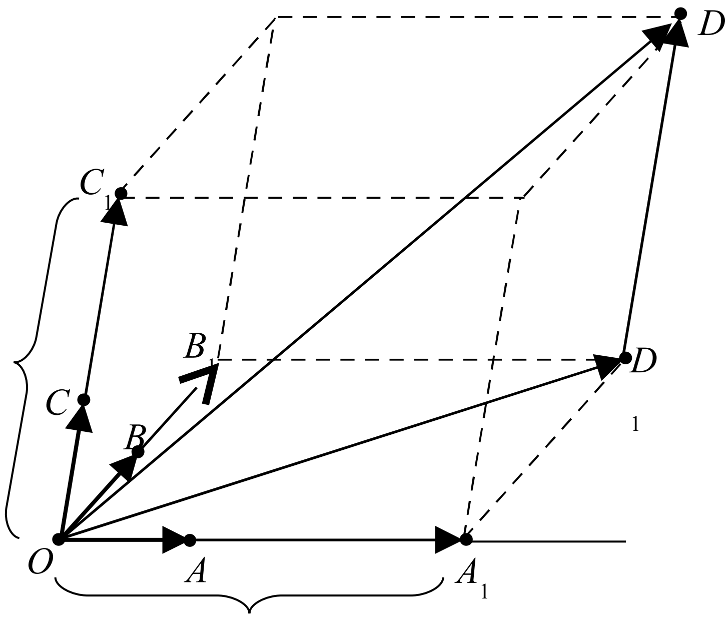



Таким образом, *для того, чтобы найти координаты вектора надо от координат его конца вычесть координаты начала*.

## §8. *Координаты вектора и точки в пространстве.*

Пусть в пространстве заданы три некомпланарных вектора , , . Назовем их базисными, а тройку $\mathcal{B}$ = {, , } – базисом. Пусть $O$ – произвольная точка. Четверку $\mathcal{R}$ = {$O$, , , } назовем аффинным репером в пространстве. Пусть – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки $O$:

= , = ,
=, = .




Проведем прямые $l_1 = OA$, $l_2 = OB$, $l_3 = OC$. Построим параллелепипед так, чтобы три его ребра лежали на этих прямых, а точка $D$ была вершиной. Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$ – вершины параллелепипеда, лежащие на прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$, а $D_1$ – четвертая вершина основания. Пусть

=, =, =, =.

Тогда = , и по правилу треугольника = + . А по правилу параллелограмма =+ . Значит, = + + . Но || , || , || , и по признаку коллинеарности векторов существуют такие числа $x_1, x_2, x_3$, что $= x_1$, $= x_2$, $= x_3$ $\Rightarrow$

$$= x_1 + x_2 + x_3 . \qquad (5)$$

Это выражение называется разложением вектора по базису $\mathcal{B}$ . Числа $x_1, x_2, x_3$ называются координатами вектора в этом базисе. Они же называются координатами точки $D$ относительно репера $\mathcal{R}$ . Пишем $(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$ , $D(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ . Репером также называют четверку точек $\{O, A, B, C\}$.

Вектор называется радиус-вектором точки $D$ в данном репере. Таким образом, по определению координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Точка $O$ называется началом координат, прямые $l_1$, $l_2$, $l_3$, вместе с выбранными на них направленными отрезками , , , называются координатными осями, а совокупность координатных осей и начала называется аффинной

<u>*системой координат*</u> в пространстве. Иногда <u>*репером*</u> называют четвёрку точек $\{O, A, B, C\}$, не лежащих в одной плоскости.

Если мы выберем другое начало координат, то та же самая точка $D$ будет задаваться другим радиус-вектором ⇒ ее координаты изменятся. Координаты же вектора не зависят от выбора начала координат. Действительно, пусть имеем еще одно разложение

$$= y_1 + y_2 + y_3, \qquad (5')$$

где, например, $y_3 \neq x_3$. Вычтем $(5')$ из $(5)$:

$$= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3), \quad \Rightarrow$$

$$= + .$$

Значит, вектор лежит в одной плоскости с векторами и . А мы с самого начала предполагали, что векторы , , некомпланарны. Противоречие. Значит, $y_3 = x_3$. Аналогично доказывается, что $y_2 = x_2$, $y_1 = x_1$. ■

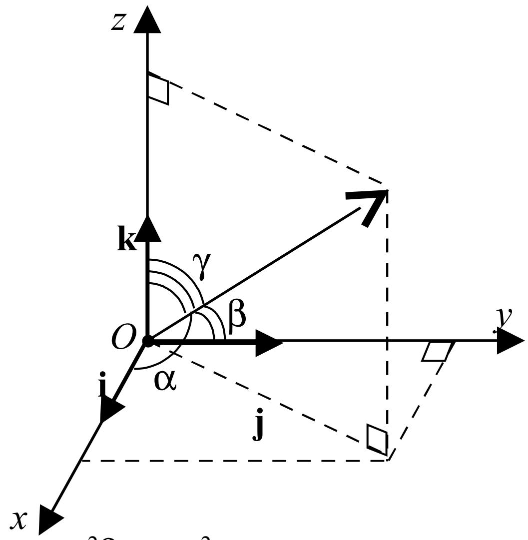
Так же, как и на плоскости доказывается, что <u>*при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*</u>. А <u>*для того, чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца отнять координаты начала*</u>.

Если векторы , , единичные и взаимно ортогональные, то базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются <u>*ортонормированными*</u>. Если, к тому же, векторы , , образуют правую тройку, то СК называется <u>*декартовой*</u>. В этом случае приняты обозначения базисных векторов **i**, **j**, **k**; координат – $x$, $y$, $z$; координатных осей – $Ox$, $Oy$, $Oz$; направленных отрезков на осях – $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$.

Векторы **i**, **j**, **k** называются <u>*базисными ортами*</u>.

Так же, как и на плоскости доказывается, что в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси.

Пусть $\alpha = \angle($**i**, $)$, $\beta = \angle($**j**, $)$, $\gamma = \angle($**j**, $)$. Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора .




Они обладают свойством: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

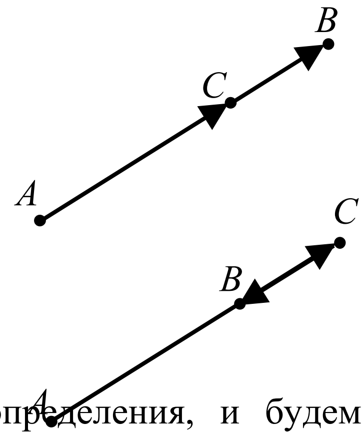
***Теорема 1′.*** *(второй признак коллинеарности векторов).*

*Для того, чтобы два ненулевых вектора на плоскости или в пространстве были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны* ( $(a_1, a_2, a_3) || (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \ = \ = \ $).

***Доказательство***. Согласно первому признаку коллинеарности векторов $||$ $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda: = \lambda$ $\Leftrightarrow$ $a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $=$ $= = \lambda$ .

■

## §9. *Деление отрезка в данном отношении.*




***Определение.*** Пусть точка $C$ лежит на отрезке $AB$. Говорим, что $C$ <u>*делит отрезок*</u> $AB$ <u>*в отношении*</u> $\lambda_1 : \lambda_2$, если

$$= \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 |AC| = \lambda_1 |CB|.$$

Учитывая, что $\uparrow\uparrow$ , последнее равенство можно переписать так:

$$\lambda_2 = \lambda_1. \qquad (6)$$

Теперь мы введем обобщение нашего определения, и будем говорить, что точка $C$ <u>*делит отрезок*</u> $AB$ <u>*в отношении*</u> $\lambda_1 : \lambda_2$ , если выполнено (6). Такое определение означает, что $C$ может лежать на прямой $AB$ за пределами отрезка $AB$, если $\lambda_1 : \lambda_2$ отрицательно. Число $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$ $( = \lambda)$ называется простым отношением точек $A$, $B$, $C$ и обозначается $(AB, C)$ или $(ABC)$.

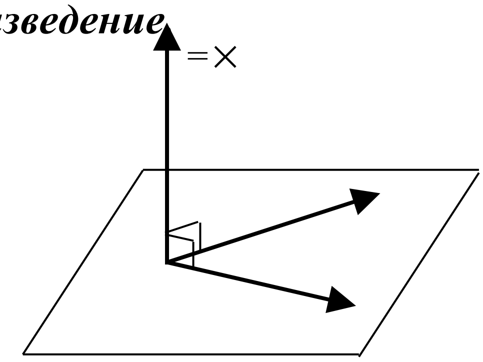
Пусть нам известны координаты концов отрезка: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $C(x, y, z)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$. Самостоятельно выведите из равенства (6), что

$$x = \ , \ y = \ , z = \ .$$

Эти формулы также будут доказаны на практических занятиях. В частности, если $C$ делит отрезок $AB$ пополам, то

$$x = \ , \ y = \ , z = \ .$$

## §10. *Векторное произведение*



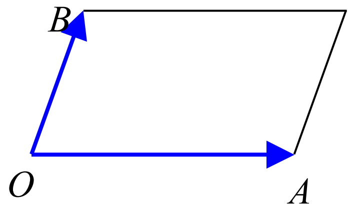

***Определение.*** <u>*Векторным произведением двух векторов*</u> и называется такой <u>*вектор*</u> , что

1. $\perp, \perp$;
2. тройка $(, , )$ – правая;
3. $| | = | | \, | | \sin\angle(, )$.

Пишем $= \times$ (используется также обозначение $= [, ]$ ).

Чрезвычайно распространена на экзамене следующая ошибка. В ответ на вопрос: «Дайте определение векторного произведения» студенты пишут только п°3 определения, к тому же, зачастую, опуская модуль у . Такой ответ классифицируется как полное отсутствие ответа. Невозможно определить вектор, задав только его длину. Необходимо задать еще его направление. П°1 указывает, что вектор $\times$ направлен по общему перпендикуляру к и . Но таких векторов заданной длины можно найти два. Поэтому необходим еще и п°2.

***Теорема* 4.** *Модуль векторного произведения двух векторов* и *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* и , *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*




***Доказательство.*** $S = |\,|\,|\,|\sin\angle AOB =$

$= |\,|\,|\,|\sin\angle(\,,\,) = |\times|.$ ■

***Следствие.*** $\times = \;\Leftrightarrow\; ||\;.$

*В частности, для любого вектора* *выполнено* $\times = .$

Действительно, $\times = \;\Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow$ стороны параллелограмма параллельны, либо длина одной из них равна нулю. Поскольку нулевой вектор считается коллинеарным любому, то это равносильно $||$ .

***Свойства векторного произведения.***

**1.** $\times = -\times$ ,

**2.** $(\lambda)\times = \lambda(\times)$,

**3.** $\times(+) = \times + \times$.

Геометрическое доказательство этих свойств можно найти в учебнике. Мы же докажем их после того, как получим формулу для вычисления векторного произведения в декартовых координатах.

## §11. *Формулы для вычисления скалярного и векторного произведений в декартовых координатах.*

Пусть в пространстве задана декартова СК, **i**, **j**, **k** – базисные орты. Пусть $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$. В соответствии со свойствами скалярного произведения мы можем при скалярном умножении векторов раскрывать скобки, как при умножении чисел. Поэтому

$$\cdot=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})=a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_1b_2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_1b_3\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+$$

$$+a_2b_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_2b_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_2b_3\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+a_3b_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_3b_2\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Нам известно, что **i**, **j**, **k** – единичные и взаимно ортогональные $\Rightarrow$ $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=$ $=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$, и это же верно для произведений в другом порядке. Поэтому

$$\cdot=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,. \tag{7}$$

$$\Rightarrow\ ^2=\ \cdot=a_1^2+a_2^2+a_3^2 \tag{8}$$

$$\Rightarrow\ |\,|=\ = \tag{9}$$

$$\Rightarrow\ \cos\angle(\,,\,)=\ =\ . \tag{10}$$

Если $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ $\Rightarrow$

$$|\,|=\,. \tag{11}$$

Обозначим $\rho(A,B)$ – расстояние между точками $A$ и $B$. Тогда $\rho(A,B)$ вычисляется по той же формуле (11). Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

**1.** $\rho(A,B)=\rho(B,A)$;

**2.** $\rho(A,B)+\rho(B,C)\geq\rho(A,C)$ (неравенство треугольника);

**3.** $\rho(A,B)\geq 0$, и $\rho(A,B)=0\ \Leftrightarrow\ A=B$.

В дальнейшем нам понадобится понятие определителя и его свойства. Этот материал входит в курс высшей алгебры, но изучается, как правило, позже, чем векторное произведение. Поэтому необходимые сведения об определителях 2 и 3 порядка приведены в Приложении к данному курсу лекций. Рекомендуется почитать Приложение, прежде чем продолжить изучение текущего параграфа.

***Теорема* 5.** *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в декартовой СК:* $(a_1,a_2,a_3)$ *и* $(b_1,b_2,b_3)$, *вычисляется по формуле*:

$$\times=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{k}\ . \qquad (12)$$

***Доказательство.*** Обозначим  – это вектор, который вычисляется по этой формуле. Мы докажем, что он удовлетворяет всем условиям в определении векторного произведения.

**1.** С одной стороны

$$|\ |^2 = (a_2b_1 - a_3b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \quad (*)\ ,$$

А с другой стороны

$$(|\ |\,|\ |\sin\angle(\ ,\ ))^2 = |\ |^2|\ |^2\sin^2\angle(\ ,\ ) = |\ |^2|\ |^2(1-\cos^2\angle(\ ,\ )) =$$
$$= |\ |^2|\ |^2 - |\ |^2|\ |^2\cos^2\angle(\ ,\ ) = |\ |^2|\ |^2 - (\ \cdot\ )^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\ ) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

(**)

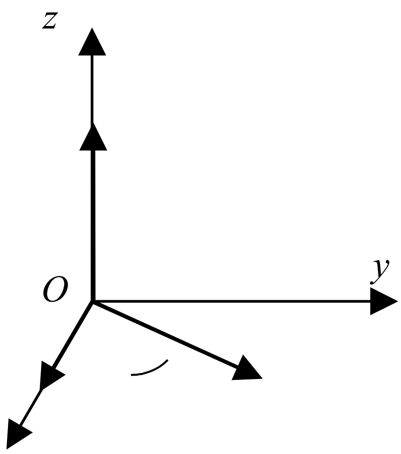
Самостоятельно раскройте скобки в (*) и (**), и убедитесь, что эти выражения совпадают.

**2.**
$$\cdot = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

так как в определителе есть две одинаковые строки. Значит $\perp$. Ана-логично доказывается, что $\perp$.

**3.** Если $||$ , то строки в определителе пропорциональны и наша формула дает нулевой вектор. Пусть  и  неколлинеарны. Выберем СК таким образом, чтобы $Ox\uparrow\uparrow$, а $Oy$ лежала в одной плоскости с  и , причем положительное ее направление указывало в ту же полуплоскость, что и . Ось $Oz$ после этого определяется




однозначно. Тогда $(a_1, 0, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$, причем, $a_1 > 0$, $b_2 > 0$. Согласно формуле (12) получаем $= a_1b_2\mathbf{k}$, причем, $a_1b_2 > 0$. Значит $\uparrow\uparrow Oz$, и из чертежа видим, что тройка ( , , ) – правая.

Итак, вектор, который вычисляется по нашей формуле удовлетворяет всем пунктам в определении векторного произведения ■

***Следствие* 1.** $\times = -\times.$

Действительно, по свойству определителя, при перестановке двух строк изменяется знак:

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\times. \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 2.** $(\lambda)\times = \lambda(\times).$

Действительно, по свойству определителя, общий множитель элементов одной строки выносится за знак определителя:

$$(\lambda)\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda a_1 & {}^{\lambda}a_2 & {}^{\lambda}a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \lambda(\times) \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 3.** $\times(+) = \times + \times.$

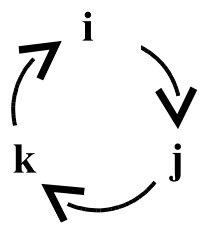
Действительно, по свойствам определителя

$$\times(+) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \times + \times. \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 4.** $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$.

Докажите это самостоятельно с помощью формулы (12).

Все эти равенства удобно запоминать с помощью диаграммы. Произведение двух ортов взятых подряд по кругу дает третий орт, а в обратном направлении – третий со знаком «–».

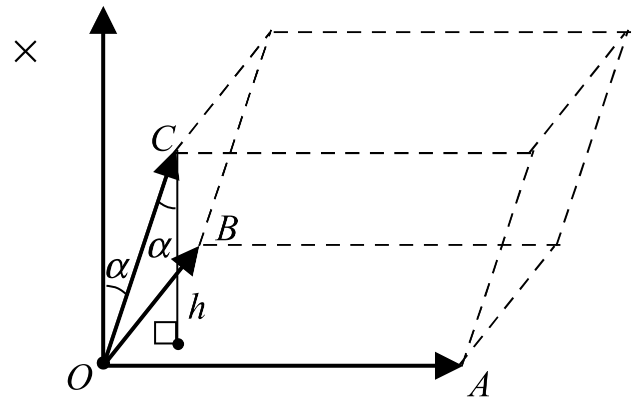


## §12. *Смешанное произведение векторов.*

***Определение.*** *Смешанным произведением трех векторов* , , называется число $(\times)\cdot$. Оно обозначается $\cdot\cdot$, или $(,,)$.

***Теорема 6.*** *Модуль смешанного произведения трех векторов , , численно равен объему параллелепипеда построенного на направленных отрезках , , , представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

***Доказательство.*** Пусть $h$ – высота, опущенная из точки $C$ на основание, которым служит параллелограмм, построенный на направленных отрезках и . Пусть $\alpha$ – угол между $h$ и стороной $OC$. Тогда



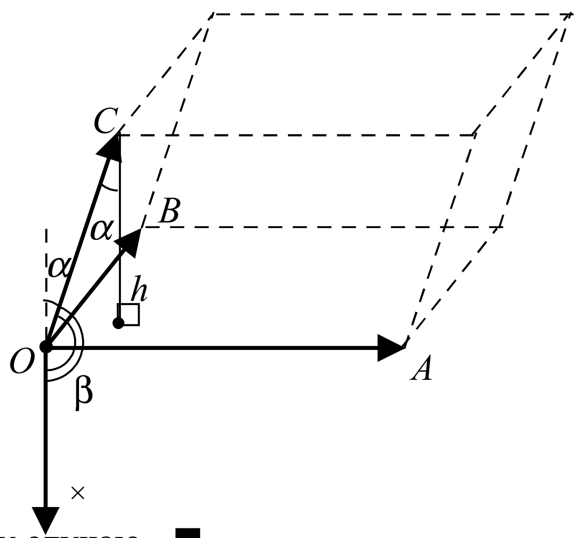

$$h = |OC|\cos\alpha,\ S_{осн} = |\times|.$$

Пусть $\beta = \angle(\times, )$.

<u>*1 случай*</u>. Тройка $(,,)$ правая. Тогда $\beta = \alpha$. Поэтому

$$V = S_{осн}\cdot h = |\times|\,|OC|\cos\alpha =$$
$$= |\times|\,|\,|\cos\angle(\times, ) =$$
$$= (\times)\cdot .$$

<u>*2 случай*</u>. Тройка $(,,)$ левая. Тогда $\beta = \pi - \alpha$ и $\cos\alpha = -\cos\beta \Rightarrow$




$$V = |\times|\,|OC|\cos\alpha =$$
$$= -|\times|\,|\,|\cos\angle(\times, ) =$$
$$= -(\times)\cdot.$$

Но объем всегда неотрицателен. Поэтому в этом случае $(\times)\cdot \le 0$, и мы имеем

$$V = |(\times)\cdot|.$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

***Следствие.*** **1.** , , компланарны $\Leftrightarrow$ $=0$;

**2.** тройка $(,,)$ правая $\Leftrightarrow$ $>0$;

**3.** тройка $(,,)$ левая $\Leftrightarrow$ $<0$.

Действительно, объем параллелепипеда равен нулю $\Leftrightarrow$ векторы , , компланарны. Если же они образуют левую тройку, то мы уже доказали, что $\le 0$, а так как они в этом случае некомпланарны, то

■

неравенство будет строгим. Аналогично, если тройка $(\,,\,,\,)$ правая, то $\geq 0$ и , , некомпланарны; поэтому неравенство будет строгим.

***Свойства смешанного произведения***.

**1.** *Смешанное произведение не зависит от группировки сомножителей*: $(\times)\cdot = \cdot(\times)$;

**2.** *Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей*: $= =$ .

**3.** *При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак*: $=- \;=- \;=-$ .

**4.** $(\lambda) = (\lambda) = (\lambda) = \lambda(\ )$.

**5.** $(+) = +$ .

***Доказательство.*** **1.** Используя свойства определителя получаем

$$(\times)\cdot = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)\cdot(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}) =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right) = \cdot(\times) .$$

Именно это свойство позволяет использовать обозначение без расстановки скобок. Попутно мы доказали формулу

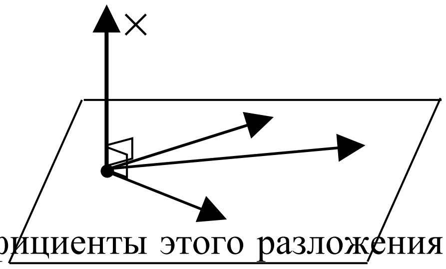
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Все остальные свойства смешанного произведения вытекают из аналогичных свойств определителя. ■

## §13. *Двойное векторное произведение.*

***Определение.*** Двойным векторным трех векторов , ,
называется *вектор* $(\times)\times$.

Обозначим $=(\times)\times$. Если $||$ , то $\times= \Rightarrow =$ . Пусть теперь и неколлинеарны. Согласно определению, векторное произведение перпендикулярно сомножителям




Поэтому $\perp\times,\ \perp\times,\ \perp\times$.
Значит вектор компланарен и . и мы можем разложить через и :

$$=\lambda+\mu. \qquad (*)$$

(это верно и в случае $=$ ). Вычислим коэффициенты этого разложения. По определению векторного произведения $\perp \Leftrightarrow \cdot=0$. Домножим обе части равенства $(*)$ скалярно на вектор :

$$0=\lambda(\cdot)+\mu(\cdot).$$

Очевидно, что уравнение $\lambda x+\mu y=0$ относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$ имеет общее решение $(-ky, kx), k\in\mathbf{R}$. Таким образом

$$(\times)\times=-k(\cdot)+k(\cdot).$$

Для того, чтобы вычислить неизвестный координат $k$, мы вычислим обе части равенства в специально выбранной декартовой СК. Направим ось $Ox\uparrow\uparrow$ , а $Oy$ так, чтобы был параллелен плоскости $Oxy$. Тогда $(a_1,0,0)$, $(b_1,b_2,0)$, $(c_1,c_2,c_3)$. Находим:

$$\times=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & 0 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=a_1b_2\mathbf{k},$$

$$(\times)\times=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & a_1b_2\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_2\mathbf{j}. \quad (**)$$

$$\cdot=a_1c_1, \qquad \cdot=b_1c_1+b_2c_2,$$

$$(\cdot)=(b_1c_1+b_2c_2)a_1\mathbf{i},\ \ (\cdot)=a_1c_1(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}).$$

$$-k(\cdot)+k(\cdot)=k(-a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_2\mathbf{j}).$$

Сравнивая последнее равенство с $(**)$ получаем $k=1$. Итак,

$$(\times)\times=-(\cdot)+(\cdot) \quad\Rightarrow$$

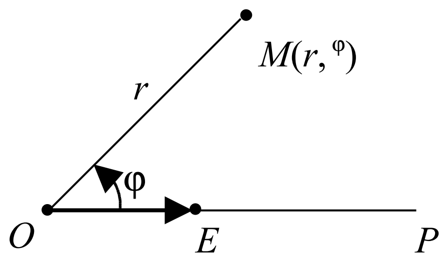
$$\times(\times)=-(\times)\times=(\cdot)-(\cdot). \qquad (23)$$

Именно в таком виде формулу для вычисления двойного векторного произведения и запоминают. Для этого есть у нее название «бац минус цаб».

***Упражнение.*** Самостоятельно проверьте с помощью этой формулы тождество Якоби:

$$(\times)\times + (\times)\times + (\times)\times \equiv .$$

## §14. *Полярная система координат на плоскости.*



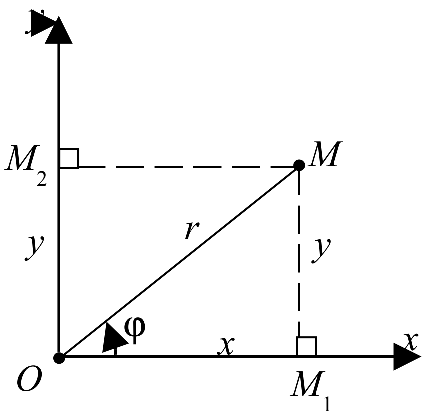

Выберем на плоскости произвольные точку $O$ и ось $OP$, которая задается единичным направленным отрезком . Пусть $M$ – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, $\varphi = \angle(, )$ – ориентированный угол. Тогда пара $(r, \varphi)$ называется *полярными координатами точки* $M$.

Точка $O$ называется *полюсом*, а $OP$ – *полярной осью*. Совокупность точки $O$ и оси $OP$ называется *полярной системой координат на плоскости*.

Очевидно, что $0 \le r < +\infty$, а для угла $\varphi$ обычно договариваются, что $0 \le \varphi < 2\pi$, либо, что $-\pi < \varphi \le \pi$. При этом, если $r = 0$, то считается $\varphi$ неопределенным.

Найдем связь между декартовыми и полярными координатами точки $M$. Выберем декартову СК так, чтобы точка $O$ была ее началом, а положительное направление оси $Ox$ совпадало с направлением оси $OP$. Пусть $M_1$ и $M_2$ – проекции точки $M$ на координатные оси $Ox$ и $Oy$ соответственно. Тогда из $\Delta OMM_1$ и $\Delta OMM_2$ получаем

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} r = , \\ \varphi = \operatorname{arctg} . \end{cases} \quad (14')$$



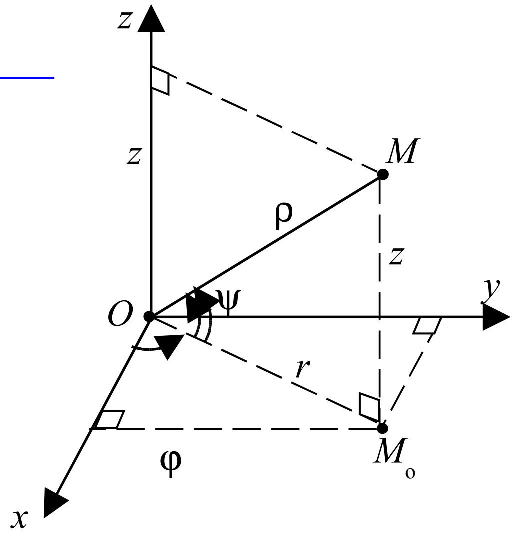

Но последнее равенство верно только для нашего чертежа, когда $x > 0$. Вообще, знание синуса, косинуса, или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол $\varphi$. Его следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi = x/r, \ \sin\varphi = y/r,$$

либо так: $\varphi = \arccos$, если $y \geq 0$; $\varphi = -\arccos$, если $y < 0$ (предполагается, что $-\pi < \varphi \leq \pi$). Использование арктангенса неудобно: надо оговаривать еще случай $x = 0$ и поэтому приходится писать 4 равенства.

## §15. *Сферическая и цилиндрическая системы координат в пространстве.*

Пусть в пространстве задана декартова СК $Oxyz$ и пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка. Опустим перпендикуляр $MM_o$ на плоскость $Oxy$. Тогда, очевидно, $|MM_o| = z$. Обозначим $\rho = |OM|$, $\psi = \angle M_oOM$; при этом, если $z > 0$, то считаем, что $\psi > 0$, а если $z < 0$, то $\psi < 0$. Пусть $(r, \varphi)$ – полярные координаты точки $M_o$ на плоскости. Тогда тройка $(r, \varphi, \psi)$ называется *сферическими координатами точки* $M$, а тройка $(r, \varphi, z)$ – ее *цилиндрическими координатами*. Очевидно, что $0 \leq \rho < +\infty$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$. Если $\psi = \pm \pi/2$, то точка $M$ лежит на оси $Oz$, $M_o = O$ и тогда $\varphi$ считается неопределенным.




Найдем формулы, которые связывают декартовы, сферические и цилиндрические координаты точки $M$. Из $\Delta OMM_o$ находим, что

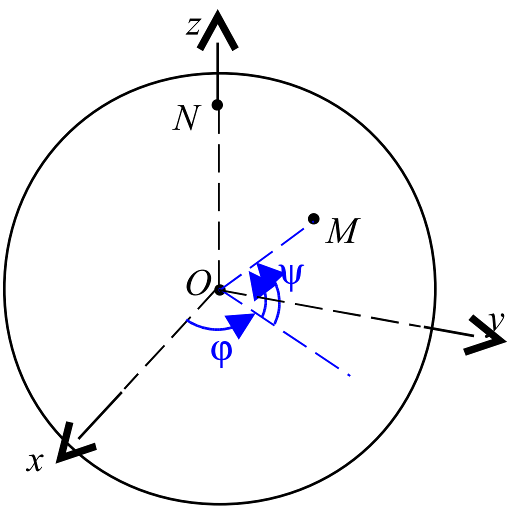
$$\begin{cases} r = \rho \cdot \cos\psi, \\ z = \rho \cdot \sin\psi. \end{cases} \quad (15) \qquad \begin{cases} \rho = , \\ \psi = \arcsin \end{cases} \quad (15')$$

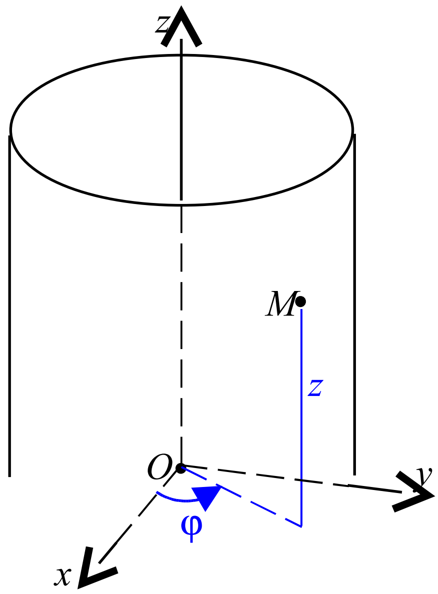
Эти формулы можно рассматривать, как переход от сферических координат к цилиндрическим и обратно; а $\varphi$ у этих систем координат общее. Формулы (14) и (14′) можно рассматривать, как переход от цилиндрических координат к декартовым, и обратно. Подставляя (15) в (14) получаем формулы перехода от сферических координат к декартовым, а подставляя (14′) в (15′) получаем формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cdot \cos\psi, \\ y = \rho \sin\varphi \cdot \cos\psi, \\ z = \rho \cdot \sin\psi. \end{cases} \quad (16) \qquad \begin{cases} \rho = , \\ \varphi = \pm\arccos, \\ \psi = \arcsin(z/\rho). \end{cases} \quad (16')$$

Во второй формуле из (16′) знак выбирается в соответствии со знаком $y$.

Сферические координаты можно использовать для введения внутренних координат на сфере. Если начало координат поместить в центр сферы радиуса $\rho$, то $\varphi$ и $\psi$ будут играть роль географических долготы и широты точки $M$, лежащей на сфере; пишем $M(\varphi, \psi)$. Точно также цилиндрические координаты позволяют ввести внутренние координаты на поверхности цилиндра. Если начало координат разместить на оси цилиндра радиуса $r$, то $\varphi$ и $z$ будут координатами точки $M$, лежащей на поверхности цилиндра; пишем $M(\varphi, z)$.




! Ни в коем случае не следует путать сферические и цилиндрические координаты в пространстве с внутренними координатами на сфере и цилиндрической поверхности. Очень распространена на экзамене ошибка, когда вместо первого рисунка в этом параграфе рисуют второй и третий.

## §16. *Преобразование координат.*

Пусть на плоскости заданы две декартовы системы координат $Oxy$ и $O'x'y'$, у которых направления координатных осей совпадают, но начальные точки $O$ и $O'$ разные. Говорим, что *вторая СК получена из первой переносом начала координат в точку* $O'$.

Пусть нам известны координаты точки $O'$ относительно первой СК: $O'(a, b)$. Пусть $M$ – произвольная точка на плоскости, $(x, y)$ – ее координаты относительно первой СК, $(x', y')$ – относительно второй СК. Найдем связь между этими координатами.

По определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Поэтому

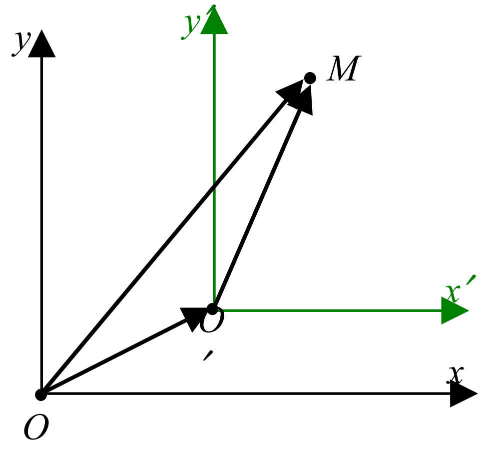
$(a,b)$, $(x,y)$, $(x',y')$.

По правилу треугольника сложения векторов

$$= + .$$

Отсюда

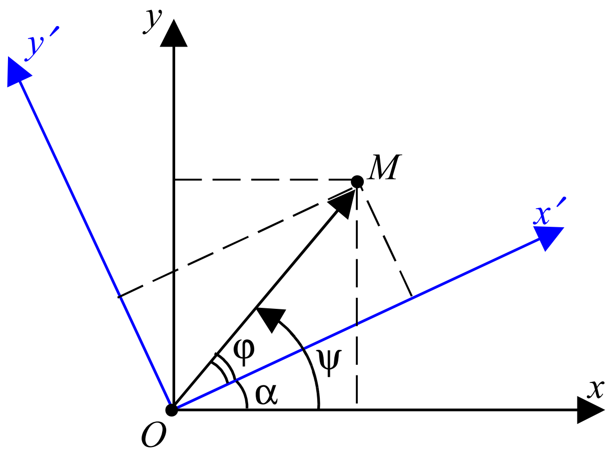
$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} (17) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} (17')$$




Аналогично, если в пространстве мы совершим перенос начала координат в точку $O'(a, b, c)$, то к формулам (17) и (17$'$) только добавятся равенства $z' = z + c$ и $z = z' + c$.

Заметим, что все наши рассуждения справедливы и в случае переноса начала произвольной аффинной СК.

Пусть теперь на плоскости заданы две декартовы СК с общим началом: $Oxy$ и $Ox'y'$. Пусть $\alpha$ – ориентированный угол между положительными направлениями осей $Ox$ и $Ox'$. Тогда говорим, что *вторая СК получена из первой поворотом на угол* $\alpha$. Пусть $M$ – произвольная точка на плоскости, $(x, y)$ – ее координаты относительно первой СК, $(x',y')$ – относительно второй СК.




Найдем связь между этими координатами. Пусть $\varphi$ – ориентированный угол между положительным направлением оси $Ox$ и вектором , а $\psi$ – между $Ox'$ и . Тогда $\varphi = \psi + \alpha$. Обозначим $r = |OM|$. Тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = r\cos\psi, \\ y' = r\sin\psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\cos\alpha - r\sin\psi\cdot\sin\alpha = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = r\sin(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\sin\alpha + r\sin\psi\cdot\cos\alpha = y'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

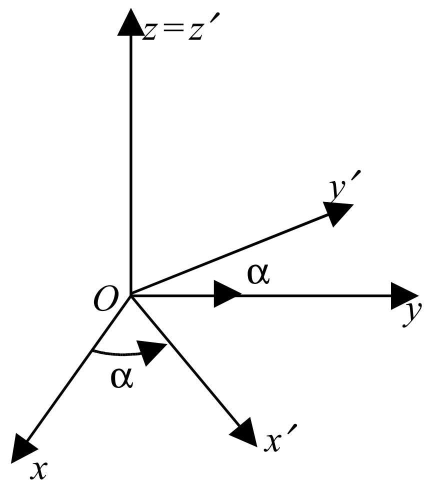
Итак,

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \end{cases} \qquad (18)$$

$$y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha.$$

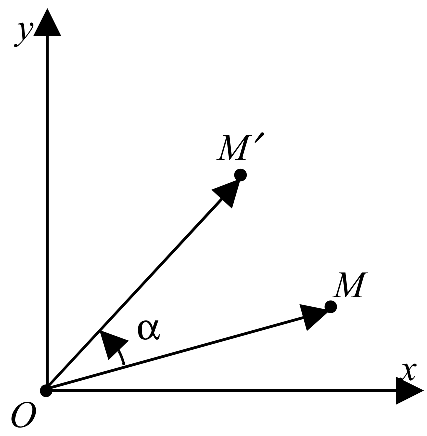
Поскольку вторая СК может быть получена из первой поворотом на угол $-\alpha$, то с учетом $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ , из (18) получаем

$$\begin{cases} x' = \ \ x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{18'}$$



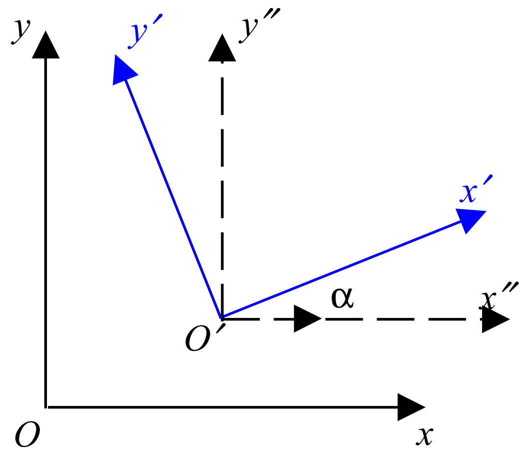

Если в пространстве совершается поворот СК вокруг оси $Oz$, то координата $z$ точки $M$ не изменится, а $x$ и $y$ будут изменяться по тем же формулам (18) и (18′). Самостоятельно выпишите формулы преобразования координат при повороте СК в пространстве вокруг $Ox$ и $Oy$.

Важно не путать поворот СК с поворотом плоскости. Пусть точ-ка $M'(x', y')$ получается из точки $M(x, y)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\alpha$. Для того, чтобы найти, как выражаются $(x', y')$ через $(x, y)$ мы представим ситуацию так: точка $M$ остается на месте, а СК поворачивается в обратном направлении, т.е. на угол $-\alpha$. Поэтому имеем формулы




$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha, \\ y' = y\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{19}$$

Допустим, теперь на плоскости заданы две совершенно произвольные декартовы СК $Oxy$ и $O'x'y'$. Тогда вторую СК можно получить из первой в результате двух преобразований: сначала мы совершаем перенос начала координат в точку $O'$ (получим промежуточную СК $O'x''y''$), а затем – поворот координатных осей. Тогда



$$\begin{cases} x'' = x - a, \\ y'' = y - b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'' + a, \\ y = y'' + b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \ x''\cdot\cos\alpha + y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y'' = y'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставляя $x''$ и $y''$ из первой системы в третью, получаем, что

$$\begin{cases} x' = \ (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

***Упражнение.*** Самостоятельно выпишите формулы, по которым $(x, y)$ выражаются через $(x', y')$.

## §17. *Общее преобразование координат в пространстве.*

Пусть в пространстве заданы две совершенно произвольные аффинные системы координат с общим началом, $\mathcal{R} = \{O, \ , \ , \}$ и $\mathcal{R}' = \{O, \ , \ , \ \}$ – реперы, с помощью которых они определяются. Пусть – произвольный вектор, $(x_1, x_2, x_3)$ – его координаты в первой СК, $( \ , x_2' \ \ , x_3' \ )$ – во второй. Будем называть $(x_1, x_2, x_3)$ старыми координатами вектора , а $( \ , x_2' \ , x_3' \ )$ – новыми его координатами.

Найдем связь между этими координатами. Пусть нам известно разложение базисных векторов второго базиса $\mathcal{B}' = \{ \ , \ , \ \}$ по первому базису $\mathcal{B} = \{ \ , \ , \ \}$ :

$$\begin{cases} \quad = c_{11} + c_{21} + c_{31} \ , \\ = c_{12} + c_{22} + c_{32} \ , \\ \quad = c_{13} + c_{23} + c_{33} \ . \end{cases} \tag{20}$$

Составим из коэффициентов этого разложения матрицу, выписывая коэффициенты разложения из каждой строки в столбец с тем же номером:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется <u>*матрицей перехода от первого базиса ко второму*</u>. Имеем:

$$\begin{aligned} &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &= x_1' \quad + x_2' \quad + x_3' \quad . \end{aligned} \tag{$*$}$$

Подставим в последнее равенство выражения (20):

$$= x_1' \quad (c_{11} + c_{21} + c_{31}) + x_2' \quad (c_{12} + c_{22} + c_{32}) + x_3' \quad (c_{13} + c_{23} + c_{33}).$$

Раскроем скобки и сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах:

$$= (c_{11}x_1' \quad + c_{12}x_2' \quad + c_{13}x_3' \quad ) + (c_{21} + c_{22}x_2' \quad + c_{23}x_3' \quad ) + (c_{31} + c_{32}x_2' \quad + c_{33}x_3' \quad ) \ .$$

Сравниваем с (∗), и в силу единственности разложения вектора по базису, получаем

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' \quad + c_{12}x_2' \quad + c_{13}x_3' \quad , \\ x_2 = c_{21} + c_{22}x_2' \quad + c_{23}x_3' \quad , \\ x_3 = c_{31} + c_{32}x_2' \quad + c_{33}x_3' \quad . \end{cases} \tag{21}$$

Если использовать столбцы, составленные из координат

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

То систему (21) можно переписать в виде одного матричного равенства:

$$X = CX' \qquad (21')$$

$$\Rightarrow \quad X' = C^{-1}X, \qquad (22)$$

т.е. для того, чтобы найти новые координаты вектора по старым, необходимо выписать формулы, аналогичные (21), только в качестве коэффициентов будут использованы элементы матрицы $C^{-1}$, а штрихи у координат будут стоять в левых частях равенств. Можно решить систему уравнений (21) относительно неизвестных $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и мы получим те же формулы.

К сожалению, не всегда к моменту изучения этого параграфа студенты успевают пройти по алгебре произведение матриц и обратную матрицу. Но ко времени экзамена этот материал обязательно должен быть пройден. Необходимые пояснения будут даны на практических занятиях по геометрии.

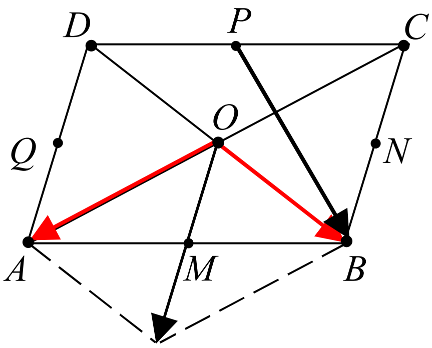
Координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, поэтому они пересчитываются по тем же формулам (21′) и (22). Заметим, что все рассуждения, приведенные при выводе формул (17) и (17′) верны и для произвольной аффинной СК. Поэтому в случае переноса начала координат в точку $O'(a, b, c)$ координаты точки пересчитываются по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + a, \\ x_2 = x_2' + b, \\ x_3 = x_3' + c. \end{cases} \quad (22) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - a, \\ x_2' = x_2 - b, \\ x_3' = x_3 - c. \end{cases} \quad (22')$$

Все сказанное выше верно и для преобразования аффинной СК на плоскости.

## §18. *Примеры решения задач.*

**1.** *ABCD – параллелограмм, O – его центр, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Векторы = и = выбраны в качестве базисных. Найти координаты вектора в базисе {, }.*




***Решение.*** По правилу треугольника = + ; = , а по правилу параллелограмма сложения векторов = + = + . Поэтому = (+ ) + = + . Значит, .

***Ответ:*** .

**2.** *Даны координаты векторов* (17, 0) *и* (–1, 1) *в ортонормированном базисе. Найти такое* λ, *при котором вектор* = +λ *имеет абсолютную величину* || = 25 (*если решений два, то достаточно взять одно из них*). *Найти единичный вектор, коллинеарный* .

***Решение.*** Вектор = +λ· имеет координаты (17 – λ, 0 + λ). Находим его длину и приравниваем ее к 25. Получаем квадратное уравнение относительно неизвестного λ**:**

$$(17 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 625,$$

$$2\lambda^2 - 34\lambda + 289 = 625 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda^2 - 34\lambda - 336 = 0, \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 17\lambda - 168 = 0.$$

Решая его, находим $\lambda_1 = -7$; $\lambda_2 = 24$. Поскольку по условию достаточно найти только одно решение, ограничиваемся $\lambda_1 = -7$. Тогда находим координаты вектора (24, 7). И, чтобы получить единичный вектор ||| , мы делим координаты вектора на длину этого вектора, т.е. на 25: .

***Ответ:*** $\lambda_1 = -7$, .

**3.** *Даны координаты вектора* (–2, –2) *в декартовой системе координат. Вычислить координаты вектора , полученного из поворотом:* а) *на угол* $\alpha = 120^{\circ}$, б) *на угол* $\beta = 90^{\circ}$. *Пусть = . Вычислить полярные координаты точки* $A$ *, если полярная ось совпадает с* $Ox$.

***Решение.*** Координаты вектора $(x', y')$, полученного из вектора $(x, y)$ поворотом на угол $\alpha$, вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha, \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

(Не путать с формулами, по которым изменяются координаты данного вектора при повороте координатных осей!)

а) В нашем случае имеем $\cos\alpha = -$ , $\sin\alpha =$ .

$$\begin{cases} x' = -(-2) + 2 \cdot \ = 2, \\ y' = -2 \cdot \ - 2 \cdot (- \ ) = -2 . \end{cases}$$

б) Имеем $\sin 90^{\circ} = 1$; $\cos 90^{\circ} = 0$ и по тем же формулам находим (2,–2).

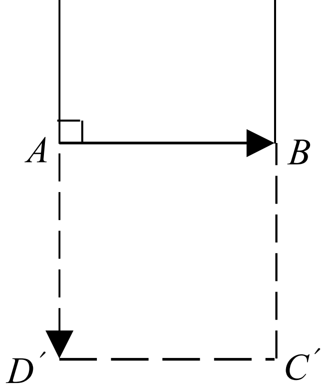
Если известны декартовы координаты точки $A(x, y)$, то ее полярные координаты $(r, \varphi)$ находятся по формулам:

$$\begin{cases} r = \ , \\ \cos\varphi = \ , \ \sin\varphi = \ . \end{cases}$$

Декартовы координаты точки $A$ совпадают с координатами ее радиус-вектора . Поэтому $A(-2,-2)$. Отсюда находим $r = 4$; $\cos\varphi = -$ ; $\sin\varphi = -$ . Значит $\varphi =$ . $A(4, )$.

***Ответ***: а) (2,–2); б) (2,–2); $A(4, )$.

**4.** *Даны координаты двух вершин* $A(3,-2)$, $B(8, 5)$ *квадрата* $ABCD$. *Найти координаты двух других вершин.*




***Решение.*** Находим (5, 7). Вектор может быть получен из поворотом на $90^{\circ}$, либо на $-90^{\circ}$. Таким образом, задача имеет два решения.

Так же, как и в предыдущей задаче находим, что (–7, 5), либо (7,–5). Для того, чтобы найти координаты точки $D$ надо к координатам точки $A$ прибавить координаты вектора : $D(-4, 3)$. Далее используем, что = и находим координаты $C(1, 10)$. Второй ответ ищется аналогично.

***Ответ***: $C(1, 10)$, $D(-4, 3)$, $C'(15, 0)$, $D'(10,-8)$.

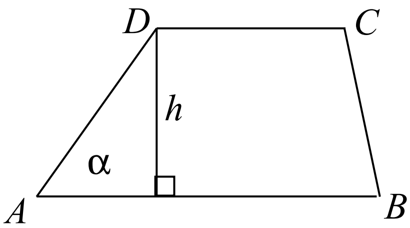
**5.** *Вершины четырехугольника находятся в точках* $A(1, 2)$, $B(7,-6)$, $C(11,-3)$, $D(8, 1)$. *Показать, что ABCD – трапеция. Найти длины оснований трапеции, ее площадь и* $\cos\angle DAB$.

***Решение.*** Находим координаты векторов (6,–8), (4, 3), (–3, 4), (7,–1). Проверяем векторы, определяемые противоположными сторонами четырехугольника на коллинеарность:

$- = -$ – верно, значит коллинеарен .

$=$ – неверно, значит неколлинеарен .

Таким образом, в четырехугольнике две противоположные стороны коллинеарны, а две – нет. Значит это – трапеция, и основаниями являются $AB$ и $CD$. Находим длины сторон:




| | = = 10,

и аналогично | | = 5; | | = 5; | | = 5 .

Обозначим $\alpha = \angle BAD$.

$\cos\alpha =$ = = ,

следовательно $\angle BAD = 45^\circ$. Не во всех вариантах может получиться табличный угол, поэтому далее действуем так: зная $\cos\alpha$, находим

$\sin\alpha =$ = .

Тогда $h = |\ | \cdot \sin\alpha = 5$. Зная высоту и длины оснований находим площадь: $S = (AB + CD) \cdot h =$ .

***Ответ***: | | = 10, | | = 5, $\cos\alpha =$ , $S_{ABCD} =$ .

**6.** *Дано* | | = 10, | | = 3, $\alpha = \angle($ , $) = 30^\circ$. *Найти площадь треугольника, построенного на векторах* $= -3$ *и* $= 2 + 5$, *отложенных из одной точки. Найти длину медианы, исходящей из этой же точки.*

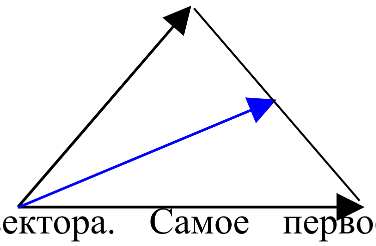
***Решение.*** Площадь параллелограмма построенного на векторах и , численно равна модулю их векторного произведения. Площадь треугольника, построенного на этих векторах равна половине площади параллелограмма: $S_\Delta = \ |\ \times\ |$. Пользуясь свойствами и определением векторного произведения находим

$$|\ \times\ | = |(\ -3\ ) \times (2\ +5\ )| = |\ \times\ +5\ \times\ -3\ \times\ -15\ \times\ | =$$

$$= |\ +5\ \times\ +3\ \times\ +15\ | = 8\,|\ \times\ | = 8\,|\ |\cdot|\ |\cdot\sin\alpha =$$

$$= 8\cdot 10\cdot 3\cdot\ = 120\ .$$

$$S_\Delta = \ |\ \times\ | = 60\ .$$



Если $AD$ – медиана $\Delta ABC$, то $=\ (\ +\ )$. В нашем случае, если – вектор, задающий медиану, то $=\ (\ +\ ) =\ +\ .$

Нам требуется найти длину этого вектора. Самое первое следствие из определения скалярного произведения: скалярный квадрат вектора $^2 = \ \cdot\ $ равен квадрату его длины $|\ |^2$. Имеем

$$|\ |^2 = \ \cdot\ = (\ +\ )\cdot(\ +\ ) = \ ^2 + 3\ \cdot\ + \ ^2 =$$

$$= \ |\ |^2 + 3\,|\ |\cdot|\ |\cdot\cos\alpha + |\ |^2 =$$

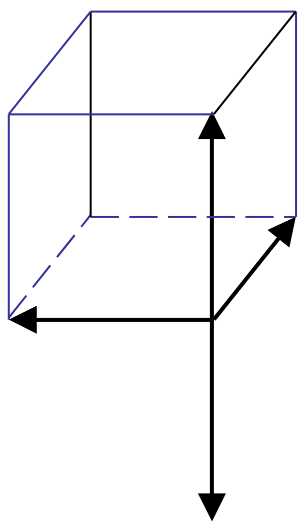
$$= \ \cdot 100 + 3\cdot 10\cdot 3\cdot\ + 9 = 234 + 45.$$

Значит, $|\ | = \ .$

***Ответ***: $S_\Delta = 60$, длина медианы равна .

Подчеркнем, что ни в коем случае нельзя использовать обозначение $^2$ вместо $\times$ ; $^2$ означает $\cdot$ . Особо обращаем внимание, что при решении использовалось свойство $\times\ = -\ \times\ .$

**7.** *Докажите, что векторы* $(10, 11, 2)$ *и* $(10, -10, 5)$ *отложенные из одной точки, можно взять в качестве ребер куба, и найдите третье ребро куба, исходящее из этой же точки.*



***Решение.*** Для того, чтобы векторы и могли служить ребрами куба, они должны быть друг другу перпендикулярны и иметь одинаковую длину. Проверяем:

$$\cdot\ = 10\cdot 11 + 11\cdot(-10) + 2\cdot 5 = 0 \Rightarrow\ \perp\ ,$$

$$|\ | = \ = 15,$$

$$|\ | = \ = 15.$$

Вектор , задающий третье ребро куба, должен быть перпендикулярен и и должен иметь одинаковую с ними длину. Согласно определению векторного произведения вектор $\times$ будет перпендикулярен и . Выясним, какую он будет иметь длину:

$$|\times| = |\,|\cdot|\,|\cdot\sin\angle(\,,\,) = 15\cdot 15\cdot\ \sin 90^{\circ} = 225.$$

Искомый вектор должен иметь длину 15. Следовательно, $=\ \times$. Находим

$$\times = \quad = 75\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 210\mathbf{k}\,,\ (5, -2, -14).$$

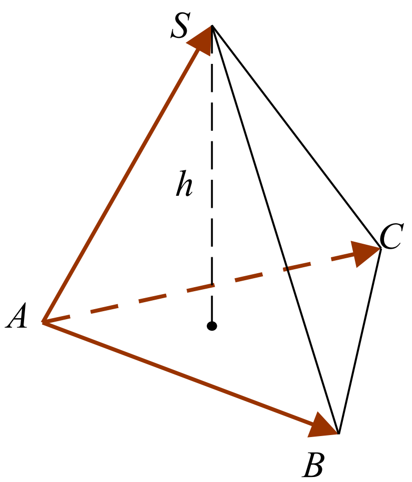
Очевидно, что вектор $= -$ тоже удовлетворяет условиям задачи.

***Ответ***: (5, –2,–14), (–5, 2,14).

**8.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды* $SABC$: $A(4,\ 0,\ 1)$, $B(5,-1,\ 1)$, $C(4,\ 7,-5)$, $S(7,\ 5,\ 2)$. *Найти объем пирамиды, площадь основания* $ABC$ *и высоту* (*с помощью векторного и смешанного произведений*). *Найти угол* $\angle BAC$. *Укажите, какой вектор перпендикулярен основанию. Изобразите данную пирамиду в декартовой системе координат.*

***Решение.*** Находим координаты трех векторов, лежащих на ребрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$(1,-1,0),\ (0,7,-6),\ (3,5,1).$$




Модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем же пирамиды составляет 1/6 от объема параллелепипеда: $V = |\,|$.

Смешанное произведение можно вычислить так:

$$=$$

Но, поскольку для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение $\times$, то намного проще воспользоваться определением смешанного произведения: $=(\times)\cdot$ . При этом, вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\times = \quad = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

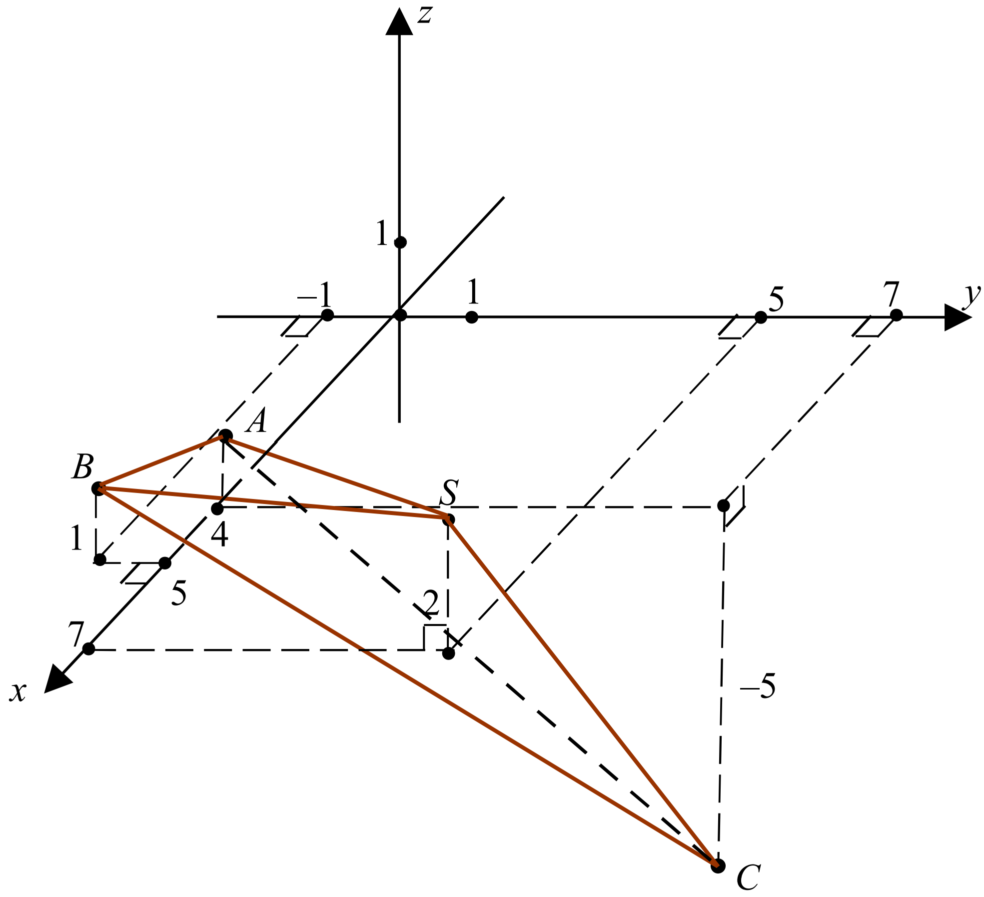
$$S_{\Delta ABC} = |\times| = \ = \ .$$

$$(\times)\cdot = 6\cdot 3 + 6\cdot 5 + 7\cdot 1 = 55. \qquad V = |(\times)\cdot| = \ .$$

С другой стороны, $V = \ S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда $h = \ = \ = 5$ .

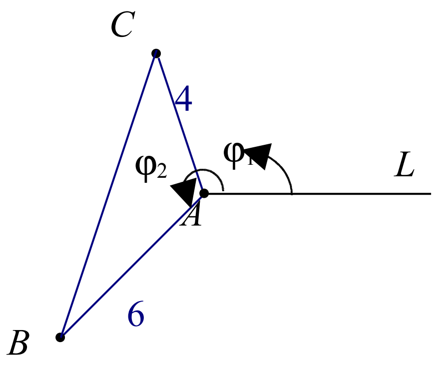
Согласно определению векторного произведения вектор $\times$ перпендикулярен и . Поэтому вектор $= \times$ будет перпендикулярен основанию пирамиды; (6, 6, 7). Угол $\angle BAC$ ищется так же, как и в задаче 5.

Построим изображение данной пирамиды в декартовой системе координат $Oxyz$.




***Ответ***: $V=\ \ , S_{\Delta ABC}=\ \ , h=5, (6, 6, 7)$.

**9.** *Вычислить площадь треугольника ABC, если вершина A находится в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты*: $B(6,\ \ )$, $C(4,\ \ )$. *Найти длину BC. Изобразить данный треугольник.*




***Решение.*** Нарисуем чертеж к задаче, построив точки $B$ и $C$ по их полярным координатам. Из чертежа и геометрического смысла полярных координат находим, что

$$\angle BAC=\varphi_1-\varphi_2=\ \ -\ \ =\ \ ,$$
$$AB=6,\ AC=4.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\ AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\ \ \cdot 6\cdot 4\cdot\sin\ \ =12\cdot\ \ =6.$$

По теореме косинусов

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-\ \ )=76.$$

***Ответ***: $S_{\Delta ABC}=6$ , $BC==2$.

**10.** *Новая декартова СК получена из старой переносом начала в точку* $O'(2,-1)$ *и поворотом на угол* $\alpha = \arccos$ .

а) *Выпишите формулы, выражающие новые координаты через старые. Найдите новые координаты точки A, если известны её старые координаты*: $A(6,2)$.

б) *Выпишите формулы, выражающие старые координаты через новые. Найдите старые координаты точки B, если известны её новые координаты*: $B(5,5)$.

***Решение.*** а) Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

где $(a,b)$ – координаты точки $O'$, $\alpha$ – угол поворота координатных осей. Зная $\cos\alpha$ находим $\sin\alpha$ и подставляем в формулы:

$$\begin{cases} x' = \ (x-2) + \ (y+1), \\ y' = - \ (x-2) + \ (y+1). \end{cases}$$

Для точки $A(6,2)_{Oxy}$ находим $x' = 5,\ y' = 0$. Значит $A(5,0)_{O'x'y'}$.

б) Старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + a, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha + b. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = x' - y' + 2, \\ y = x' + y' - 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты точки $B(5,5)_{O'x'y'}$ находим $B(3,6)_{Oxy}$.

***Ответ***: $A(5,0)_{O'x'y'}$, $B(3,6)_{Oxy}$.

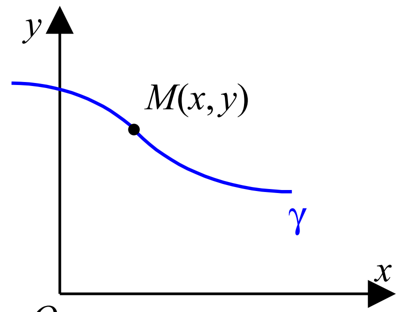
# ГЛАВА 2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

## §1. *Уравнение кривой и поверхности.*

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая на плоскости, а $\varphi(x,y)$ – функция двух переменных. Говорим, что уравнение

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (1)$$

есть *уравнение кривой $\gamma$ в неявном виде*, если координаты любой точки $M\in\gamma$ удовлетворяют (1), и обратно, каждая пара $(x,y)$ чисел, удовлетворяющих (1), задает точку $M(x,y)$ на кривой.

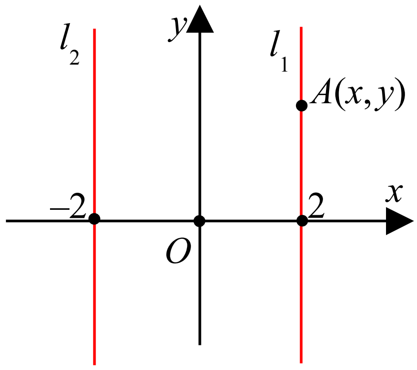



Подчеркнем, что при составлении уравнений следствие обязательно надо проверять в обе стороны.

***Пример* 1.** Уравнение

$$x^2-4=0 \qquad (*)$$

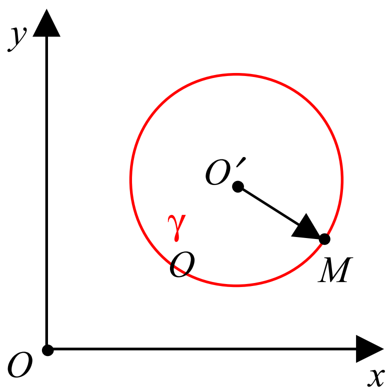
задает на плоскости пару прямых (см.чертеж). Координаты любой точки $A(x,y)\in l_1$ удовлетворяют (*), но нельзя сказать, что (*) есть уравнение $l_1$, поскольку есть еще точки, координаты которых удовлетворяют (*), но на $l_1$ эти точки не лежат.




С другой стороны, каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$x-2=0, \qquad (**)$$

лежит на фигуре $l_1\cup l_2$, но нельзя сказать что (**) задает эту фигуру, поскольку есть еще точки на $l_1\cup l_2$, координаты которых (**) не удовлетворяют.




***Пример* 2.** Составим уравнение окружности $\gamma$ радиуса $R$ с центром в точке $O'(a,\ b)$. Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка окружности $\gamma$. Тогда

$$R = |O'M| = \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2), то $|O'M| = R$, а значит, $M \in \gamma$. Таким образом (2) и есть уравнение нашей окружности.

Если из уравнения (1) удается выразить одну координату через другую, то получим *уравнение в явном виде*:

$$y = f(x), \qquad (3)$$

Не всегда удается привести неявное уравнение кривой к явному виду. В каком случае это возможно гласит *теорема о неявной функции*, изучаемая в курсе математического анализа. Например, с уравнением окружности это сделать нельзя.

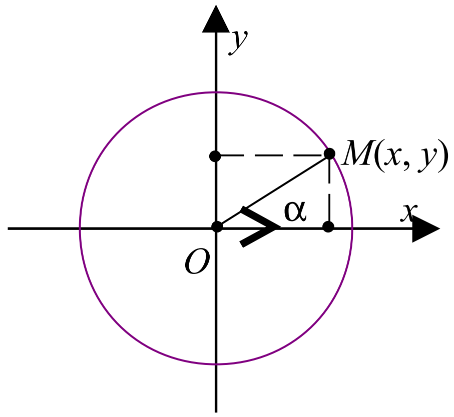
Предположим, что точка движется по кривой. Тогда ее координаты изменяются со временем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (4)$$

При этом параметр $t$ изменяется в определенных пределах: $t \in I$, где $I$ – интервал числовой прямой. Говорим, что (4) есть параметрические уравнения кривой $\gamma$, если точка $M(x, y)$ лежит на кривой $\gamma$ тогда и только тогда, когда найдется такое $t \in I$, что будут выполнены оба равенства (4) одновременно. При этом, обязательно к системе (4) надо добавлять интервал изменения параметра. Физический смысл параметра в (4) не всегда время.

***Пример* 2.** Параметрические уравнения окружности радиуса $R$ с центром в начале координат имеют вид:

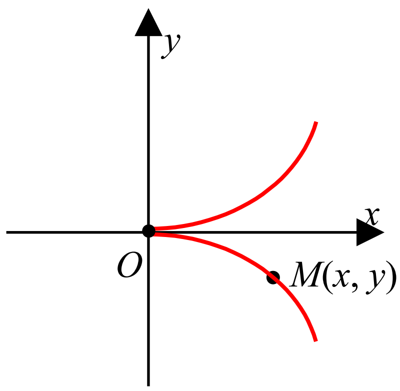
$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\alpha, \\ y = R \cdot \cos\alpha, \ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases} \qquad (5)$$




Не важно, что для одной и той же точки может найтись несколько (или даже бесконечно много) соответствующих ей значений параметра. Это не запрещается.

***Пример* 3.** Уравнения

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

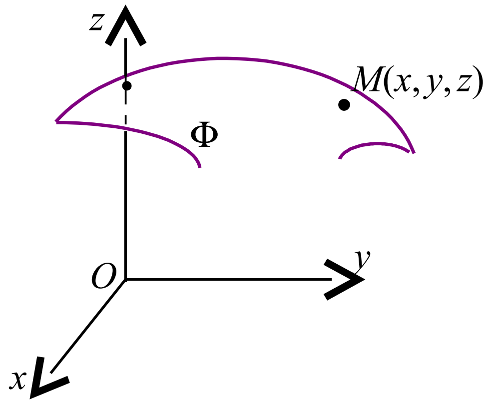



задают полукубическую параболу. Уравнения

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ \end{cases} \qquad (*_*{}^*)$$

$$y=e^{3t},\ t\in\mathbf{R}\ .$$

тоже задают полукубическую параболу, но не всю, а только ее верхнюю половину. Для точки $M$, лежащей ниже оси, $Ox$ не найдется такого $t$, для которого выполнено (*$_*$*).




***Определение.*** Пусть $\Phi$ – некоторая поверхность в пространстве, а $F(x,y,z)$ – функция от трех переменных. Говорим, что

$$F(x,y,z)=0 \qquad (6)$$

есть *уравнение поверхности $\Phi$ в неявном виде*, если координаты любой точки $M\in\Phi$ удовлетворяют (6), и обратно, каждая пара $(x, y)$ чисел, удовлетворяющих (6), задает точку $M(x,y,z)$ на поверхности.

Так же, как и для кривой, при составлении уравнения поверхности, необходимо проверять следствие в обе стороны.

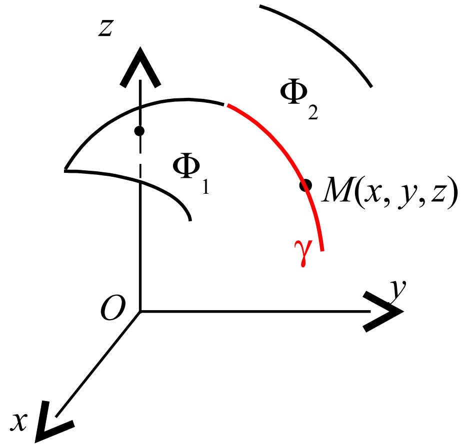
***Упражнение.*** Самостоятельно докажите, что сфера радиуса $R$ с центром в точке $O'(a,b,c)$ задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (7)$$

Если из уравнения (6) удается выразить одну переменную через две другие, то получим уравнение поверхности *в явном виде*: $z=f(x,\ y)$. Вопрос, когда это возможно сделать, изучается в курсе математического анализа. Уравнение сферы невозможно переписать в явном виде.

Кривая в пространстве одним уравнением, как правило, не задается. Бывают исключительные случаи, типа уравнения $x^2+y^2=0$, которое задает прямую – ось $Oz$. Кривая в пространстве обычно задается системой из двух уравнений

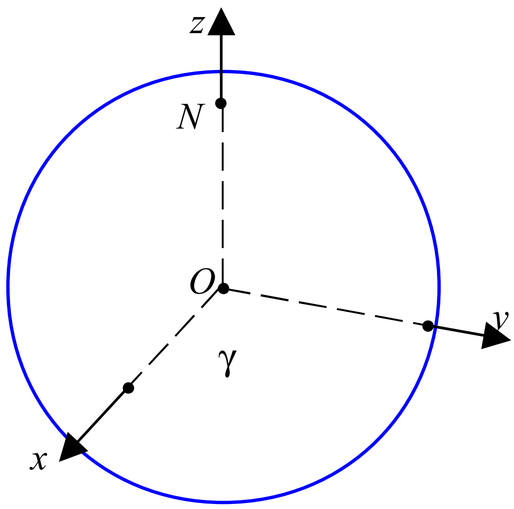
$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (8)$$




Каждое из уравнений в отдельности задает поверхность. Если координаты точки удовлетворяют системе, то она лежит на двух поверхностях одновременно, т.е. $M\in\Phi_1\cap\Phi_2$. Таким образом, система (8) задает линию пересечения двух поверхностей (хотя заметим, что не всегда это пересечение будет кривой). Аналогично, *если мы хотим найти точки* *пересечения любых двух множеств, заданных своими уравнениями, мы должны объединить данные уравнения в одну систему*.

***Пример* 4.** Система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2. \\ \mathrm{z}=0. \end{cases}$$




задает окружность в плоскости *Oxy*. Первое уравнение системы задает сферу с центром в начале координат, а второе – плоскость *Oxy*. Их пересечение есть окружность γ. Если подставить z = 0 в первое уравнение, то получим

$$x^2+y^2=R^2. \quad (*_{*}*_{*}\ )$$

Казалось бы, можно сказать, что это и есть уравнение окружности γ. Но это не так. Уравнение $(*_{*}*_{*}$ ) задает цилиндрическую поверхность (см. параграф «цилиндрические и конические поверхности»). Подставляя $z = 0$ в первое уравнение системы, нельзя отбрасывать при этом само уравнение $z=0$.

Также кривая в пространстве может быть задана параметрическими уравнениями вида

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ \mathrm{z}=\sigma(t), \quad t\in I, \end{cases}$$

где $I$ – интервал числовой прямой. С параметрическими уравнениями поверхности мы встретимся в разделе «Дифференциальная геометрия».

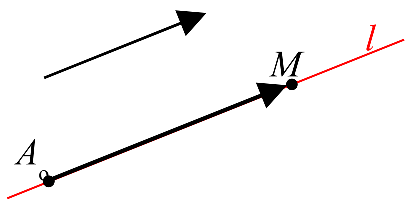
Обозначим – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ на кривой, т.е. вектор с координатами, составленными из неизвестных $(x, y, z)$, а – вектор с координатами $(\varphi(t), \psi(t), \sigma(t))$. Тогда параметрические уравнения кривой можно переписать в виде одного векторного уравнения

$$= \ , t\in I.$$

## §2. *Уравнение прямой на плоскости.*

Прямую $l$ на плоскости можно задать

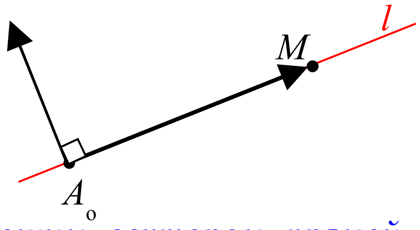
а) с помощью точки $A_o\in l$ и ненулевого вектора $||\ l$ ; тогда можем написать, что



$$l=\{M|\ ||\ \};\quad (*)$$

б) с помощью точки $A_o \in l$ и ненулевого вектора $\perp l$; тогда можем написать, что

$$l=\{M|\ \perp\};\ (**)$$




в) с помощью двух точек $A_o, A_1 \in l$.

Вектор $||\ l$ называется *направляющим вектором прямой*, а вектор $\perp l$ называется *вектором нормали к прямой*.

***Теорема* 1. 1.** *Прямая $l$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая направляющий вектор $(a_1, a_2)$, задается уравнением*

$$= \ , \qquad (9)$$

*которое называется* *каноническим уравнением прямой*, *или* *параметрическими уравнениями*:

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t\ , \\ y=y_o+a_2t\ ,\ t\in \mathbf{R}\ , \end{cases} \qquad (10)$$

*которые можно записать в векторном виде так*:

$$=+\ t,\ t\in \mathbf{R}\ , \qquad (10')$$

*где $=$ – радиус-вектор точки $A_o$.*

**2.** *Прямая, проходящая через две точки $A_o(x_o, y_o)$* и *$A_1(x_1, y_1)$, задается уравнением*

$$= \ , \qquad (11)$$

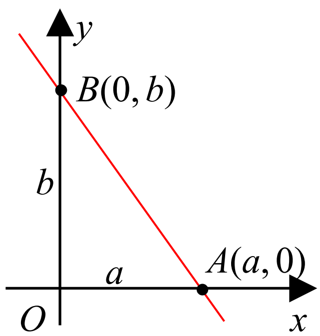
**3.** *Прямая, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая вектор нормали $(A, B)$, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0. \qquad (12)$$

**4.** *Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины $a\neq 0$, $b\neq 0$, задается уравнением*

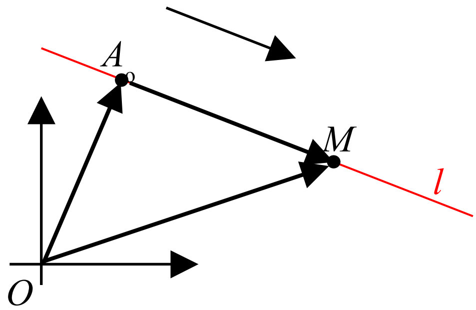
$$+\ =1\ , \qquad (13)$$

(*уравнение прямой в отрезках*).




Предполагается, что в пунктах 1, 2 и 4 СК является произвольной аффинной, а числа $a$ и $b$ в п°4 могут быть отрицательными. В уравнениях (10) и (10′) в дальнейшем писать $t\in \mathbf{R}$ не будем: это будет подразумеваться.

***Доказательство.*** **1.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x-x_0, y-y_0) \,||\, (a_1, a_2)$, а по второму признаку коллинеарности векторов (теор.1′ §7, гл.1) это равносильно (9).




Обратно, если для координат точки $M(x, y)$ выполнено (9), то по тому же признаку $||$ , а значит, $M\in l$ .

По первому признаку коллинеарности векторов $||$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $t\in \mathbf{R}$, такое что $= t$ . В координатах последнее равенство имеет вид

$$x - x_0 = t\,a_1,\ \ y - y_0 = t\,a_2,$$

Для того, чтобы получить уравнение (10) осталось перенести $x_0$ и $y_0$ в другую часть равенства.

**2.** Если прямая проходит через две точки $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$ , то вектор $(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой. Подставляя его координаты в (9) вместо $a_1, a_2$, получим (11).

**3.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x-x_0, y-y_0) \perp (A, B)$ $\Leftrightarrow$ $\cdot = 0$, а в координатах это условие как раз имеет вид (12). Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (12), то $\perp$ , а значит, $M\in l$ .

**4.** Условие означает, что прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Подставляя их координаты в (10), получим

$$= \quad \Leftrightarrow \quad = \quad \Leftrightarrow \ (13)\,.$$

■

**!** При ответе на экзамене недостаточно написать уравнение прямой: требуется обязательно указать, что означает каждый из параметров, входящих в уравнение. Например, выписав каноническое или параметрическое уравнение прямой, следует указать, что $(x_0,\ y_0)$ – это координаты точки, через которую проходит прямая, а $(a_1, a_2)$ – координаты направляющего вектора. Без данных пояснений ответ в виде выписанного уравнения расценивается, как отсутствие ответа.

***Следствие.*** *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax+By+C=0\ , \tag{14}$$

*которое называется общим уравнением прямой. И обратно, любое уравнение вида* (14) *на плоскости задает прямую.*

***Доказательство.*** Любую прямую на плоскости можно задать с помощью точки и вектора нормали. Тогда ее уравнение в декартовой СК будет иметь вид (12). Раскроем скобки:

$$Ax+By-Ax_o-By_o=0$$

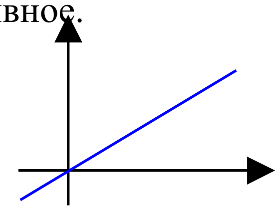
и обозначим $C=-Ax_o-By_o=\text{const}$ . Получим уравнение (14).

Обратно, пусть некоторое множество $l$ определяется уравнением (14), и $A_o(x_o,\ y_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (14): $Ax_o+By_o+C=0 \ \Rightarrow\ C=-Ax_o-By_o$. Подставляя это значение в (14) получим (12), а это уравнение, как уже известно, определяет прямую. ■

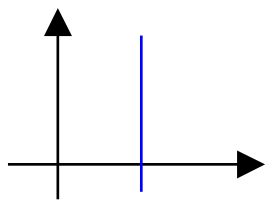
Попутно мы выяснили *геометрический смысл коэффициентов $A$ и $B$ в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой*: $(A,\ B)$. И этот факт чрезвычайно важен при исследовании положения прямой и при решении различных задач про прямую на плоскости. Но этот факт верен только в случае декартовой СК.

Если СК на плоскости не является декартовой, то это следствие можно доказать с помощью уравнения (9). В дальнейшем, СК предполагается декартовой, если не оговорено противное.

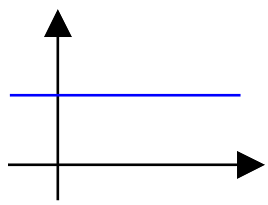
Рассмотрим различные частные случаи общего уравнения прямой.



1. $C=0 \ \Leftrightarrow\ l: Ax+By=0$. Тогда уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0,\ 0)$, т.е. прямая проходит через начало координат.



2. $A=0 \ \Leftrightarrow\ By+C=0 \ \Leftrightarrow\ y=-C/B$. Прямая $l\,||\,Ox$ .



3. $B=0 \ \Leftrightarrow\ Ax+C=0 \ \Leftrightarrow\ x=-C/A$. Прямая $l\,||\,Oy$ .

4. $B\neq 0$ . Тогда (14) можно переписать так: $y=-\ x-\ $ . Обозначим $k=-A/B$, $q=-C/B$, и получим уравнение

$$y = kx + q, \tag{15}$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. *Угловым* называется коэффициент $k$. Выясним почему.

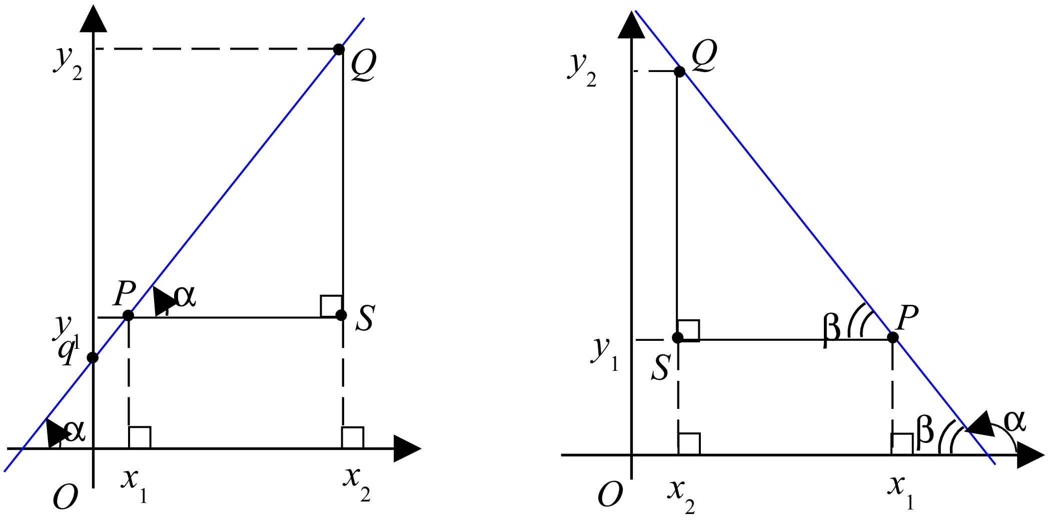
Пусть $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ – две произвольные точки на прямой $l$, где $y_2 \geq y_1$. Подставим их координаты в уравнение прямой: $y_1 = kx_1 + q$, $y_2 = kx_2 + q$ . Вычтем из второго равенства первое:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Поскольку мы исключили случай $l \| Oy$, то $x_2 \neq x_1 \Rightarrow$

$$k = \ . \quad (*_{*}*)$$

Выберем на прямой $l$ направление, соответствующее возрастанию ординаты $y$, и назовем его положительным. Пусть $\alpha$ – угол между положительным направлением оси $Ox$ и положительным направлением прямой $l$. Назовем его углом наклона прямой. Пусть $S$ – точка с координатами $(x_2, y_1)$.




*1 случай*: $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = PS$ и из $\Delta PQS$ находим, что $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

*2 случай*: $x_2 < x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = -PS \Rightarrow k = -QS/PS =$ $= -\operatorname{tg}\beta$ , где $\beta = \angle QPS$. Но $\beta = \pi - \alpha \Rightarrow -\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$ . Значит, как и в первом случае $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

Итак, мы доказали, что $k$ есть тангенс угла наклона прямой. Поэтому он называется *угловым коэффициентом*. А геометрический смысл коэффициента $q$ очевиден: это отрезок, отсекаемый прямой на оси $Oy$.

## §3. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие прямые – это частный случай параллельных.

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1)$ и $(A_2, B_2)$ – это векторы нормали к $l_1$ и $l_2$.

***Теорема* 2. 1.** $l_1 \,||\, l_2$ и $l_1 \neq l_2$ $\Leftrightarrow$ $= \neq$ .

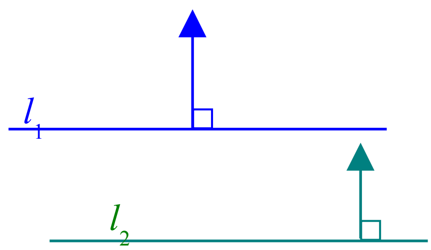
**2.** $l_1 = l_2$ $\Leftrightarrow$ $= =$ .

**3.** $l_1 \perp l_2$ $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

**4.** *угол между* $l_1$ *и* $l_2$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \ = \ . \qquad (16)$$

***Доказательство.* 1, 2.** Очевидно, что $l_1 \,||\, l_2$ $\Leftrightarrow$ $||$ , а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно




$$= = \lambda. \quad (*)$$

При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o)$, т. е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2 = 0.$$

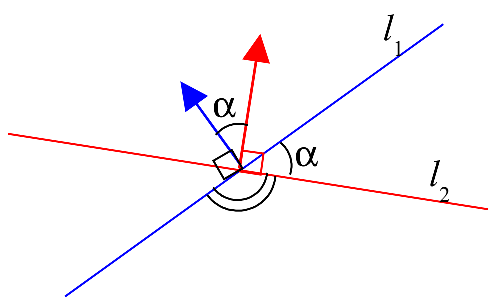
Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$ :

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

В силу $(*)$ обе скобки равны нулю $\Rightarrow$ $C_1 - \lambda C_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $C_1/C_2 = \lambda$. $(**)$ Объединяя $(*)$ и $(**)$, получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения прямых $l_1$ и $l_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, мы получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что углом между двумя прямыми называется меньший из двух углов, которые образуются при их пересечении. Таким образом, угол $\alpha$ между прямыми находится в пределах $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Пусть $\beta = \angle(\,,\,)$. Тогда $0 \leq \beta \leq \pi$. Очевидно, что $\beta$ совпадает с одним из двух углов, которые образуют прямые при пересечении.



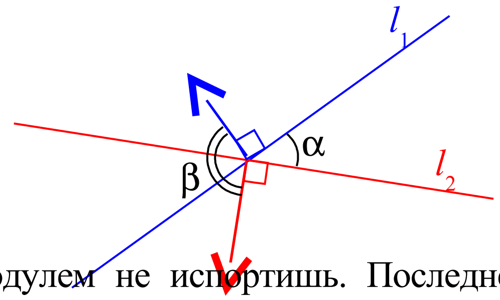
<u>*1 случай*</u>: $0 \le \beta \le \pi/2$. Тогда $\alpha = \beta \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \ \cdot$$

<u>*2 случай*</u>: $\pi/2 < \beta \le \pi$. Тогда $\alpha = \pi - \beta$ и $\cos\beta < 0 \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta =$$

$$= |\cos\beta| = \ \cdot$$




Эта формула подойдет и к первому случаю: неотрицательную величину модулем не испортишь. Последнее равенство в (16) – эта та же формула, только расписанная в координатах. В частности, из (16) следует, что $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \ \cdot = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. ■

***Упражнение* 1.** *Прямые на плоскости могут быть заданы не только общим уравнением. После изучения темы «Взаимное расположение прямой и плоскости» вы легко напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, одна из которых задана каноническим или параметрическим уравнением, а вторая – общим уравнением.*

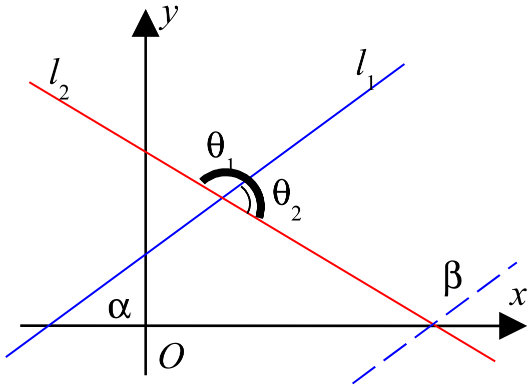
***Упражнение* 2.** *Самостоятельно напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.*

***Теорема* 2.** *Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом*

$$l_1: y = k_1x + q_1, \qquad l_2: y = k_2x + q_2.$$

*Тогда угол между ними вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tg}\theta = \ .$$




***Доказательство.*** Пусть $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а $\theta_1$ и $\theta_2$ – углы, которые образуются при пересечении прямых (см. чертеж). Тогда $\theta_1 = \beta - \alpha$, и, если $\theta_1 \le \pi/2$, то он будет считаться углом между $l_1$ и $l_2$. В этом случае $\operatorname{tg}\theta_1 \ge 0$. Находим:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \ = \ .$$

Если $\theta_1 > \pi/2$, то между прямыми считается $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \theta_1) = -\operatorname{tg}\theta_1 = |\operatorname{tg}\theta_1| = \ .$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Заметим, что если убрать в числителе модуль, то получится формула, по которой можно вычислить [ориентированный угол от]() $l_1$ до $l_2$, (отсчитываемый против часовой стрелки). Данный угол может находиться в пределах $-\pi \le \theta \le \pi$.

## §4. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой.*

***Определение.*** Говорим, что *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{14}$$

*имеет нормальную форму*, если $A^2 + B^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (14) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на :

$$x + \quad y + \quad = 0.$$

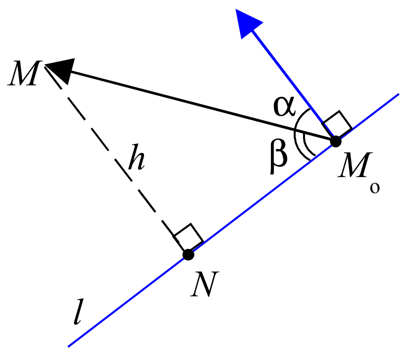
Тогда $\quad^2 + \quad^2 = 1$.

***Теорема* 3.** *Пусть прямая* $l$ *определяется уравнением* (14) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|\,. \tag{17}$$

***Следствие.*** *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (14), *то*

$$h = \,. \tag{17′}$$




***Доказательство.*** Пусть $(A, B)$ – вектор нормали к $l$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\;| = 1$. Пусть $M_o(x_o, y_o)$ – произвольная точка на прямой. Опустим перпендикуляр $MN$ на прямую $l$. Пусть $\alpha = \angle(\;,\;)$, $\beta = \angle MM_oN$.

<u>*1 случай*</u>. Точка $M$ и вектор лежат в одной полуплоскости относительно прямой $l$. Тогда

$$h = |MN| = |MM_o|\cdot\sin\beta = |\;|\cdot\sin(\;-\alpha) =$$
$$= |\;|\cdot\cos\alpha\cdot|\;| = \;\cdot$$

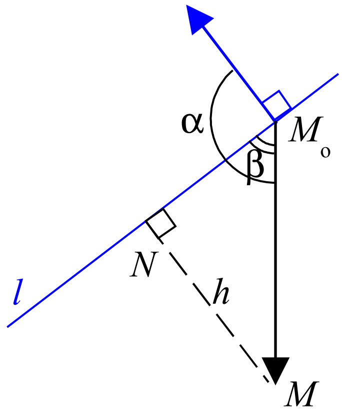
(мы домножили на $|\;|$, поскольку эта величина равна единице). Находим, что $(x_1 - x_o, y_1 - y_o) \Rightarrow$

$$h = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) = Ax_1 + By_1 + C - (Ax_o + By_o + C)$$

(мы добавили и отняли $C$). Поскольку $M_o \in l$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h = Ax_1 + By_1 + C.$$

*2 случай*. Точка $M$ и вектор лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $l$. Тогда $\beta = \alpha - \pi/2 \;\Rightarrow\; \sin\beta = -\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают




$$h = - \cdot = -Ax_1 - By_1 - C.$$

Поскольку $h$ – это расстояние, то $h \geq 0$. Это значит, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + C < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому

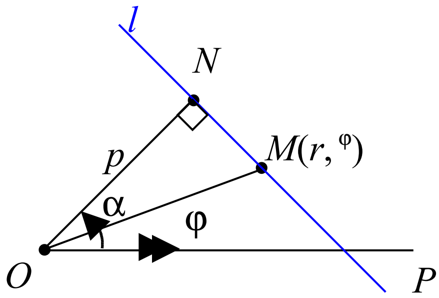
$$h = |Ax_1 + By_1 + C|\ .$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ зависит от того, в какой полуплоскости находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полуплоскости относительно прямой $l$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ прямую $l$ или нет).

## §5. *Уравнение прямой в полярных координатах.*

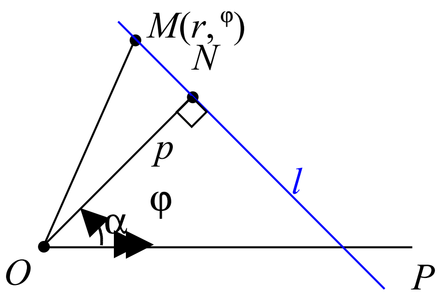
Пусть на плоскости заданы прямая $l$ и полярная система координат, $OP$ – полярная ось. Опустим перпендикуляр $ON$ из полюса на прямую $l$. Обозначим $p = |ON|$ – его длина, $\alpha$ – ориентированный угол между $OP$ и $ON$. Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка прямой.




Тогда из $\Delta OMN$ находим

$$p = r\cdot\cos(\alpha - \varphi) \quad \text{или} \quad p = r\cdot\cos(\varphi - \alpha). \quad (18)$$

Поскольку косинус четная функция, то достаточно только первого уравнения.




Обратно, если координаты точки $M(r, \varphi)$ удовлетворяют (18), то $\Delta OMN$ – прямоугольный $\Rightarrow M \in l$.

Итак, (18) представляет собой *уравнение прямой в полярных координатах*.

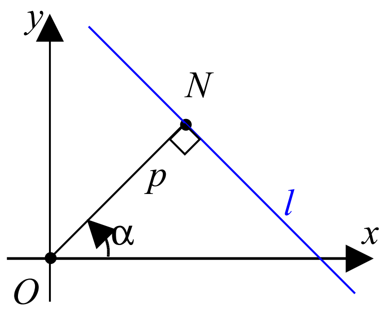
Введем теперь декартову СК так, чтобы $Ox \uparrow\uparrow OP$. Уравнение (18) можно переписать так:

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Согласно формулам перехода $r\cdot\cos\varphi = x,\ r\cdot\sin\varphi = y\ \Rightarrow$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение называют нормальным уравнением прямой. Еще раз отметим геометрический смысл используемых в этом уравнении параметров: $p$ – это длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а $\alpha$ – ориентированный угол между осью $Ox$ и этим перпендикуляром. Поскольку $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то это уравнение имеет нормальную форму, как это было определено в предыдущем параграфе.




***Упражнение.*** *Пусть две прямые заданы своими уравнениями в полярных координатах*: $l_1$: $p_1 = r\cdot\cos(\alpha_1 - \varphi)$, $l_2$: $p_2 = r\cdot\cos(\alpha_2 - \varphi)$. *Выпишите условия параллельности и совпадения этих прямых, а также найдите угол между ними. Найдите, чему равно расстояние между* $l_1$ и $l_2$, *если они параллельны.*

## §6. *Пучок прямых.*

Пусть две несовпадающие прямые на плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0\ ,$$
$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0\ .$$

Рассмотрим совокупность всех прямых, которые задаются различными уравнениями вида

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + \lambda C_1 + \mu C_2 = 0, \qquad (20)$$

где $\lambda$ и $\mu$ – числа не равные нулю одновременно. Это множество называется пучком прямых. Очевидно, при $\lambda = 1,\ \mu = 0$ мы получим уравнение прямой $l_1$, а при $\lambda = 0,\ \mu = 1$ – уравнение прямой $l_2$. Таким образом, прямые $l_1$ и $l_2$ тоже входят в пучок.

***Теорема* 4. 1.** *Если прямые* $l_1$ *и* $l_2$ *пересекаются в точке* $M_0$, *то определяемый ими пучок прямых, состоит из всех прямых, проходящих через* $M_0$.

**2.** *Если* $l_1 \,||\, l_2$ , *то определяемый этими прямыми пучок состоит из всех параллельных им прямых.*

***Доказательство.* 1.** Перепишем (20) в виде

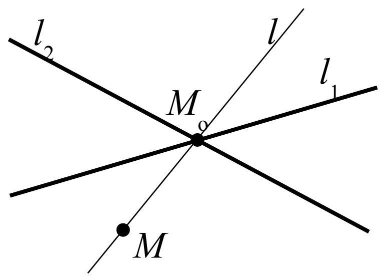
$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (20')$$

Пусть $M_o(x_o, y_o)=l_1\cap l_2$. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Подставим ее координаты в $(20')$:

$$\lambda(A_1x_o+B_1y_o+C_1)+\mu(A_2x_o+B_2y_o+C_2)=0.$$

Поскольку обе скобки должны быть равны нулю, то мы получаем верное равенство независимо от $\lambda$ и $\mu$. Таким образом, все прямые пучка (20) проходят через $M_o$.

Покажем, что в пучок входят все прямые, проходящие через $M_o$. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, отличная от $M_o$. Подставим ее координаты в $(20')$ и обозначим




$$X=A_1x_1+B_1y_1+C_1, \quad Y=A_2x_1+B_2y_1+C_2.$$

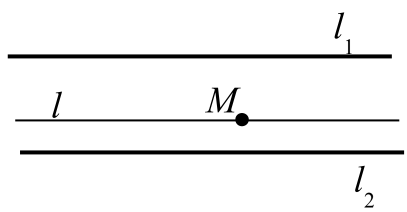
Получим уравнение

$$\lambda X+\mu Y=0 \qquad (*)$$

относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$. Это уравнение всегда имеет решение $(\lambda_o, \mu_o)$. При $\lambda=\lambda_o$ и $\mu=\mu_o$ уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую через $M$.

**2.** Пусть $l_1 || l_2$. Тогда выполнено

$$= \ = k .$$




Пусть $l$ – произвольная прямая из пучка (20). Применим к ней признак параллельности с прямой $l_2$:

$$= \quad \Leftrightarrow \quad \lambda+\mu=\lambda+\mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda k+\mu=\lambda k+\mu ,$$

т.е. имеем верное равенство. Значит $l || l_2$.

Покажем, что в пучок входят все прямые параллельные $l_1$ и $l_2$. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на $l_1$, ни на $l_2$. Подставив ее координаты в $(20')$ также получим уравнение $(*)$ относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$, где $X$ и $Y$ оба ненулевые. При $\lambda$ и $\mu$, удовлетворяющих $(*)$ уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую чере■ $M$.

Если все прямые пучка пересекаются в точке $M_o$, то точка $M_o$ называется *центром пучка*, и *пучок прямых называется собственным или центральным*. Если все прямые пучка параллельны друг другу, то *пучок называется нецентральным или несобственным*.

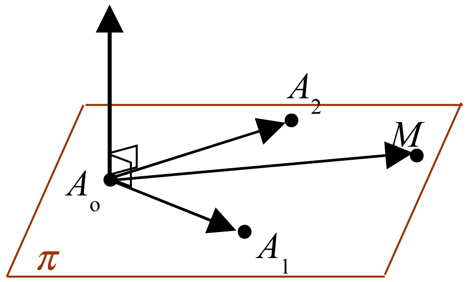
## §7. *Уравнение плоскости в пространстве.*

Плоскость $\pi$ в пространстве можно задать

а) с помощью точки $A_o \in \pi$ и ненулевого вектора $\perp\pi$; тогда можем написать, что $\pi = \{M | \perp\}$; (*)

б) с помощью точки $A_o \in l$ и двух неколлинеарных векторов и , параллельных $\pi$;

в) с помощью трех точек $A_o$, $A_1$, $A_2 \in \pi$, не лежащих на одной прямой.




***Теорема* 4. 1.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, перпендикулярно вектору $(A, B, C)$, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0. \qquad (21)$$

**2.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам и задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (22)$$

**3.** *Плоскость $\pi$, проходящая через три точки $A_o(x_o, y_o, z_o)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (23)$$

**4.** *Плоскость $\pi$, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки $a$, $b$, $c$ задается уравнением*

$$+ + =1 \qquad (24)$$

(*предполагается, что $a$, $b$, $c$ могут быть отрицательными*).

***Доказательство.* 1.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\cdot$ = 0. Поскольку $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$, то последнее равенство в координатах как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (21), то $\perp$ $\Leftrightarrow$ $M \in \pi$.

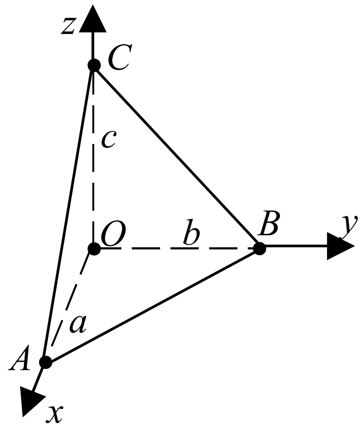
**2.** Пусть $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда компланарен векторам и , а это равносильно тому, что смешанное произведение этих трех векторов равно нулю: = 0. В координатах последнее равенство как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (22), то векторы , , компланарны, а значит $M\in\pi$.

**3.** Если плоскость проходит через три точки $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, то векторы $(x_1– x_0, y_1– y_0, z_1– z_0)$ и $(x_2 – x_0, y_2 – y_0, z_2 – z_0)$ неколлинеарны друг другу и параллельны плоскости $\pi$. Подставим их координаты в (22) вместо координат векторов и , и получим (23).

**4.** Условие означает, что плоскость проходит через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Подставим их координаты в уравнение (23):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0\,.$$




Самостоятельно раскройте определитель и приведите получившееся уравнение к виду (24).

Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*. ■

***Следствие.*** *Любая плоскость определяется уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \tag{25}$$

*которое называется общим уравнением плоскости. И обратно, всякое уравнение вида* (25) *определяет плоскость.*

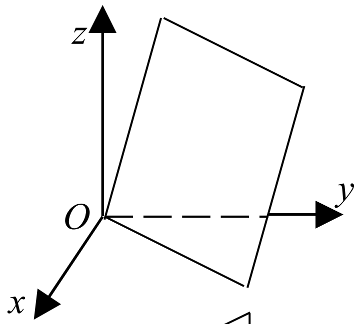
***Доказательство.*** Любая плоскость может быть задана с помощью точки и вектора нормали, а значит ее можно задать уравнением вида (21). Раскроем скобки и обозначим $D = –Ax_0– By_0– Cz_0=$ const. Получим уравнение (25).

Обратно, пусть некоторое множество $\pi$ определяется уравнением (25). Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (25):

$$Ax_0+ By_0+ Cz_0+ D = 0.$$

Отсюда $D = –Ax_0– By_0– Cz_0$ , и подставляя это значение в (25) получим (21). А это уравнение, как уже известно, задает плоскость. ■

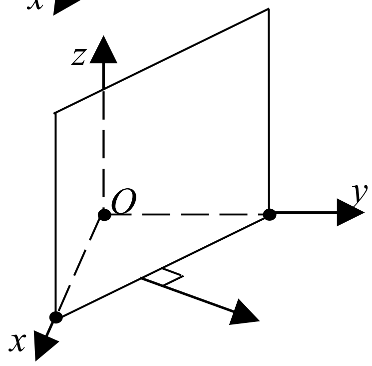
Рассмотрим различные частные случаи плоскостей, задаваемых уравнениями вида (25).




**1.** $D = 0$. Тогда уравнению

$$Ax + By + Cz = 0$$

удовлетворяют координаты точки $O(0, 0, 0)$. Плоскость проходит через начало координат.

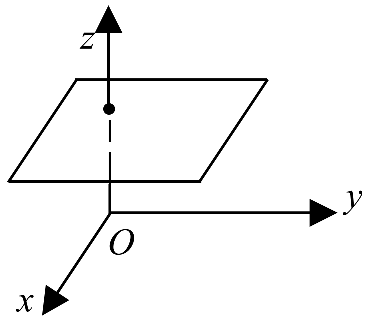



**2.** $C = 0$. Имеем уравнение

$$Ax + By + D = 0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости – $(A, B, 0)$ и $\perp Oz$, а значит, $\pi \| Oz$.

Аналогично, при $B = 0$ получим $\pi \| Oy$, а при $A = 0$ – $\pi \| Ox$.




**3.** $A = B = 0$. Имеем уравнение

$$Cz + D = 0,$$

которое равносильно $z = -C/D$. Тогда $\pi \perp Oz$.

Аналогично, при $A = C = 0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B = C = 0$ – $\pi \perp Ox$.

## §8. *Уравнение плоскости в нормальной форме. Расстояние от точки до плоскости.*

***Определение.*** Говорим, что общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0\ , \qquad (25)$$

имеет нормальную форму, если $A^2+B^2+C^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $(A,B,C)$ – единичный.

Если уравнение (25) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu=$ . Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2+(B/\mu)^2+(C/\mu)^2=1$.

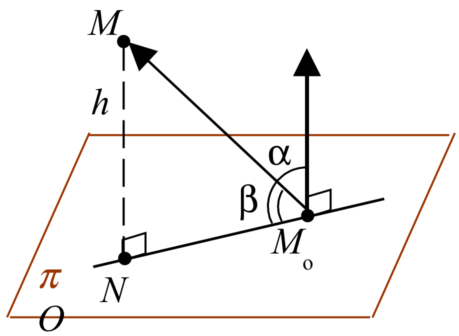
***Теорема 5.*** *Пусть плоскость* $\pi$ *определяется уравнением* (25) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1,y_1,z_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h=|Ax_1+By_1+Cz_1+D\,|\ . \qquad (26)$$

***Следствие.*** *Если плоскость определяется произвольным уравнением вида* (25), *то*

$$h=\ . \quad (26')$$

***Доказательство.*** Пусть $(A,\ B)$ – вектор нормали к $\pi$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\ |=1$. Пусть $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ – произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляр $MN$ на плоскость $\pi$. Пусть $\alpha=\angle(\ ,\ )$, $\beta=\angle MM_oN$.




1 случай. Точка $M$ и вектор лежат в одном полупространстве относительно плоскости $\pi$. Тогда

$$h=|MN|=|MM_o|\cdot\sin\beta=|\ |\cdot\sin(-\alpha)=|\ |\cdot\cos\alpha\cdot|\ |=\ \cdot$$

(мы домножили на $|\ |$, поскольку это единица). Находим, что

$$(x_1-x_o,y_1-y_o,z-z_o)\ \Rightarrow$$

$$h=A(x_1-x_o)+B(y_1-y_o)+C(z_1-z_o)=Ax_1+By_1+Cz_1+D-(Ax_o+By_o+Cz_o+D)$$

(мы добавили и отняли $D$). Поскольку $M_o\in\pi$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h=Ax_1+By_1+Cz_1+D.$$

2 случай. Точка $M$ и вектор лежат в разных полупространствах относительно плоскости $\pi$. Тогда так же, как и в случае прямой на плоскости $\beta=\alpha-\pi/2\ \Rightarrow\ \sin\beta=-\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h = - \cdot = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D.$$

Поскольку $h$ – это расстояние, то $h \geq 0$. Это означает, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому $h = |Ax_1 + By_1 + C|$ . Эта формула подойдет и к первому ■ случаю.

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ зависит от того, в каком полупространстве находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полупространстве относительно плоскости $\pi$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ плоскость $\pi$ или нет).

***Упражнение.*** *Нарисуйте чертеж к второму пункту в доказательстве теоремы и покажите, что в этом случае* $\beta = \alpha - \pi/2$.

## §9. *Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие плоскости – это частный случай параллельных.

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ,$$
$$\pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ .$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1, C_1)$ и $(A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к $\pi_1$ и $\pi_2$.

***Теорема* 6.** **1.** $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow\ =\ =\ \neq\ .$

**2.** $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow\ =\ =\ =\ .$

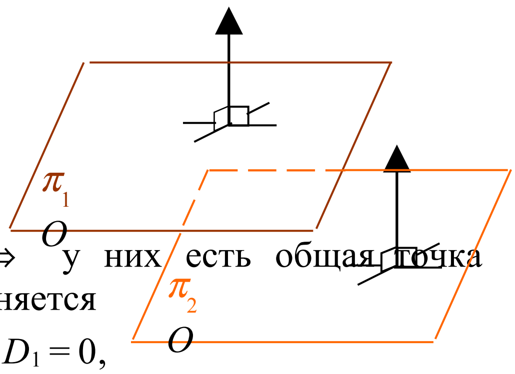
**3.** $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

**4.** *угол между* $\pi_1$ и $\pi_2$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha =\ =\ . \quad (27)$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Очевидно, что $\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow\ ||\ $, а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$$=\ =\ = \lambda\ . \quad (*)$$




При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$, т.е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1z_o + D_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2 = 0.$$

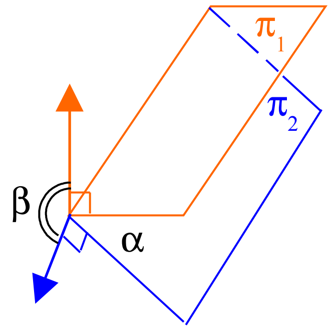
Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$ :

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + (C_1 - \lambda C_2)z_o + (D_1 - D_2) = 0.$$

В силу (∗) обе скобки равны нулю ⇒ $C_1 - \lambda C_2 = 0$ ⇔ $C_1/C_2 = \lambda$. (∗∗). Объединяя (∗) и (∗∗) получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что плоскости при пересечении образуют две пары вертикальных двугранных углов, и углом между двумя плоскостями называется величина меньшей пары углов. Таким образом, угол $\alpha$ между плоскостями находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\cos\alpha \ge 0$. Пусть $\beta = \angle( , )$. Тогда, очевидно, что $\beta$, либо равен $\alpha$, либо является смежным с ним (на рисунке изображен только второй случай).




В первом случае

$$\cos\alpha = \cos\beta = \quad ,$$

а во втором –

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = |\cos\beta| = \quad .$$

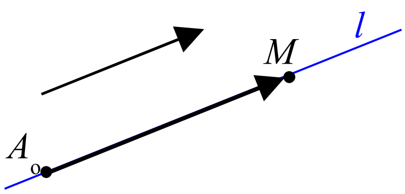
Последняя формула подойдет и к первому случаю. ■

## §10. *Уравнение прямой в пространстве.*

Прямую в пространстве можно задать

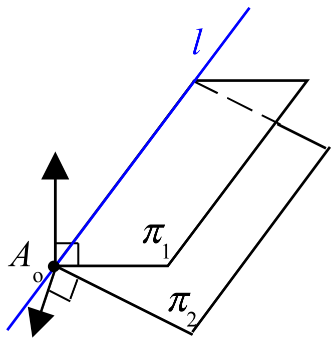
а) с помощью точки $A_o \in l$ и ненулевого вектора || $l$, который называется *направляющим вектором прямой*; тогда можем написать, что

$$l = \{M | \ || \ \}; \ (*)$$




б) как пересечение двух плоскостей $l = \pi_1 \cap \pi_2$ ; в этом случае $l$ будет задаваться системой из двух уравнений (см. §1); это равносильно заданию точки $A_o \in l$ и двух векторов перпендикулярных прямой.

Задать прямую в пространстве с помощью одного вектора нормали нельзя: через данную точку перпендикулярно данному вектору проходит бесконечно много прямых.



***Теорема 6.*** **1.** *Прямая* $l$, *проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *параллельно вектору* $(a_1, a_2, a_3)$ *задается уравнением*

$$= \; = \; , \qquad (28)$$

(<u>*каноническое уравнение*</u>), *или* <u>*параметрическими уравнениями*</u>

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t\,, \\ y = y_o + a_2\, t\,, \\ z = z_o + a_3\, t\,,\; t \in \mathbf{R}\,, \end{cases} \qquad (29)$$

*которые можно записать в векторном виде*: $= + \; t,\; t \in \mathbf{R}$ , *где* $= -$ *радиус-вектор точки* $A_o$.

**2.** *Прямая, проходящая через две точки* $A_o(x_o, y_o, z_o)$ *и* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, *задается уравнением*

$$= \; = , \qquad (30)$$

**3.** *Прямая, проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *перпендикулярно двум векторам нормали* $(A_1, B_1, C_1)$ *и* $(A_2, B_2, C_2)$ *задается в декартовой СК системой уравнений*

$$\begin{cases} A_1(x - x_o) + B_1(y - y_o) + C_1(z - z_o) = 0, \\ A_2(x - x_o) + B_2(y - y_o) + C_2(z - z_o) = 0. \end{cases} \qquad (31)$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Доказательство этих пунктов дословно повторяет доказательство пунктов 1 и 2 из теоремы 1, с той лишь разницей, что у всех точек и векторов добавляется еще третья координата.

**3.** Первое из уравнений системы (31) задает плоскость $\pi_1$, проходящую через точку $A_o$, перпендикулярно вектору , а второе уравнение – плоскость $\pi_2$, проходящую через точку $A_o$ , перпендикулярно вектору . Пересечение этих плоскостей и задает нашу прямую. ■

## §11. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.*

Пусть плоскость $\pi$ задана общим уравнением, а прямая $l$ – каноническим уравнением:

$$\pi\!: \; Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad l\!: \; = \; = \; .$$

Тогда сразу можем отметить, что $(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости $\pi$, $(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой $l$ и точка $A_o(x_o, y_o, z_o) \in l$.

Для удобства изложения, в этом параграфе будем считать, что $l \in \pi$ – это частный случай $l \,||\, \pi$.

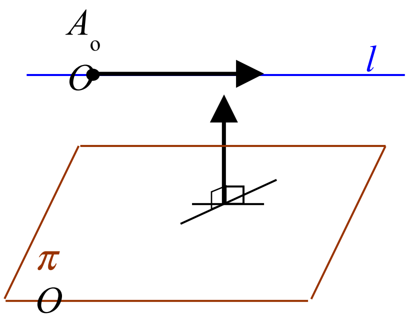
***Теорема* 7.** **1.** $l \in \pi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (32.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0, & (32.2) \end{cases}$

**2.** $l \parallel \pi$ *и* $l \notin \pi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (32.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0, & (32.3) \end{cases}$

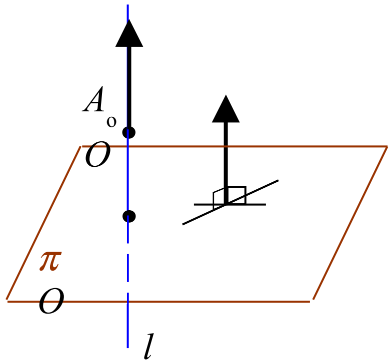
**3.** $l \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad = \; = \; .$ (33)

**4.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

$$\sin\alpha = \; = \; . \qquad (34)$$

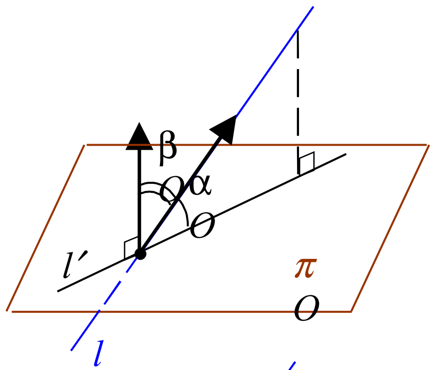



***Доказательство.*** **1,2.** Очевидно, что $l \parallel \pi \;\Leftrightarrow\; \perp \;\Leftrightarrow\; \cdot = 0$, а именно это и означает равенство (32.1). При этом, если выполнено (32.2), то $A_o(x_o, y_o, z_o) \in \pi$, а значит, и вся прямая будет лежать в плоскости. Если выполнено (32.3), то $A_o \notin \pi$, а значит, и $l \notin \pi$.




**3.** Очевидно, что $l \perp \pi \;\Leftrightarrow\; \parallel$, а (33) как раз представляет собой условие коллинеарности этих векторов.

**4.** Напомним, что углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Поэтому, если $\alpha$ – угол между $l$ и $\pi$, то $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, и $\sin\alpha \geq 0$.



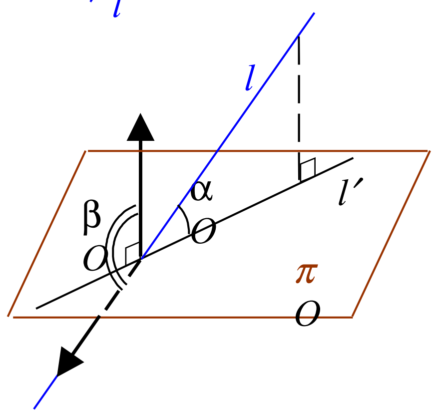

Обозначим $\beta = \angle( \; , \; )$. Тогда возможны два случая: $\alpha = \pi/2 - \beta$ или $\alpha = \beta - \pi/2$. Оба случая изображены на рисунках.

В первом случае имеем

$$\sin\alpha = \cos\beta = \; ,$$

а во втором случае –

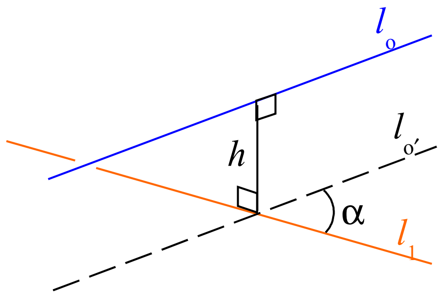
$$\sin\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = \; .$$




Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

## §12. *Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между прямыми.*

Напомним, что углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку. Другими словами, если прямые $l_o$ и $l_1$ скрещиваются, то мы должны совершить параллельный перенос прямой $l_o$, так чтобы получилась прямая $l_o'$, пересекающаяся с $l_1$, и измерять угол между $l_o'$ и $l_1$.




Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр. Его длина называется расстоянием между прямыми.

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_o:\ = = ,\qquad l_1:\ = = . \qquad (35)$$

Тогда сразу можем сделать вывод, что $(a_1, a_2, a_3) \,||\, l_o$, $(b_1, b_2, b_3) \,||\, l_1$, $A_o(x_o, y_o, z_o) \in l_o$, $A_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$. Составим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

и пусть $\Delta = \det \mathbf{A}$.

***Теорема* 8. 1.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = = . \qquad (36)$$

**2.** *Прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\Delta \neq 0$.

**3.** *Прямые* $l_o$ и $l_1$ *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ и *не коллинеарен* .

**4.** $l_o \,||\, l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$ и $||$ .

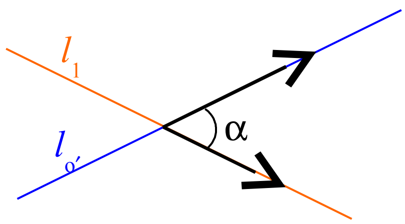
**5.** $l_o = l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 1$.

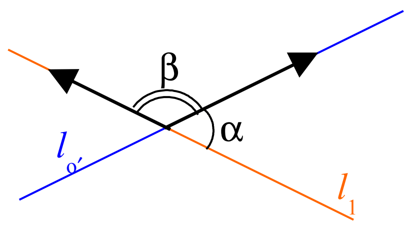
***Доказательство.*** **1.** Угол $\alpha$ между прямыми $l_o$ и $l_1$ может быть равен углу $\beta$ между их направляющими векторами , , а может быть смежным с ним. В первом случае

$$\cos\alpha = \cos\beta = \ ,$$

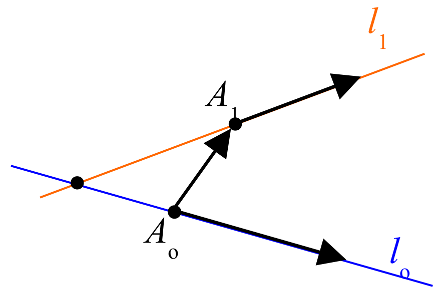
а во втором случае

$$\cos\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = \ .$$

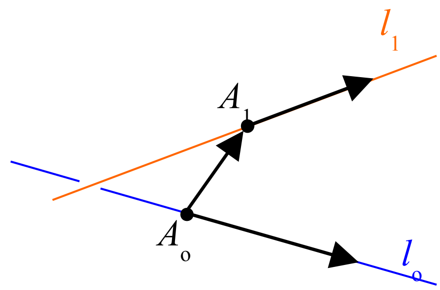


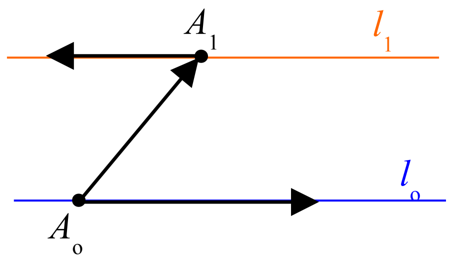
Эта формула подойдет и к первому случаю. Обратите внимание, что на чертеже изображена не прямая $l_o$, а параллельная ей прямая $l_o'$ .




**2, 3.** Очевидно, что прямые $l_o$ и $l_1$ не параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы и не коллинеарны. При этом, прямые лежат в одной плоскости и пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы , , компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю: = 0. А в координатах это произведение точности равно $\Delta$ .

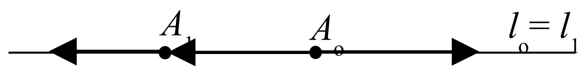



Соответственно, если $\Delta \neq 0$, то векторы , , не компланарны, а значит, прямые $l_o$ и $l_1$ не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они скрещиваются.




**4, 5.** Если $l_o || l_1$ или $l_o = l_1$, то || . Но в первом случае вектор неколлинеарен и , и поэтому первая строка в матрице **A** непропорциональна второй и третей строкам. Значит, rank $\mathbf{A} = 2$.

Во втором случае все три вектора , , коллинеарны друг другу, и поэтому, все строки в матрице **A** пропорциональны. Значит, rank $\mathbf{A} = 1$.




И обратно, если || , то прямые $l_o$ и $l_1$ параллельны или совпадают; при этом, вторая и третья строки матрицы **A** пропорциональны. Если, при этом, rank $\mathbf{A} = 2$, то первая строка матрицы непропорциональна второй и третьей, а значит, вектор неколлинеарен и $\Leftrightarrow$ $l_o || l_1$. Если же rank **A** = 1, то все строки в матрице **A** пропорциональны, а значит, все три вектора , , коллинеарны друг другу $\Leftrightarrow$ $l_o = l_1$. ■

***Теорема* 9.** *Пусть две прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *в пространстве заданы своими каноническими уравнениями* (35). *Тогда*

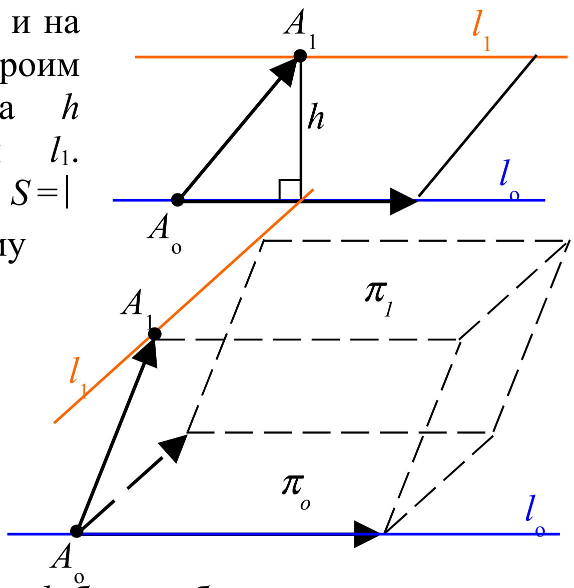
**1.** *если* $l_o || l_1$ , *то расстояние между* $l_o$ *и* $l_1$ *находится по формуле*

$$h = \quad , \qquad (37)$$

**2.** *если* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются, то расстояние между ними находится по формуле*

$$h = \quad . \tag{38}$$

***Доказательство.*** **1.** Пусть $l_o || l_1$. Отложим вектор  от точки $A_o$, и на векторах  и  построим параллелограмм. Тогда его высота $h$ будет расстоянием между $l_o$ и $l_1$. Площадь этого параллелограмма: $S = |\ \times\ |$ , а основание равно $|\ |$. Поэтому




$$h = S/|\ | = (37).$$

**2.** Пусть $l_o$ и $l_1$ скрещиваются. Проведем через прямую $l_o$ плоскость $\pi_o || l_1$, а через прямую $l_1$ проведем плоскость $\pi_1 || l_o$.

Тогда общий перпендикуляр к $l_o$ и $l_1$ будет общим перпендикуляром к $\pi_o$ и $\pi_1$. Отложим векторы  и  из точки $A_o$ и на векторах ,  и  построим параллелепипед. Тогда его нижнее основание лежит в плоскости $\pi_o$, а верхнее – в плоскости $\pi_1$. Поэтому высота параллелепипеда будет общим перпендикуляром к $\pi_o$ и $\pi_1$, а ее величина $h$ будет расстоянием между $l_o$ и $l_1$. Объем параллелепипеда равен $|\ |$, а площадь основания – $|\ \times\ |$ $\Rightarrow$

$$h = V/S_{осн} = (38). \quad \blacksquare$$

***Следствие.*** *Расстояние от точки* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой* $l$, *заданной уравнением*

$$l: \quad = \quad =$$

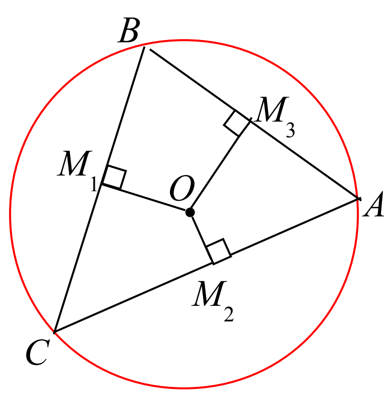
*вычисляется по формуле* (37).

## §13. *Примеры решения задач.*

**1.** *Даны координаты вершин* $A(1,-6)$, $B(-3, 0)$, $C(6, 9)$ *треугольника* $ABC$. *Составить уравнение окружности описанной вокруг треугольника.*

***Решение.*** Для того, чтобы составить уравнение окружности нам необходимо знать ее радиус $R$ и координаты центра $O(a, b)$. Тогда уравнение выглядит так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ .$$




Центр окружности, описанной вокруг треугольника находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Находим координаты середин $M_1(x_1, y_1)$, и $M_3(x_3, y_3)$ сторон $BC$ и $AB$ соответственно:

$$x_1= \;=\; = \;,\; y_1= \;=\; = \;,\; M_1 .$$

Аналогично $M_3(-1,-3)$.

Пусть $l_3$ – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к $AB$, а $l_1$ – к $BC$. Тогда $= (-4, 6) \perp l_3$ и $l_3$ проходит через $M_3$. Поэтому ее уравнение:

$$-4(x+1) + 6(y+3) = 0.$$

Аналогично $= (9, 9) \perp l_3$. Поэтому уравнение $l_1$:

$$9(x-\;) + 9(y-\;) = 0$$

$$x + y - 6 = 0.$$

Имеем $O = l_1 \cap l_3$. Поэтому, чтобы найти координаты точки $O$ необходимо решить совместно уравнения $l_1$ и $l_3$:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ -4x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 10y - 10 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = 1, x = 5, O(5, 1)$.

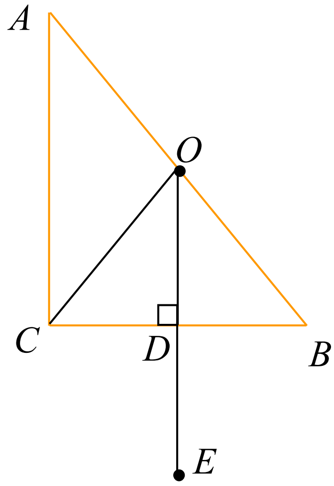
Радиус равен расстоянию от $O$ до любой из вершин треугольника. Находим:

$$R = |\;| = \; = .$$

Значит уравнение окружности:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 65.$$

**2.** *В прямоугольном треугольнике* $ABC$ *известны уравнение одного из катетов* $3x - 2y + 5 = 0$, *координаты вершины* $C(-5,-5)$ *и координаты середины* $O(-3/2,-3)$ *гипотенузы* $AB$. *Найти координаты вершин* $A$, $B$ *и координаты точки* $E$, *симметричной* $O$ *относительно стороны* $BC$. *Найти координаты точки пересечения медиан треугольника* $ABC$.




***Решение.*** Пусть катет, уравнение которого нам дано, – это $CB$. Он задан общим уравнением вида

$$ax + by + c = 0.$$

В данном уравнении геометрический смысл

коэффициентов $a$ и $b$ – это координаты
вектора нормали $(a, b)$. Поэтому $(3,–2)\perp BC$.
Составим уравнение перпендикуляра $l = OD$ к стороне $CB$ и найдем координаты точки $D$. Вектор будет параллелен $OD$, т.е. он является направляющим вектором этой прямой. Кроме этого, нам известны координаты точки $O$ на этой прямой. Составляем параметрическое уравнение $l$ :

$$\begin{cases} x = - \quad + 3t, \\ y = -3 - 2t \; . \end{cases} \qquad (*)$$

Имеем $D = l \cap BC$. Поэтому, для того, чтобы найти координаты этой точки мы должны решить совместно уравнения $l$ и $BC$. Подставляем $x$ и $y$ из уравнения $l$ в уравнение $BC$ :

$$3(- \quad + 3t) - 2(-3 - 2t) + 5 = 0,$$
$$- \quad + 9t + 6 + 4t + 5 = 0,$$
$$13t = - \; , \quad t_D = - \; .$$

Подставляем найденное $t$ в уравнение $l$ и находим координаты точки $D(–3,–2)$. Для того, чтобы найти координаты $E$ вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае, начальная точка – это $O$, вектор скорости – это . Отрезок $OE$ вдвое длиннее отрезка $OD$. Если за время $t_D = -$ мы прошли путь от $O$ до $D$, то путь от $O$ до $E$ мы пройдем за время $t_E = 2t_D = -1$. Подставляя это значение в (*), находим $E(–4{,}5;–1)$.

Точка $D$ делит отрезок $BC$ пополам. Поэтому

$$x_D = \; , \quad y_D = \; .$$

Отсюда находим

$$x_B = 2x_D - x_C = -1, \quad y_B = 2y_D - y_C = 1, \quad B(-1, 1).$$

Аналогично, используя тот факт, что $O$ – середина $AB$, находим координаты точки $A(–2,–7)$. Возможен другой путь решения этой задачи: достроить $\Delta ABC$ до параллелограмма.

Общие формулы деления отрезка в данном отношении выглядят так:

$$x_C = \; , \quad y_D = \; ,$$

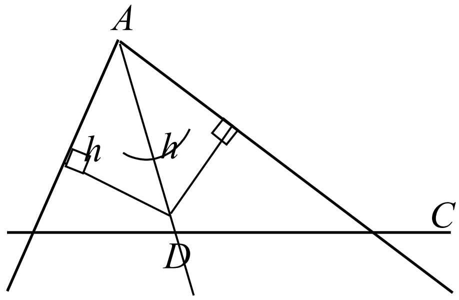
если точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda_1{:}\lambda_2$, т.е.
$|AC|:|BC| = \lambda_1{:}\lambda_2$.
Известно, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины. В нашем случае $P$ делит $CO$ в отношении 2:1. Поэтому

$x_P = \ = \ = - ,$

$y_P = \ = \ = - \ .$

***Ответ***: $A(-2,-7)$, $B(-1, 1)$, $P$.

**3.** *Даны координаты вершин* $A(-4,-2)$, $B(9, 7)$, $C(2,-4)$ *треугольника* $ABC$. *Составить общее уравнение биссектрисы* $AD$ *и найти координаты точки* $D$.




***Решение.*** Из курса элементарной математики известно, что $=$ . Вычисляем

$(13, 9)$, $(6,-2)$;

$| | = = 5$, $| | = = 2$ .

Значит $BD : DC = 5 : 2$ . Далее, применяя формулы деления отрезка в заданном отношении (см. задачу 16) находим

$x_D = \ = \ = 4,$

$y_D = \ = \ = - \ , \quad D(4, - \ ).$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $D$. Для неё вектор является направляющим. Но, в качестве направляющего мы можем взять любой вектор, коллинеарный . Например, удобно будет взять $=$ , $(7, 1)$. Тогда уравнение

$AD : \ = y + 2 \iff x - 7y - 10 = 0.$

***Ответ***: $D(4, - \ )$, $AD$: $x - 7y - 10 = 0$.

**4.** *Даны уравнения двух медиан* $x - y - 3 = 0$, $5x + 4y - 9 = 0$ *треугольника* $ABC$ *и координаты вершины* $A(-1, 2)$. *Составьте уравнение третьей медианы*.

***Решение.*** Сначала мы убедимся, что точка $A$ не принадлежит данным медианам. Медианы треугольника пересекаются в одной точке $M$. Поэтому они входят в пучок прямых, проходящих через $M$. Составим уравнение этого пучка:

$$\lambda(x - y - 3) + \mu(5x + 4y - 9) = 0.$$

Коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ определяются с точностью до пропорциональности; поэтому можем считать, что $\mu = 1$ (если $\mu = 0$ то уравнение пучка задает только первую медиану, а искомая прямая не совпадает с ней). Получаем уравнение пучка:

$$(\lambda + 5)x + (-\lambda + 4)y - 3\lambda - 9 = 0.$$

Нам из этого пучка надо выбрать прямую, проходящую через точку $A(-1, 2)$. Подставим её координаты в уравнение пучка:

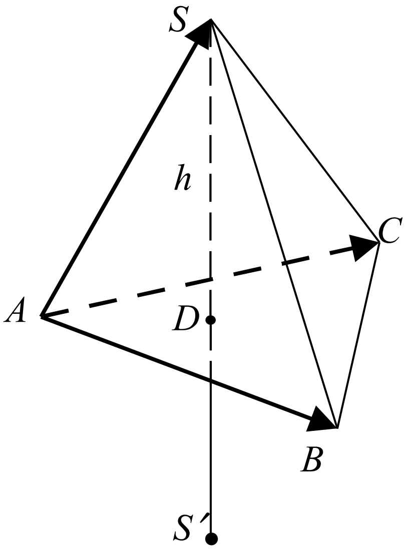
$$-(\lambda+5)+2(-\lambda+4)-3\lambda-9=0,$$

$$-6\lambda-6=0,\ \lambda=-1.$$

Найденное значение $\lambda$ подставляем в уравнение пучка и получаем искомое уравнение медианы:

$$4x+5y-6=0.$$

***Ответ***: $4x+5y-6=0$.




**5.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды* $SABC$: $A(-3, 7, 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$ $S(6,-5,-2)$. *Составить уравнение плоскости основания* $ABC$ *и уравнение высоты* $SD$. *Найти координаты точки* $D$ *и точки* $S'$, *симметричной* $S$ *относительно плоскости основания.*

***Решение.*** Найдем координаты двух векторов параллельных плоскости основания $\pi = ABC$:

$= (2, 1, 1)$, $= (0,-1, 5)$.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $(a_1, a_2, a_3)$, $(b_1, b_2, b_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$11(x+3)-10(y-7)-2(z-1)=0,$$

$$11x-10y-2z+105=0.$$

Из уравнения плоскости находим, что вектор $(11,-10,-2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой $h = SD$. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ \end{cases}$$

$$z = z_o + a_3 t\,.$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$h\colon \begin{cases} x = \ \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой $l$ с плоскостью $\pi$. Для этого мы должны решить совместно уравнения $l$ и $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

$$11(6+11t) - 10(-5-10t) - 2(-2-2t) + 105 = 0,$$
$$66 + 121t + 50 + 100t + 4 + 4t + 105 = 0,$$
$$225y = -225, \quad t = -1.$$

Найденное $t$ подставляем в уравнение $l$ и находим координаты $D(-5, 5, 0)$.

Вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае, начальная точка – это $S$, вектор скорости – это . Отрезок $SS'$ вдвое длиннее отрезка $SD$ и на его прохождение понадобится вдвое больше времени. Если за время $t_D = -1$ мы прошли путь от $S$ до $D$, то путь от $S$ до $S'$ мы пройдем за время $t' = 2t_D = -2$. Подставляя это значение в $(*)$, находим $S'(-16, 15; 2)$.

***Ответ***: $ABC$: $11x - 10y - 2z + 105 = 0$, $D(-5, 5, 0)$, $S'(-16, 15; 2)$,

$$SD\colon \begin{cases} x = \ \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$$

**6.** *Даны уравнения прямой $l$ плоскости $\pi$:*

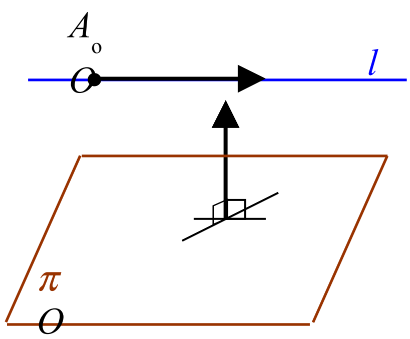
$$l: x - 6 = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad \pi: 5x - 2y + 4z + 7 = 0.$$

*Убедиться, что $l$ и $\pi$ пересекаются и составить уравнение проекции $l'$ прямой $l$ на плоскость. Найти угол между $l$ и $\pi$.*

***Решение.*** Из уравнения прямой находим ее направляющий вектор: (1,–1, 2) и точку на этой прямой: $A(6, 0, 2)$ , а из уравнения плоскости – вектор нормали к плоскости: (5,–2, 4). Очевидно, что если $l \,||\, \pi$ или $l \in \pi$, то $\perp$ т.е. $\cdot = 0$. Проверим:

$$\cdot = 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 15 \neq 0.$$

Значит, $l$ пересекает $\pi$. Угол между $l$ и $\pi$ находим по формуле:



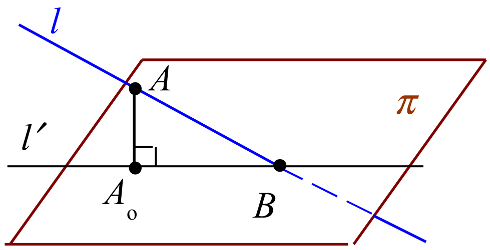
$$\sin\alpha = \ ;$$

$$|| = \ = \ , \ || = \ = \ = 3 \ .$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \ = \ .$$

Пусть $A_0$ – проекция точки $A$ на плоскость, а $B = l \cap \pi$. Тогда $l' = A_0B$ – это проекция прямой $l$. Найдем сначала координаты точки $B$. Для этого перепишем уравнение прямой $l$ в параметрическом виде:




$$l: \begin{cases} x = 6 + t, \\ y = -t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases}$$

и решим его совместно с уравнением плоскости $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

$$5(6+t) - 2(-t) + 4(2+2t) + 7 = 0,$$

$$30 + 5t + 2t + 8 + 8t + 7 = 0,$$

$$15t = -45, \quad t = -3.$$

Подставляя это $t$ в уравнение $l$ находим координаты $B(3,\ 3,\ 4)$. Составим уравнение перпендикуляра $h = AA_0$. Для прямой $h$ вектор служит направляющим. Поэтому $h$ задается уравнением

$$h: \begin{cases} x = 6 + 5t, \\ y = -2t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases}$$

Решаем его совместно с уравнением плоскости $\pi$, чтобы найти координаты точки $A_0$:

$$5(6+5t) - 2(-2t) + 4(2+4t) + 7 = 0,$$

$$30 + 25t + 4t + 8 + 16t + 7 = 0,$$

$$45t = -45, \quad t = -1.$$

Подставляем это $t$ в уравнение $h$ и находим $A_0(1,\ 2, -2)$. Находим направляющий вектор прямой $l'$: $A_0B(2,\ 1, -2)$ и получаем ее уравнение:

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-2}.$$

**7.** *Прямая $l$ в пространстве задана системой уравнений*

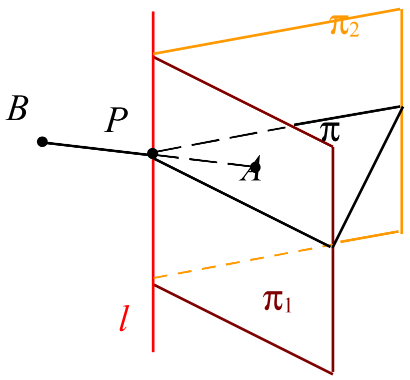
$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = 0, \\ 4x - 8y + z - 5 = 0, \end{cases}$$

*и даны координаты точки* $A(-5,6,1)$. *Найти координаты точки B, симметричной A относительно прямой l.*

***Решение.*** Пусть $P$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на прямую $l$. Сначала мы найдем координаты точки $P$. Для этого мы составим уравнение плоскости $\pi$, проходящей через точку $A$ перпендикулярно плоскостям $\pi_1$ и $\pi_2$. Находим векторы нормали к этим плоскостям: (2, 2,–1), (4,–8, 1). Для плоскости $\pi$ они будут направляющими. Поэтому уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-6 & z-1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-6(x+5)-6(y-6)-24(z-1)=0.$$




Прежде чем раскрывать скобки обязательно сначала делим все уравнение на $-6$:

$$x+5+y-6+4(z-1)=0,$$
$$x+y+4z-5=0.$$

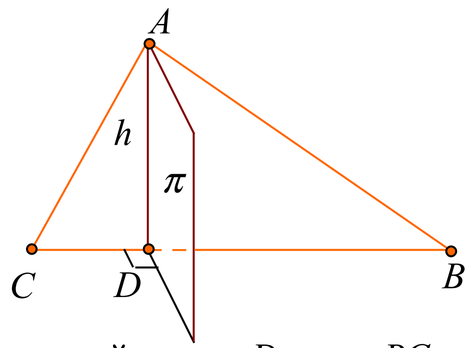
Теперь $P$ – точка пересечения плоскостей $\pi$, $\pi_1$ и $\pi_2$. Для того, чтобы найти ее координаты мы должны решить систему, составленную из уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} x+y+4z-5=0, \\ 4x-8y+z-5=0, \\ 2x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Решая ее по методу Гаусса, находим $P(1,0,1)$. Далее, используя тот факт, что $P$ – середина $AB$ мы находим координаты точки $B(7,-6,1)$.

Точку $P$ можно найти другим способом, как ближайшую к $A$ точку прямой $l$. Для этого необходимо составить параметрическое уравнение этой прямой. Как это делается, см. задачу **10**. Дальнейшие действия см. в задаче **8**.

**8.** *В* $\Delta ABC$ *с вершинами* $A(9, 5, 1)$, $B(-3,\ 8,\ 4)$, $C(9,-13,-8)$ *проведена высота AD. Найти координаты точки D, составить уравнение прямой AD, вычислить* $h=|AD|$ *и проверить h, вычислив* $S_{\Delta ABC}$ *с помощью векторного произведения.*




***Решение.*** Очевидно, что точку $D$ можно найти так: $D = \pi \cap BC$, где $\pi$ – это плоскость, которая проходит через точку $A$ перпендикулярно стороне $BC$. Для этой плоскости служит вектором нормали. Находим

(12,–21,–12). Координаты этого вектора нацело делятся на 3. Поэтому в качестве вектора нормали к $\pi$ можем взять $=$ , (4,–7,– 4). Уравнение плоскости $\pi$, проходящей через точку $A_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ перпендикулярно вектору $(a, b,\ c)$, имеет вид:

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0.$$

В нашем случае:

$$4(x-9)-7(y-5)-4(z-1)=0,$$

$$4x-7y-4z+3=0,$$

Составим уравнение прямой $BC$. Для нее вектор будет направляющим:

$$BC\!:\begin{cases} x=-3+4t, \\ y=\ 8-7t, \\ z=\ 4-4t, \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку $D = \pi \cap BC$, для нахождения координат точки $D$ нужно решить совместно уравнения $\pi$ и $BC$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $BC$ в уравнение $\pi$:

$$4(-3+4t)-7(8-7t)-4(4-4t)+3=0,$$

$$-12+16t-56+49t-16+16t+3=0,$$

$$81t=81, \quad t=1.$$

Подставляем это $t$ в уравнение прямой $BC$ и находим $D(1,\ 1,\ 0)$. Далее, зная координаты точек $A$ и $D$, составляем уравнение прямой $AD$ вычисляем $h=|AD|$ по формуле расстояния между точками:

$$h= \ =9.$$

Далее, $S_{\Delta ABC} = |\times|$; сначала находим сам вектор $\times$, а потом его модуль.

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -12 & 3 & 3 \\ 0 & -18 & -9 \end{vmatrix} = -27\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27(-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-8\mathbf{k}).$$

(В процессе вычисления мы воспользовались свойством определителя: общий множитель элементов одной строки можно выносить за знак определителя).

$$S_{\Delta ABC} = \ \cdot 27 = \ .$$

С другой стороны $S_{\Delta ABC} = |\,|\cdot h$. Отсюда $h = .$ Находим

$$|\,| = \ = 3 = 27.$$

Поэтому $h = 9$. Это совпадает с ранее найденным ответом.

Точку $D$ можно найти, как ближайшую к $A$ точку прямой $BC$, используя методы дифференциального исчисления. Пусть $M(t)$ –

произвольная точка прямой $BC$; её координаты определяются системой (∗):

$$M(-3+4t,\ 8-7t,\ 4-4t).$$

Находим квадрат расстояние от точки $A$ до $M(t)$:

$$h^2(t)=(9+3-4t)^2+(5-8+7t)^2+(1-4+4t)^2$$
$$=(12-4t)^2+(-3+7t)^2+(-3+4t)^2=$$
$$=144-96t+16t^2+9-42t+49t^2+9-24t+16t^2=$$
$$=81t^2-162t+162.$$

Найдем наименьшее значение функции $h^2(t)$ с помощью производной:

$$h^2(t)=162t-162;\quad h^2(t)=0 \ \Rightarrow\ t=1.$$

Подставляем это значение $t$ в уравнение прямой $BC$ и находим, что $D(1, 1, 0)$ является ближайшей к $A$ точкой на прямой $BC$.

**9.** *Исследовать взаимное расположение следующих пар плоскостей* (*пересекаются, параллельны, совпадают*). *Если плоскости пересекаются, то найдите угол между ними, если параллельны – расстояние между ними*.

**а).** $\pi_1$: $2y+z+5=0$, $\pi_2$: $5x+4y-2z+11=0$.

***Решение.*** Если плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ заданы своими общими уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

то

$$\pi_1 \,||\, \pi_2 \quad\Leftrightarrow\quad = \ = \ \neq \ ,$$
$$\pi_1=\pi_2 \quad\Leftrightarrow\quad = \ = \ = \ .$$

В нашем случае $\neq$ $\neq$ , поэтому плоскости не параллельны и не совпадают. Значит, они пересекаются. Угол между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \ ,$$

где и – векторы нормали к этим плоскостям. В нашем случае

$$(0,2,1),\ (5,4,-2),\quad \cdot\ =0\cdot 5+2\cdot 4+1\cdot(-2);$$

$$||= \ = \ ,\ ||= \ =3\ .$$

Значит, $\cos\alpha = \ = .$

***Ответ*:** $\alpha=\arccos$ .

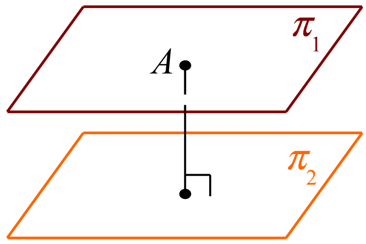
**б)** $\pi_1$: $x-y+2z+8=0$,
$\pi_2$: $2x-y+4z-12=0$.

***Решение.*** Проверяем на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}\neq\frac{8}{-12}.$$

Значит, $\pi_1 || \pi_2$ но $\pi_1 \neq \pi_2$. Расстояние от точки $A(x,y,z)$ до плоскости, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$ находится по формуле

$h=$ .



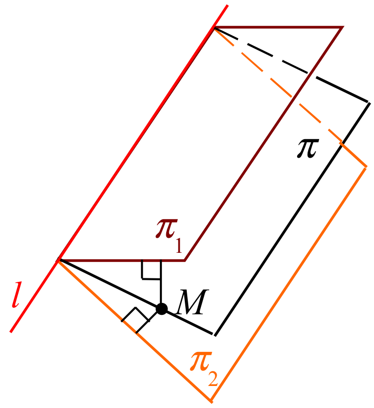

Выберем точку $A\in\pi_1$. Для этого надо подобрать любые три координаты, удовлетворяющие уравнению $\pi_1$. В нашем случае, самое простое: $A_o(0, 8, 0)$. Расстояние от $A_o$ до $\pi_2$ и будет расстоянием между $\pi_1$ и $\pi_2$:

$h=$ $=$ .

**10.** *Составить уравнение плоскости* π, *которая делит пополам тот из двугранных углов между плоскостями*

$\pi_1$: $2x-y+2=0$, $\pi_2$: $5x+4y-2z-14=0$,

*который содержит данную точку* $A(0,3,-2)$. *Составить параметрическое уравнение прямой* $l=\pi_1\cap\pi_2$;




***Решение.*** Если точка $A(x,y,z)$ лежит на плоскости π, которая делит двугранный угол пополам, то расстояния $h_1$ и $h_2$ от этой точки до $\pi_1$ и до $\pi_2$ равны.

Находим эти расстояния и приравниваем их:

$$=$$

Модули мы можем раскрывать с одинаковыми или разными знаками. Поэтому можем получить 2 ответа, т.к. $\pi_1$ и $\pi_2$ образуют два двугранных угла. Но в условии требуется найти уравнение плоскости, которая делит пополам тот угол, в котором находится точка $A$. Значит координаты точки $M$ при подстановке в левые части уравнений данных плоскостей $\pi_1$ и должны такие же знаки, что и координаты точки $A$. Легко проверить, что эти знаки для $\pi_1$ и «+» для $\pi_2$. Поэтому мы раскрываем первый модуль со знаком «–», а второй – со знаком «+» :

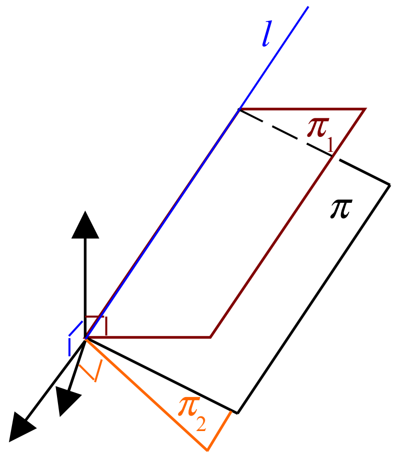
$$= \ ,$$

$$3(-2x+y-2)=5x+4y-2z-14,$$

$$\pi{:}\,11x+y-2z-14=0.$$

Для того, чтобы составить уравнение прямой $l$, нам нужно найти направляющий вектор этой прямой и точку на ней.

Из уравнений $\pi_1$ и $\pi_2$ находим координаты векторов нормали к этим плоскостям: (2,–1, 0), (5, 4,–2). Направляющий вектор прямой $l$ перпендикулярен и . Такой можно найти с помощью векторного произведения (по определению, если $=\times$ , то $\perp$ и $\perp$ ):




$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$= \times = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{matrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 13\mathbf{k}.$$

Для того, чтобы найти координаты одной точки на прямой, мы должны найти частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 5x + 4y - 2z - 1 4 0, \end{cases}$$

Поскольку уравнений два, а неизвестных три, то система имеет бесконечное количество решений. Нам достаточно подобрать одно. Проще всего положить $x = 0$ и тогда находим

$$\Rightarrow \; z = -3, B(0,2,-3) \in l.$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $B(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $(a_1, a_2, a_3)$, имеет вид:

$$= = .$$

В нашем случае имеем уравнение:

$$l: \; = = .$$

***Ответ***: $\pi$: $11x + y - 2z = 0$, $l$: $= =$ .

**11.** *Даны уравнения двух прямых в пространстве*:

$$l_1: \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 5 + 2t, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = -3 + 2t', \\ y = -2 - 3t', \\ z = 3 - 2t'. \end{cases}$$

*Доказать, что данные прямые скрещиваются и составить уравнение их общего перпендикуляра.*

***Решение.*** Из уравнений прямых находим координаты их направляющих векторов: (–1, 2, 2), (2,–3,–2) и точек $A(-1, 6, 5) \in l_1$, $B(-3,-2, 3) \in l_2$. Проверяем и на коллинеарность:

$$= = .$$

Значит и $l_1$ $l_2$. Следовательно, прямые $l_1$ и $l_2$ либо скрещиваются, либо пересекаются. Мы найдем расстояние между ними, и, если оно не равно нулю, то прямые скрещиваются.

Расстояние вычисляется по формуле

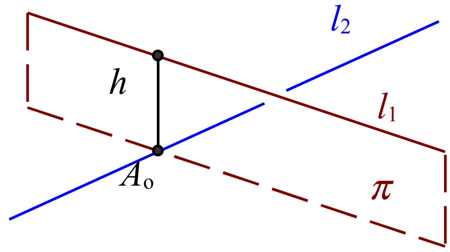
$$d = .$$

Находим

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ & & \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; \qquad |\times| = \; = 3.$$

$2\ \ -3\ \ -2$

$(-2,-8,-2)$ , $\quad = -2\cdot 2 - 8\cdot 2 - 2\cdot(-1) = -18$ , $\quad d =$ .




Вектор $= \times$ перпендикулярен и перпендикулярен . Следовательно, $\perp l_1$ и $\perp l_1$, а значит, является направляющим вектором общего перпендикуляра $h$ к этим прямым. Мы уже нашли его координаты: $(2, 2, -1)$. Для того, чтобы составить уравнение $h$ нам нужно найти координаты одной точки на этой прямой. Для этого мы составим уравнение плоскости π, проходящей через $l_1$ и $h$. Для нее векторы , будут направляющими, и $A \in \pi$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-6(x-1) + 3(y-2) - 6(z-1) = 0.$$

$$-2(x-1) + (y-2) - 2(z-1) = 0.$$

$$\pi:\ -2x + y - 2z + 2 = 0.$$

Находим точку пересечения $l_2$ и π . Для этого $x, y, z$ из уравнения $l_2$ подставляем в уравнение $\pi$:

$$-2(-3 + 2t') - 2 + 3t' - 2(3 - 2t') + 2 = 0,$$

$$6 - 4t' - 2 - 3t' - 6 - 4t' + 2 = 0,$$

$$-7t' = 0, \qquad t' = 0.$$

Подставляем найденное $t'$ в уравнение $l_2$ и находим, что $B(-3,-2, 3)$ и есть общая точка $l_2$ и π. Имея точку на $h$ и направляющий вектор этой прямой составляем ее уравнение:

$$h : \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} \ .$$

Заметим, что прямую $h$ можно задать как пересечение двух плоскостей: плоскости π и плоскости $\pi_1$, проходящей через прямую $l_2$ с направляющим вектором . Этот способ решения также допускается, и он несколько короче.

<u>*Второй способ решения*</u> этой задачи использует методы дифференциального исчисления. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым – это кратчайший из отрезков, соединяющих две точки на этих прямых. Находим квадрат расстояния от произвольной точки прямой $l_1$ до произвольной точки прямой $l_2$ :

$$h^2(t,\,t')=(-3+2t'+1+t\,)^2+(-2-3t'-6-2t)^2+(3-2t'-5-2t)^2=$$
$$=(t+2t'-2)^2+(8+2t+3t')^2+(2+2t+2t')^2\,.$$

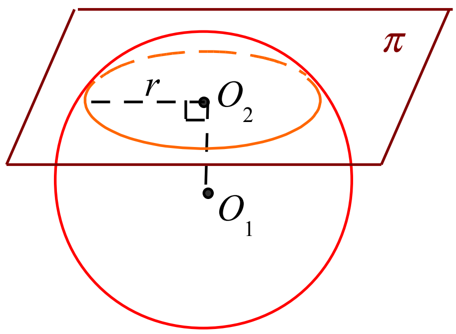
Найдем точку минимума функции $h^2(t,\,t')$. Для этого вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$h^2(t,\,t')=2(t+2t'-2)+4(8+2t+3t')+4(2+2t+2t')=2(9t+12t'+18);$$
$$h^2(t,\,t')=4(t+2t'-2)+6(8+2t+3t')+4(2+2t+2t')=2(12t+17t'+24);$$
$$\begin{cases}9t+12t'+18=0\\12t+17t'+24=0\end{cases}\Rightarrow\qquad\begin{cases}t=-2\\t'=0.\end{cases}$$

Подставляем эти значения $t$ и $t'$ в уравнения $l_1$ и $l_2$ соответственно и находим, что $C(1,\,2,\,1)$ и $B(-3,-2,\,3)$ являются концами общего перпендикуляра. Остается составить уравнение прямой, проходящей через две точки $B$ и $C$.

**12.** *Дано уравнение сферы* $S$:

$$x^2+y^2+z^2+12x-10y-4z-176=0.$$




а) *Составить уравнение плоскости* $\pi$, *проходящей через точки* $A(-3,7,1)$, $B(-1,9,2)$, $C(-3,6,6)$

б) *найти координаты центра и радиус окружности, по которой* $\pi$ *пересекает* $S$.

***Решение.*** Найдем два вектора параллельных плоскости: $(2,\,1,\,1)$, $(0,-1,\,5)$. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(x_0,y_0,z_0)$ параллельно двум данным векторам $(a_1,a_2,a_3)$, $(b_1,b_2,b_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix}x+3 & y-7 & z-1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Раскрываем определитель:

$$11(x+3)-10(y-7)-2(z-1)=0\,,$$
$$11x-10y-2z+105=0\,.$$

Найдем координаты центра $O'$ и радиус $R$ сферы. Для этого выделим полные квадраты:

$$(x^2-12x+36)-36+(y^2+10y+25)+(z^2+4z+4)-4-176=0,$$
$$(x-6)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=241.$$

Значит, $O'(6,–5,–2)$, $R=$ .

Центр окружности, получающейся в сечении сферы плоскостью, является основанием перпендикуляра $l$, опущенного из центра сферы на плоскость. Из уравнения плоскости находим, что вектор (11,–10,–2) является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой $l$. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t, \\ y=y_o+a_2t, \\ z=z_o+a_3t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$l: \begin{cases} x=\ 6+11t, \\ y=-5-10t, \\ z=-2-2t. \end{cases}$$

Найдем основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой $l$ с плоскостью $\pi$. Для этого мы должны решить совместно уравнения $l$ и $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

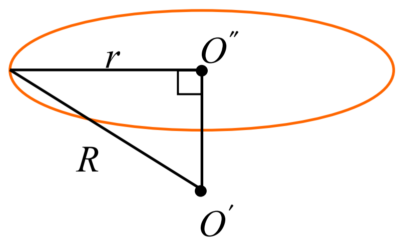
$$11(6+11t)-10(-5-10t)-2(-2-2t)+105=0,$$
$$66+121t+50+100t+4+4t+105=0,$$
$$225t=-225,\quad t=-1.$$

Найденное $t$ подставляем в уравнение $l$ и находим координаты центра окружности: $O''(-5,\ 5,\ 0)$. Находим длину отрезка $O'O''$ как расстояние между точками:

$$|O'O''|= =15.$$

По теореме Пифагора

$$r^2=R^2-|O'O''|^2=241-225=16.$$

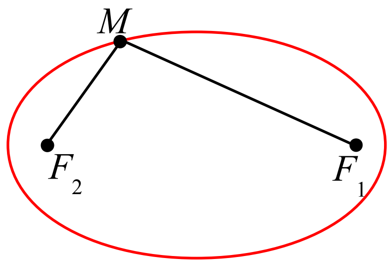



Значит, $r=4$ – радиус окружности.

***Ответ***: $r=4$, $O''(-5,5,0)$.

# ГЛАВА 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

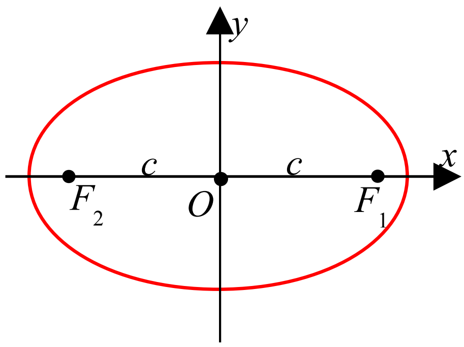
## §1. *Эллипс.*




***Определение.*** *Эллипсом* называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые *фокусами*, что сумма расстояний от произвольной точки $M$ эллипса до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \text{const}, \qquad (1)$$

т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$ .




Составим уравнение эллипса в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox\uparrow\uparrow$. Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$|MF_1| = \ , \qquad |MF_2| = \ .$$

Согласно определению (1) имеем

$$= 2a - \ .$$

Возведем обе части равенства в квадрат и сократим одинаковые слагаемые:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \ + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \ .$$

$$4xc = 4a^2 - 4a \quad \Leftrightarrow \quad a \ = a^2 + xc.$$

Еще раз возводим в квадрат, сокращаем и группируем:

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Согласно определению $a < c$; поэтому можем обозначить $b^2 = a^2 - c^2$ , и разделив на $a^2b^2$, окончательно получаем

$$+ \ = 1 \ . \qquad (2)$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки эллипса удовлетворяют уравнению (2). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (2), то выполнено (1).

Из (2) выразим $y^2 = b^2(1- \quad)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2 = a^2 - c^2$:

$$|MF_1| = \quad = \quad = \quad =$$

$$= \quad =$$

$$= \quad = \quad = \left| a - \quad \right|.$$

Аналогично получаем, что $|MF_2| = \left| a + \quad \right|$. Из (2) следует, что $|x| \le a$ (иначе уже первое слагаемое будет больше 1), а по определению, $a < c$ $\Rightarrow$ оба выражения под модулем неотрицательны. Поэтому

$$|MF_1| + |MF_2| = a - \quad + a + \quad = 2a. \qquad \blacksquare$$

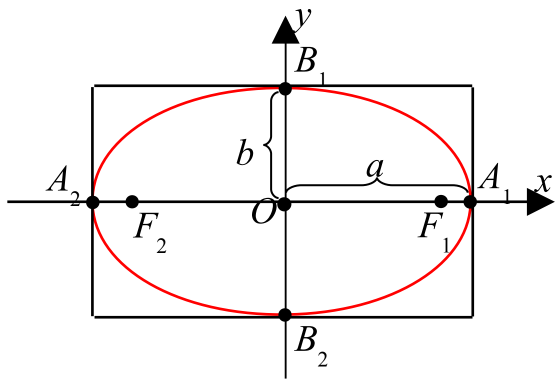
Уравнение (2) называется *канонический уравнением* эллипса.

*Геометрические свойства эллипса.*

**1.** Из (2) следует, что $|x| \le a$, $|y| \le b$. Значит, эллипс целиком содержится в прямоугольнике, определяемыми этим неравенствами.

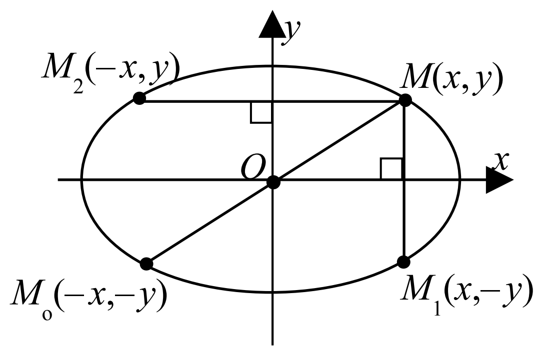
Подчеркнем, что это и все другие свойства выводятся только из уравнения эллипса, без ссылки на наглядность чертежа. Поэтому и раздел геометрии, который мы сейчас изучаем, называется «Аналитическая геометрия».

**2.** Координатные оси пересекают эллипс в точках $A_1(a,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0)$, $B_1(0,\ b)$, $B_2(0,\ -b)$, которые называются его *вершинами*. Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$ называются *большим и малым диаметрами эллипса*, а вместе – главными диаметрами. Числа $a$ и $b$ называются *большой и малой полуосями*.




**3.** Координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда пара $(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (2). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также и пары $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$, которые задают точки,



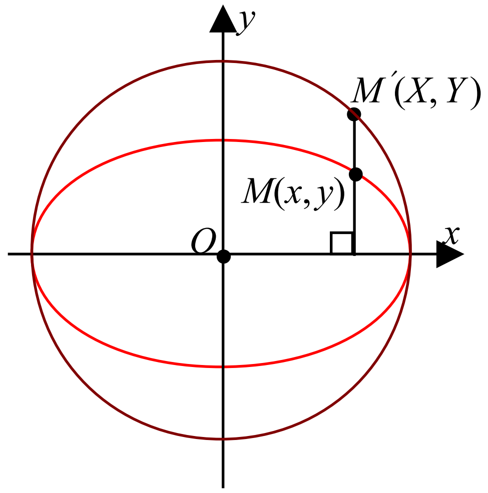
симметричные $M$ относительно $Ox$, $Oy$ и точки $O$ соответственно.

**4.** Эллипс может быть получен из окружности

$$\gamma' : X^2 + Y^2 = a^2 \qquad (**)$$

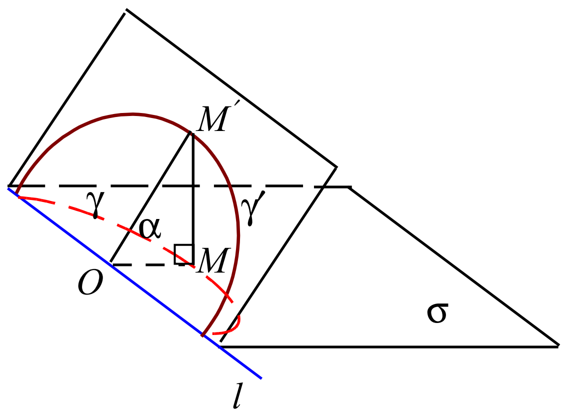
в результате равномерного ее сжатия вдоль оси $Oy$ с коэффициентом $k = a/b$. Действительно, при таком сжатии точка $M'(X, Y) \in \gamma'$ будет переходить в точку $M(x, y)$, где

$$\begin{cases} x = X, \\ y = Y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x, \\ Y = y. \end{cases}$$




Подставляя последние формулы в (**), получим, что координаты точки $M$ удовлетворяют (2), т.е. $M \in \gamma$.

**5.** Эллипс может быть получен из окружности в результате проекции окружности на плоскость $\sigma$ непараллельную плоскости окружности . Действительно, при такой проекции отрезки параллельные линии пересечения плоскостей $l = \sigma \cap$ сохраняют длину, а отрезки перпендикулярные $l$ сжимаются в $1/\cos\alpha$ раз, где $\alpha$ – угол между $\sigma$ и . Таким образом, окружность сжимается по одному направлению, и согласно свойству 4, из нее получается эллипс.




**6.** Самостоятельно убедитесь, что *параметрические уравнения эллипса* имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

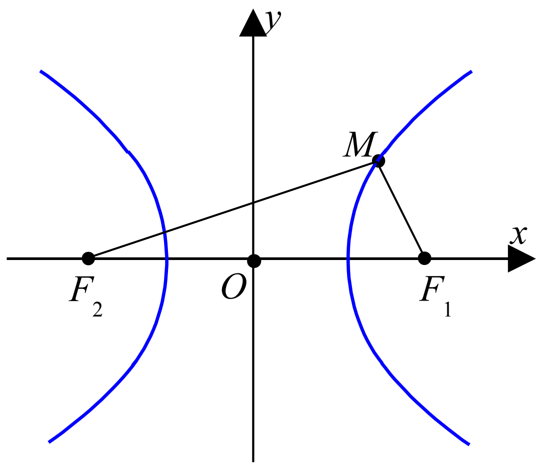
## §2. *Гипербола.*

***Определение.*** *Гиперболой* называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые *фокусами*, что модуль разности расстояний от произвольной точки $M$ гиперболы до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$\big|\,|MF_1| - |MF_2|\,\big| = 2a = \text{const}, \tag{3}$$

т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$ .

Составим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox\uparrow\uparrow$. Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. x




Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$|MF_1| =$ ,

$|MF_2| =$ .

Согласно определению (3) имеем

$= \pm 2a +$ .

Далее совершаем дословно такие же преобразования, что и для эллипса. В результате получим уравнение

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

***Упражнение.*** *Проделайте эти преобразования самостоятельно.*

По определению $a < c$; поэтому можем обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, и разделив на $a^2b^2$ окончательно получаем

$$- = 1\ . \tag{4}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки гиперболы удовлетворяют (4). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (4), то выполнено (3). Из (4) выразим $y^2 = b^2(\ -1)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2 = c^2 - a^2$. Точно так же, как и для эллипса получим

$$|MF_1| = \big|\,a - \ \big|, \qquad |MF_2| == \big|\,a + \ \big|. \qquad (**)$$

***Упражнение.*** *Проделайте это самостоятельно.*

Из (4) вытекает, что $x^2=a^2(1+\ )$ $\Rightarrow$ $|\ x\ |\geq a$, и по определению $c > a$. Значит, второе слагаемое в формулах (**) по модулю больше первого и при $x\geq a$ получаем

$$|\ MF_1|=\ -\ a, \qquad |\ MF_2|=a+\ ,$$

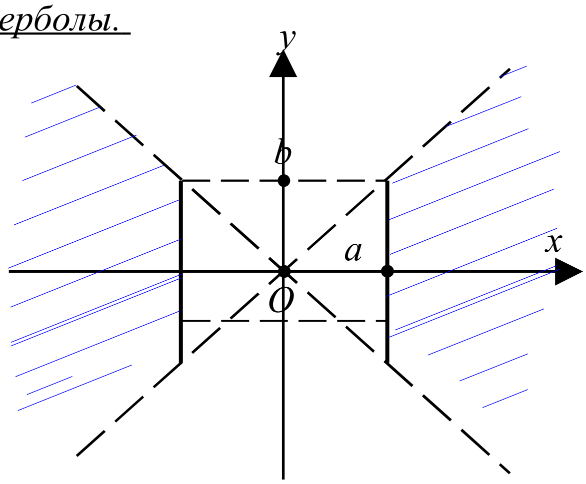
а при $x\leq -a$ получаем

$$|\ MF_1|=a-\ , \qquad |\ MF_2|=-a-\ .$$

В обоих случаях выполняется (3). ■

Уравнение (4) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

*Геометрические свойства гиперболы.*




**1.** Мы уже отмечали, что для любой точки $M(x,y)$ на гиперболе

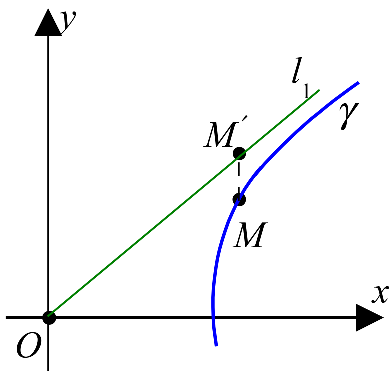
$$x^2=a^2(1+\ )\ \Rightarrow |\ x\ |\geq a,$$

кроме того (4) $\Rightarrow$

$$x^2>\ \ \Leftrightarrow\ |\ x\ |>|\ y\ |\ .$$

Значит вся гипербола содержится в области, определяемой этими неравенствами. Она заштрихована на рисунке.

**2.** Ось $Ox$ пересекает гиперболу в точках $A_1(a,\ 0)$, $A_2(-\ a,\ 0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Ось $Oy$ ее не пересекает. Числа $a$ и $b$ называются *полуосями гиперболы* – *действительной и мнимой*.




**3.** Дословно так же, как и для эллипса доказывается, что координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

**4.** Прямые $l_1$: $y=\ \ x$ и $l_2$: $y=-\ \ x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Гипербола неограниченно к ним приближается, но нигде не пересекает. Действительно, пусть $M(x,y)$ – точка на гиперболе, а $M'(x,y')$ – на соответствующей асимптоте. Тогда расстояние от точки $M$ до асимптоты меньше, чем $|\ MM'|$. При этом

$$|\ MM'|=|\ y'|-|\ y|\ .$$

$$(y')^2=\ \ x^2,\quad y^2=b^2(\ -1)\quad (*_*^*)$$

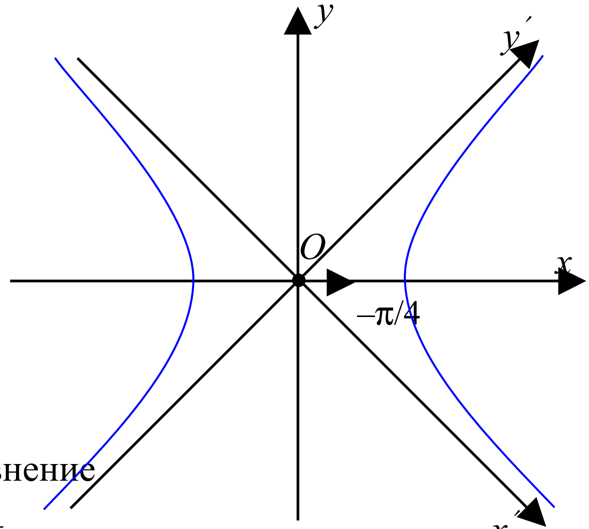
Из этих равенств вытекает, что при $|\,x\,| \longrightarrow \infty$ будет $|\,y'\,| \longrightarrow \infty$ и $|\,y\,| \to \infty$ . Кроме этого,

$$(y')^2 - y^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; |\,y'\,| - |\,y\,| = \longrightarrow 0 \text{ при } |\,x\,| \longrightarrow \infty.$$

Заметим, что обе асимптоты вместе можно задать вместе одним уравнением $\quad - \quad = 0$ . Для его получения достаточно в правой части уравнения (4) заменить 1 на 0. Асимптоты проходят через диагонали прямоугольника, который определяется неравенствами $|\,x\,| \le a$, $|\,y\,| \le b$. Он называется *фундаментальным прямоугольником гиперболы*. Для построения гиперболы рекомендуется сначала изобразить этот прямоугольник.

**5.** При $a = b$ гипербола называется *равнобокой*. Ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2\,, \tag{5}$$




а асимптоты имеют уравнения $l_1$: $y = \ x$ , $l_2$: $y = -\,x$ . Очевидно, что $l_1 \perp l_2$ , и мы можем выбрать их за оси новой декартовой СК $Ox'y'$, которая получается из $Oxy$ поворотом на угол $-45^{\circ}$. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \ (\,x' + y'\,)\,, \\ y = \ (-x' + y'). \end{cases}$$

Подставим их в (5) и получим уравнение

$$2x'y' = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \quad ,$$

где $k = a^2/2$. Таким образом, равнобокая гипербола задает график обратной пропорциональности.

**6.** Параметрические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\, t\,, \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t,\ t \in \mathbf{R}\,. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a(t + 1/t), \\ y = b(t - 1/t),\ t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

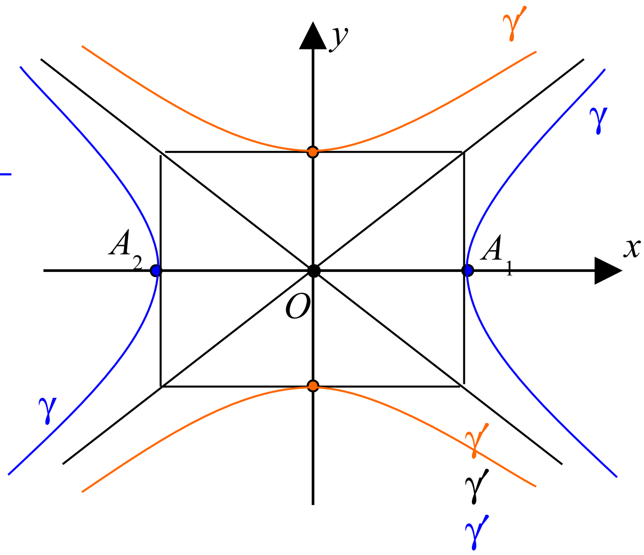
Знак «+» соответствует одной ветви гиперболы, а «–» – другой ветви.

***Упражнение.*** Проверьте это самостоятельно.

**7.** Гипербола

$$\gamma'\colon\ - = -1\ ,$$

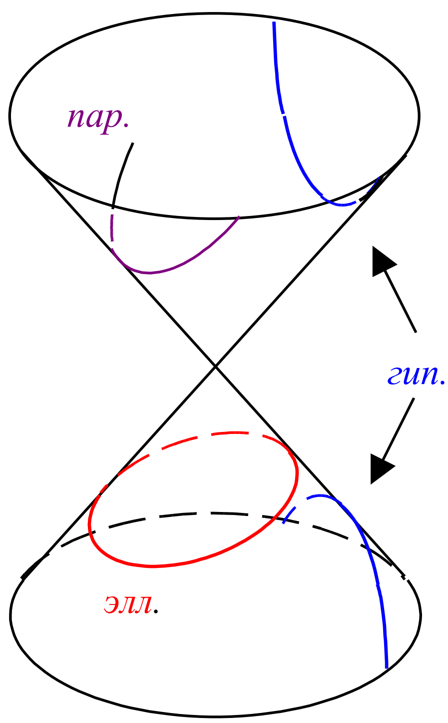
называется сопряженной к гиперболе γ, заданной уравнением (4). Она имеет тот же фундаментальный прямоугольник, те же асимптоты, только расположена в другой паре вертикальных углов, образованных этими асимптотами.




## §3. *Конические сечения. Парабола.*

***Определение.*** Коническим сечением (КС) называется кривая, по которой коническую поверхность пересекает плоскость, не проходящая через вершину этой поверхности.

В следующей главе мы изучим, что коническая поверхность выглядит именно так, как это изображено на рисунке, и убедимся, коническими сечениями могут быть эллипс, гипербола и парабола. Причем, парабола получается тогда и только тогда, когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса.

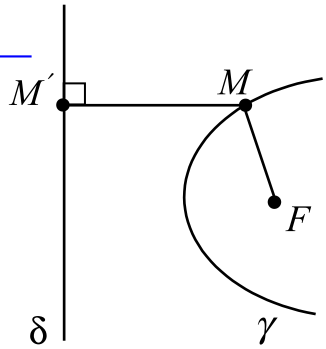



Следующие две теоремы примем без доказательства.

***Теорема* 1.** *Для всякого КС* $\gamma$, *кроме окружности существуют точка* $F$ , *называемая фокусом, и прямая* $\delta$ , *называемая директрисой, такие что отношение расстояний от произвольной точки*

*M*$\in\gamma$ *до F и от M до* $\delta$ *есть величина постоянная (т.е. независящая от выбора точки* $M\in\gamma$).

Эта величина $\varepsilon = |MF|/|MM'|$ называется [эксцентриситетом](#) конического сечения. Чем меньше $\varepsilon$, тем ближе кривая расположена к фокусу. При $0<\varepsilon<1$ кривая замкнута и представляет собой эллипс. Чем ближе $\varepsilon$ к единице, тем более эллипс вытянут. При $\varepsilon=1$ он, как бы, достигает бесконечной длины, и происходит его разрыв: эллипс превращается в параболу.

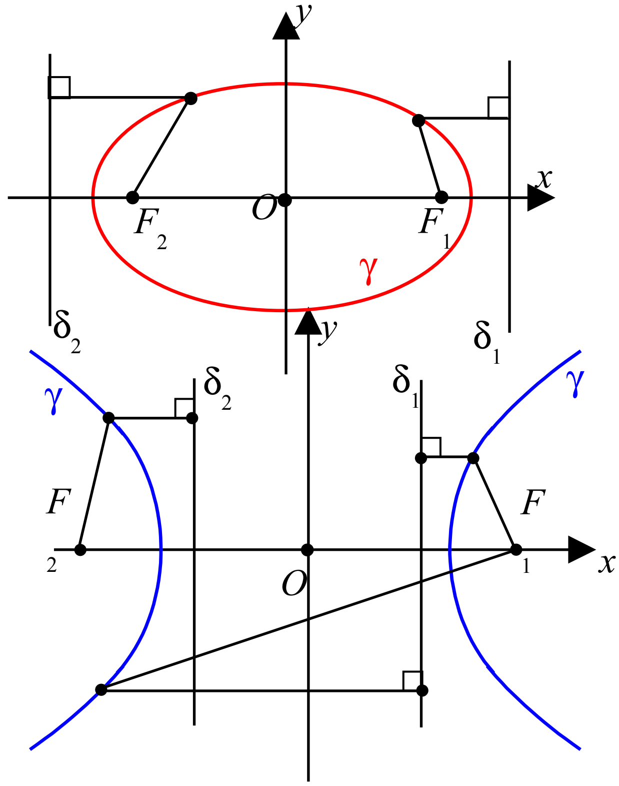



Чем больше $\varepsilon$, тем ближе кривая расположена к директрисе. При $1<\varepsilon<\infty$ получается гипербола.

Очевидно, что эксцентриситет и расстояние $|FF'|$ от фокуса до директрисы однозначно определяют КС. Действительно, если два КС имеют одинаковое расстояние от фокуса до директрисы, то мы можем движением совместить их фокусы и директрисы. А если у них еще одинаковое $\varepsilon$, то и сами КС совместятся. Если же два КС имеют одинаковое $\varepsilon$, но разное расстояние от $F$ до $\delta$, то они подобны. В частности, все параболы подобны друг другу.


***Теорема*** **2.** *Эксцентриситет эллипса или гиперболы, заданных своими каноническими уравнениями* (2) *или* (4), *равен c/a, фокусы имеют координаты* $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-\ c,\ 0)$, *а директрисы задаются уравнениями*

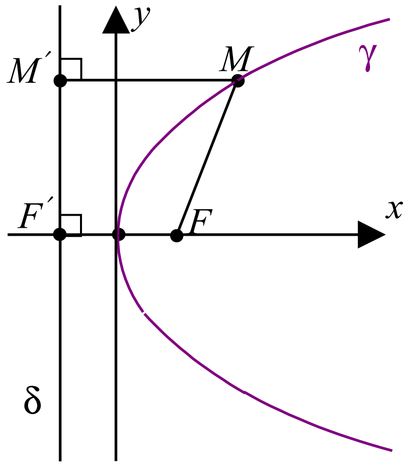
$\delta_1$: $x=$ , $\delta_2$: $x=$



(напомним, что $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса, и $c^2 = a^2 + b^2$ для гиперболы).

Из этой теоремы следует, что фокусы эллипса или гиперболы, которые мы определили в §1 и в §2, совпадают с фокусами, определенными в этом параграфе. Кроме того, эллипс и гипербола имеют две пары фокус-директриса, и определить фигуру можно с помощью любой из пар.

***Определение.*** *Параболой* называется КС, эксцентриситет которого равен единице.




Составим уравнение параболы в декартовой СК. Пусть $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы. Начало координат поместим в середину отрезка $FF'$ и направим $Ox \uparrow\uparrow$ . Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокус будет иметь координаты $F(p/2,\ 0)$, а директриса – уравнение $\delta$: $x = -p/2$ .

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда

$$|MF| = \ , \quad |MM'| = x + \ .$$

Согласно определению $|MF|^2 = |MM'|^2 \Leftrightarrow {}^2 + y^2 = {}^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 2px\ . \qquad (6)$$

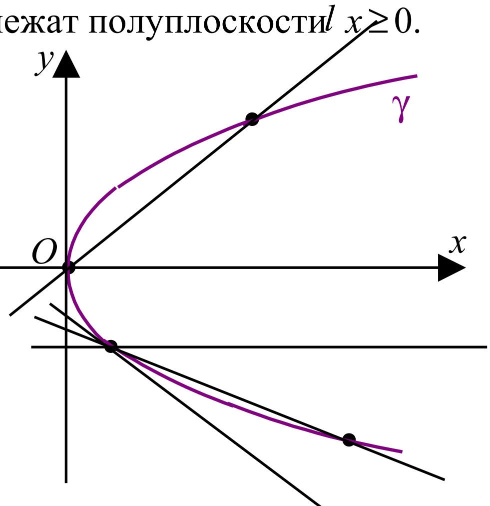
Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (6), то

$$|MF|^2 = {}^2 + y^2 = x^2 - px + \ + 2px = x^2 + px + \ = {}^2 = |MM'|^2$$

Уравнение (6) называется *каноническим уравнением параболы*. ■

*Геометрические свойства параболы.*

**1.** Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.




**2.** Если $M(x, y) \in \gamma$, т.е. пара $(x, y)$ удовлетворяет (6), то этому уравнению удовлетворяет также и пара $(x, -y)$, которая задает точку симметричную $M$ относительно оси $Ox$. Поэтому

$Ox$ является осью симметрии параболы. Других симметрий у параболы нет.

**3.** Координатные оси пересекают параболу только в точке $O$, которая называется *вершиной параболы*.
Любая другая прямая, проходящая через вершину, пересекает параболу еще в одной точке.

Действительно, любую прямую $l$, проходящую через $O$, кроме оси $Oy$ можно задать уравнением $y = kx$. Для того, чтобы найти ее общие точки с параболой $\gamma$ решаем систему уравнений

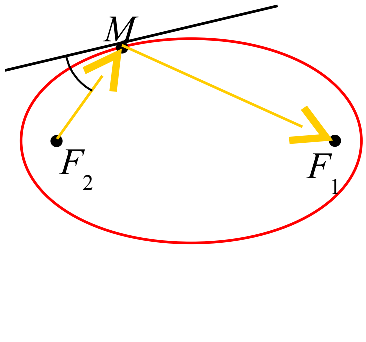
$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0, \\ y = kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k^2x - 2p) = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

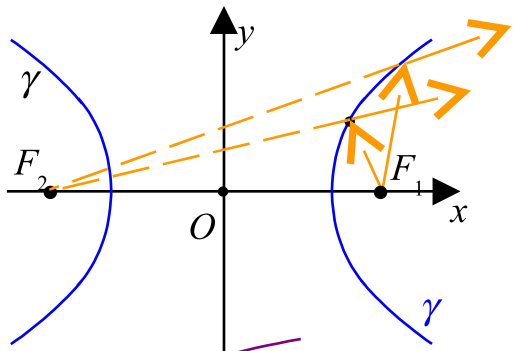
При $k \neq 0$ получаем два решения – $(0,0)$ и $^{2}$, а при $k = 0$ – только одно – $(0,0)$. Значение $k = 0$ соответствует оси $Ox$.

Аналогично, можно доказать, что любая прямая, параллельная оси параболы пересекает ее в одной точке, а любая другая прямая, проходящая через эту точку, кроме касательной, обязательно пересечет параболу еще в одной точке.

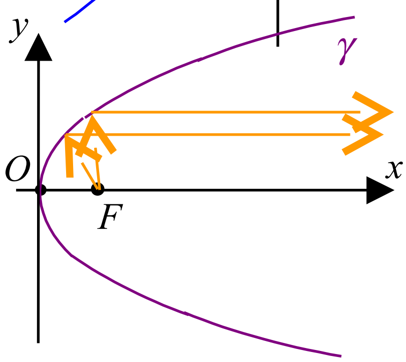
Отметим еще ряд интересных *оптических свойств* конических сечений.

Луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса, проходит через второй его фокус. Математически это означает, что $\forall\ M \in \gamma$, отрезки $MF_1$ и $MF_2$ образуют с касательной к эллипсу в точке $M$ равные углы. Луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажется исходящим из второго фокуса.



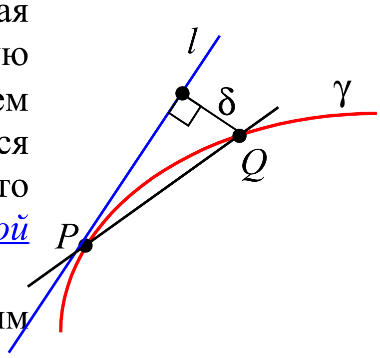

Луч света, исходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы, движется параллельно ее оси. И, наоборот, лучи,



приходящие из бесконечности параллельно оси параболы, концентрируются в фокусе. На этом свойстве параболы и основано действие параболических рефлекторов, параболических антенн и радаров.

## §4. *Касательные к коническим сечениям.*

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая, $P$ – точка на ней. Выберем близкую к ней точку $Q\in\gamma$. Прямую $PQ$ назовем секущей. Если при $Q \longrightarrow P$ стремится занять определенное положение $l$, то прямая $l$ называется *касательной к кривой* $\gamma$ *в точке* $P$.




Математически более точным является следующее определение.

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая, $P$ – точка на ней, а $l$ – некоторая прямая, проходящая через $P$. Выберем близкую к $P$ точку $Q\in\gamma$. Обозначим $d=|PQ|$, $\delta$ – расстояние от $Q$ до $l$. Если $=0$, то прямая $l$ называется *касательной к кривой* $\gamma$ *в точке* $P$.

Пусть кривая $\gamma$ задана уравнением в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$, а $P(x_0, y_0)\in\gamma$. В курсе дифференциальной геометрии будет доказано, что вектор градиента функции $\varphi$, вычисленный в точке $P$

$$\text{grad}_P\varphi = {}_P$$

будет вектором нормали касательной к кривой $\gamma$ в точке $P$, и поэтому уравнение касательной имеет вид:

$$(x-x_0) + (y-y_0)=0.$$

Пусть наша кривая – это эллипс. Его уравнение

$$+ -1=0\ .$$

Тогда

$$\text{grad}_P\varphi = \ ,$$

а уравнение касательной в точке $P$ –

$$(x-x_0) + (y-y_0)=0.$$

Разделим уравнение на 2 и раскроем скобки:

$$x+ y- =0.$$

Поскольку $P(x_0, y_0)\in\gamma$, то выражение в скобках равно 1, и мы окончательно получаем уравнение касательной к эллипсу:

$$x+ y=1.$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением (4):

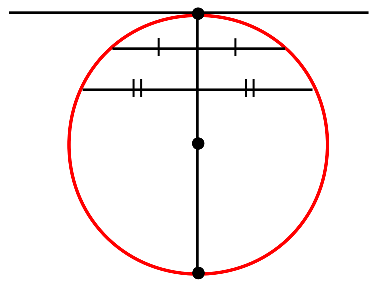
$$x- y=1.$$

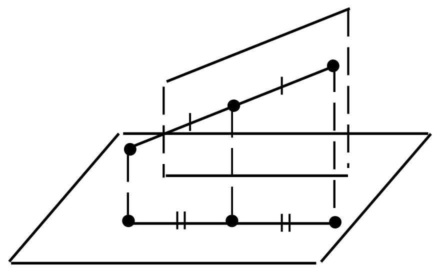
***Упражнение.*** *Пусть парабола задана каноническим уравнением* (6). *Докажите, что уравнение касательной к параболе в точке* $P(x_0, y_0)$ *имеет вид* $y_0 y - p(x + x_0) = 0$.

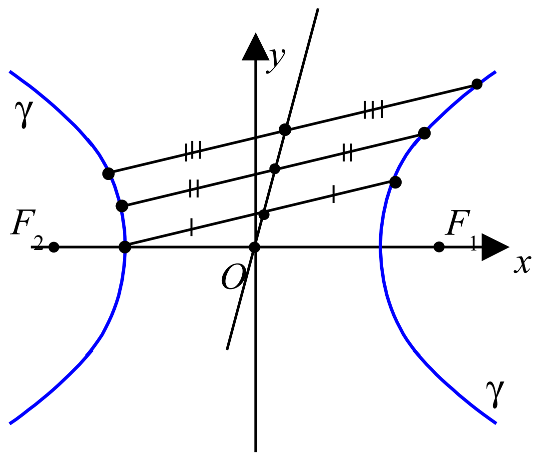
## §5. *Диаметры конических сечений.*

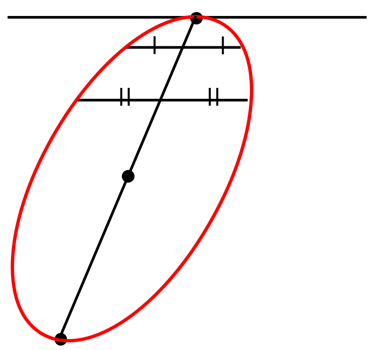
***Определение.*** *Диаметром эллипса или гиперболы* называется любая прямая, проходящая через их центр симметрии. *Диаметром параболы* называется любая прямая, параллельная ее оси. Отрезок, два конца которых лежат на коническом сечении называется *хордой*.

Мы уже знаем, что эллипс является проекцией окружности. Касательные к окружности или эллипсу можно характеризовать, как прямые, имеющие с кривой только одну общую точку. Поэтому проекцией касательной будет тоже касательная. Из школьной программы вы должны знать, что середины параллельных хорд окружности лежат на диаметре перпендикулярном хордам, при этом, касательная к окружности в конце этого диаметра параллельна хордам. Очевидно, что при проецировании параллельные отрезки переходят в параллельные отрезки, а середина отрезка – в середину его проекции. Поэтому вышеупомянутые свойства окружности переносятся на эллипс. Более подробно мы будем про это говорить при изучении раздела «Методы изображений».







Оказывается, теми же свойствами обладают также гипербола и парабола.

***Теорема 3.*** *Середины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре. Направление этого диаметра называется* *сопряженным к направлению хорд*.

***Доказательство.*** Пусть $\gamma$ – эллипс или гипербола. Тогда ее уравнение можно записать в виде

$$\alpha x^2+\beta y^2-1=0.$$

Семейство параллельных хорд можно задать уравнениями $y = kx + b$, где $k$ одинаково для всех хорд. Тогда координаты концов хорд удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \alpha x^2+\beta y^2-1=0, \\ y=kx+b. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha x^2+\beta(kx+b)^2-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta k^2)x^2+(2\beta kb)x+(\beta b^2-1)=0. \quad (*)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной координаты $x$. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-\ \ ,$$

где $x_1$ соответствует одному концу хорды, а $x_2$ – второму. Если $C(x_o, y_o)$ – середина хорды, то

$$x_o=\ =-\ .$$

Подставляя это $x_o$ в уравнение хорды получаем

$$y_o=k(-\ )+b=\quad \Rightarrow$$

$$=-\quad \Leftrightarrow \quad y_o=-\ x_o\,.$$

Последнее выражение от $k$ не зависит. Значит, середины всех хорд лежат на одной прямой

$$y=-\ x\,,$$

Эта прямая проходит через начало координат, т.е через центр кривой; значит она является диаметром. Ее угловой коэффициент $k'=-\alpha/\beta k$, т.е для эллипса $k'=-b^2/a^2k$, а для гиперболы – $k'=b^2/a^2k$.

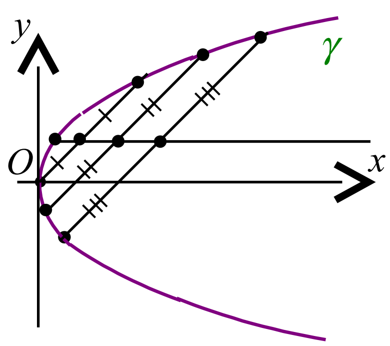
*Диаметры*, имеющие уравнения $y=kx$ и $y=k'x$, называются *сопряженными*. Очевидно, что свойство диаметров быть сопряженными взаимно, поскольку $k=-\alpha/\beta k'$, т.е $k$ выражается через $k'$ по той же формуле, что и $k'$ через $k$.

Пусть теперь $\gamma$ – парабола. Тогда координаты концов параллельных хорд находятся из системы

$$\begin{cases} y^2-2px=0\,, \\ y=kx+b. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $x$ через $y$ и подставим в первое уравнение:

$$y^2-\ y+\ =0 \quad \Rightarrow$$
$$y_o=\ =\ =\mathrm{const}.$$



Значит, все середины хорд лежат на прямой
$y = p/k$, которая параллельна оси $Ox$. ■

***Теорема* 4.** *Если диаметр пересекает коническое сечение, то касательные в точках пересечения параллельны сопряженному диаметру.*

***Доказательство.*** Пусть $Q(x_o, y_o)$ – точка пересечения диаметра $y = kx$ с эллипсом или гиперболой $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$. Уравнение касательной к кривой в точке $Q$ будет

$$(\alpha x_o)\,x + (\beta y_o)\,y - 1 = 0.$$

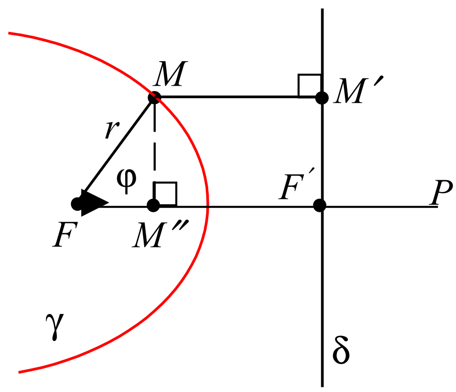
Отсюда

$$y = - \; x + \; .$$

Угловой коэффициент этой прямой $k' = -$ . Т.к. точка $Q(x_o, y_o)$ лежит на диаметре, то $y_o = kx_o$ ⇔ $x_o / y_o = 1/k$ . Отсюда $k' = -\alpha/\beta k$, т.е. угловой координат касательной такой же, как и у сопряженного диаметра.

■

## §6. *Уравнения конических сечений в полярной системе координат.*




Пусть $\gamma$ – коническое сечение, $\varepsilon$ – его эксцентриситет, $F$ – фокус, $FF'$ – перпендикуляр, опущенный на директрису $\delta$. Выберем полярную СК так, чтобы полярная ось совпадала с лучом $FF'$. Обозначим $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы.

Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка кривой $\gamma$, $MM'$ – перпендикуляр к $\delta$, $MM'$ – перпендикуляр к полярной оси. Тогда

$$|FM| = r, \qquad |MM'| = p - r \cdot \cos\varphi. \qquad (*)$$

Согласно определению $|FM|/|MM'| = \varepsilon$. Подставим в это равенство формулы $(*)$:

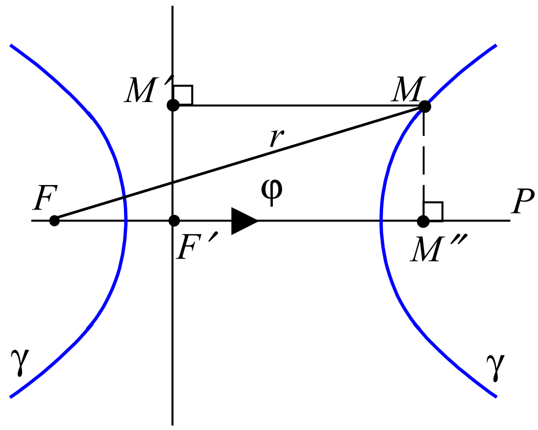
$$= \varepsilon.$$

Для того, чтобы получилось уравнение в явном виде, мы выразим из этого равенства $r$:

$$\varepsilon(p - r \cdot \cos\varphi) = r \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon p = r + \varepsilon r \cdot \cos\varphi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \; . \qquad (7)$$

Но данное уравнение получается только в случае, изображённом на первом чертеже, т.е. в случае когда кривая расположена по одну сторону от директрисы. Значит, оно верно для эллипса и параболы. Также (7) задаёт ещё одну ветвь гиперболы. Гипербола имеет ещё одну ветвь, расположенную по другую сторону от $\delta$. Если точка $M(r,\ \varphi)$ принадлежит этой ветви, то




$$|MM'| = |FM''| - |FF'| =$$
$$= r \cdot \cos\varphi - p.$$

Тогда точно также получим уравнение

$$r = \ .$$

Окончательно получается уравнение гиперболы

$$r = \ . \qquad (7')$$

## §7. *Общее уравнение кривой второго порядка. Центр кривой.*

***Определение.*** *Кривой второго порядка* называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0, \qquad (8)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ отличен от нуля. Выражение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

называется *квадратичной часть уравнения*, $2a_1x + 2a_2y$ – *линейной частью*, а $c$ – *свободным членом*.

Если мы перейдем к новой СК $Ox'y'$, то формулы замены координат будут иметь вид

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + b_1, \\ y = \gamma x' + \delta y' + b_2. \end{cases}$$

Если мы подставим эти выражения в (8), то снова получим уравнение такого же вида, т.е. содержащее $x'$ и $y'$ во второй степени. Поэтому наше определение корректно, т.е не зависит от выбора СК. В дальнейшем, СК всегда предполагается декартовой.

***Определение.*** Точка $O'$ называется *центром кривой второго порядка*, если она является ее центром симметрии. Кривая, которая имеет центр, называется центральной.

Предположим, что СК выбрана так, что ее начало находится в центре кривой. Тогда одновременно с точкой $M(x, y)$ кривой будет принадлежать и точка $M'(-x, -y)$. Подставим ее координаты в (7) и получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_1x - 2a_2y + c = 0. \qquad (8')$$

Вычтем из равенства (8) равенство (8′):

$$4(a_1x + a_2y) = 0.$$

И это должно выполняться для любой точки $M(x, y)$ на кривой. Поэтому $a_1 = a_2 = 0$, если начало координат находится в центре. Поэтому, если изначально начало координат не находится в центре $O'$, то мы совершим параллельный перенос координатных осей в центр, и уравнение кривой в новой СК $O'x'y'$ примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0, \qquad (9)$$

т.е. линейная часть уравнения исчезнет. При этом, коэффициенты квадратичной части останутся прежними; это будет установлено в процессе доказательства следующей теоремы.

***Теорема 5.*** *Координаты* $(x_0, y_0)$ *центра кривой, заданной уравнением* (8), *находятся из системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

***Доказательство.*** Введем новую декартову СК $O'x'y'$, которая получается из $Oxy$ переносом начала в центр $O'(x_0, y_0)$ кривой. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \qquad (11)$$

Подставим эти формулы в (7):

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 +$$
$$+ 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + c = 0.$$

После преобразований получаем

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' +$$
$$+ 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + c' = 0,$$

где $c' = \varphi(x_o, y_o)$ – значение левой части уравнения (7) в точке $O'$. Поскольку в новой СК коэффициенты при $x'$ и $y'$ должны быть равны нулю, то получаем (10).

Заметим, что уравнение кривой в новой СК можно выписать, не совершая подстановки (11) и преобразований: коэффициенты квадратичной части не изменяются, надо только вычислить $c'$.

Обозначим $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ – *матрица квадратичной части уравнения* (8) (она же является матрицей системы линейных уравнений (10)),

$$\delta = \det \mathbf{A}, \qquad \delta_x = -\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix}.$$

<u>1 *случай.*</u> $\delta \neq 0$. Тогда по правилу Крамера система (10) имеет единственное решение

$$x_o = \delta_x/\delta, \quad y_o = \delta_y/\delta, \quad (*)$$

а кривая имеет единственный центр. Минусы были поставлены выше потому, что $a_1$ и $a_2$ находятся в (10) не в правой части, а в левой.

<u>2 *случай.*</u> $\delta = 0$, $\delta_x \neq 0$ и $\delta_y \neq 0$ (заметим, что в случае $\delta = 0$, определители $\delta_x$ и $\delta_y$ будут равны или неравны нулю только одновременно). Тогда ранг расширенной матрицы системы (10) будет равен 2, а rank $\mathbf{A}$=1. Значит, согласно теореме Кронекера-Капелли система (10) не имеет решений, а кривая не имеет центра.

<u>3 *случай.*</u> $\delta = 0$, $\delta_x = \delta_y = 0$. Тогда оба уравнения в (10) пропорциональны, а значит, эта система имеет бесконечное количество решений, а кривая – бесконечное количество центров.

Упростим еще величину $c'$:

$$c' = \varphi(x_o, y_o) = a_{11}x_o^2 + 2a_{12}x_o y_o + a_{22}y_o^2 + 2a_1 x_o + 2a_2 y_o + c =$$

$$= (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1)x_o + (a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_2)y_o + a_{12}x_o + a_{22}y_o + c.$$

В силу (9) выражения в скобках равны нулю, и мы имеем

$$c' = a_1 x_o + a_2 y_o + c. \qquad (12)$$

Подставляя сюда (*) получаем

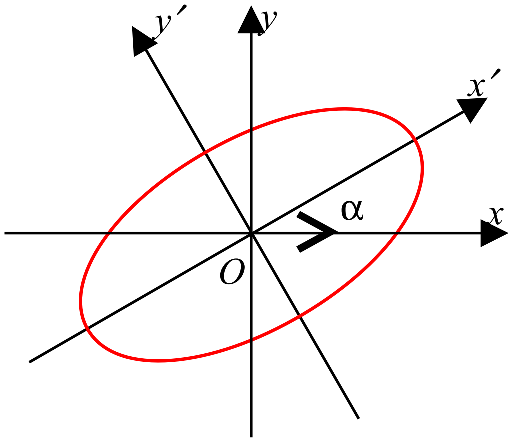
$$c' = a_1 + a_2 + c = (a_1\delta_x + a_2\delta_y + c) = \;, \qquad (13)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix}.$$

В скобках как раз стоит разложение $\Delta$ по последней строке или последнему столбцу. Равенство (13) позволяет выписать (9) не находя координат центра кривой. Но, если уже центр найден, то легче вычислить $c'$ по формулам (12).

## §8. *Классификация центральных кривых второго порядка* (*случай* $\delta \neq 0$).




Попробуем дальше упростить уравнение (9). Выберем новую декартову СК $O'x''y''$, которая получается из $O'x'y'$ поворотом координатных осей на некоторый угол $\alpha$. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \quad (14)$$

Подставим эти формулы в (9):

$$a_{11}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha)^2 + c' = 0,$$

Раскроем скобки и приведем подобные при одинаковых координатах. Тогда коэффициент $x''y''$ будет равен

$$-a_{12}\sin^2\alpha + (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cdot\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha$$

Приравняем это выражение к нулю, и получившееся уравнение разделим на $-\cos^2\alpha$ :

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\,\mathrm{tg}\,\alpha + a_{12} = 0. \qquad (15)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного $\mathrm{tg}\,\alpha$, его дискриминант

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12} \geq 0.$$

Значит, (14) всегда имеет решение, т.е всегда существует такой угол $\alpha$, что в новой СК мы получим уравнение кривой без слагаемого, содержащего $x''y''$. В результате наше уравнение будет иметь вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \ = 0. \qquad (16)$$

Примем пока без доказательства, что коэффициенты $\lambda_1$ и $\lambda_2$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,;$$

в развернутом виде:

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0, \qquad (17)$$

где $s = \mathrm{trace}\,\mathbf{A} = a_{11} - a_{22}$ – след матрицы $\mathbf{A}$. Оно называется *характеристическим уравнением кривой второго порядка*. Согласно теореме Виета получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s\,,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta.$$

Относительно новой СК $O'x''y''$ получаем

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \delta' = \det \mathbf{A}' = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta, \quad s' = \mathrm{trace}\,\mathbf{A}' = \lambda_1 + \lambda_2 = s,$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/\delta \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\Delta/\delta) = \Delta\,.$$

Таким образом, $\delta' = \delta$, $s' = s$, $\Delta' = \Delta$, т.е. величины $\delta$, $s$, $\Delta$ не изменяются при переходе к новой декартовой СК. Поэтому они называются *инвариантами кривой второго порядка*.

*1 случай*: $\Delta \neq 0$. Если опустить штрихи, то уравнение (16) можно переписать в виде

$$+ = 1. \qquad (18)$$

Обозначим $a^2 = |\Delta/\lambda_1\delta|$, $b^2 = |\Delta/\lambda_2\delta|$.

а) $\delta > 0$, $s\Delta < 0$. Тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, т.е. $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака, и $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \Delta < 0$, т.е. знак $\Delta$ противоположен знаку $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Поэтому оба знаменателя в (17) положительны, и уравнение (15) задает эллипс:

$$+ = 1\,.$$

б) $\delta > 0$, $s\Delta > 0$. Тогда оба знаменателя в (18) отрицательны, и уравнение имеет вид

$$+ = -1\,.$$

Говорят, что оно задает *мнимый эллипс*. На действительной плоскости это пустое множество.

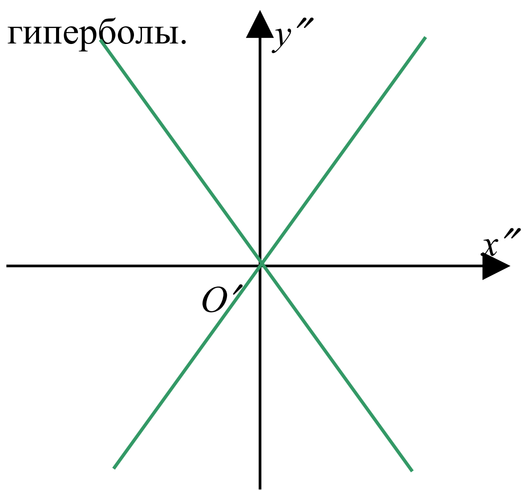
в) $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют разные знаки, и поэтому знаменатели в (17) имеют разные знаки. Получаем уравнение

$$- = 1 \quad \text{или} \quad - = -1.$$

В любом случае получается уравнение гиперболы.

*2 случай*: $\Delta = 0$. В этом случае уравнение (15) принимает вид (штрихи опускаем):

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0. \qquad (19)$$



Обозначим $a^2=|\lambda_1|$, $b^2=|\lambda_2|$.

а) $\delta<0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разного знака и (18) можно переписать в виде

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (ax-by)\cdot(ax+by)=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют точки, для которых $ax-by=0$ и точки для которых $ax+by=0$. Поэтому оно определяет *пару прямых*, очевидно, *пересекающихся* в центре $O'$ и симметричных относительно координатных осей.

б) $\delta>0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют одинаковые знаки и (19) можно переписать в виде

$$a^2x^2+b^2y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (ax-i\,by)\cdot(ax+i\,by)=0.$$

($i$ – мнимая единица). Говорят, что это уравнение задает *пару мнимых пересекающихся прямых*. Но пересекаются они в действительной точке $O'$ – центре кривой.

В случае $\delta=\Delta=0$ кривая тоже имеет центр (бесконечное количество центров), но этот случай мы рассмотрим в следующем параграфе.

## §9. *Классификация нецентральных кривых второго порядка* (*случай* $\delta=0$).

Пусть теперь $\delta=0$. Тогда мы не можем использовать процедуру нахождения центра, и сразу совершаем поворот координатных осей на угол, тангенс которого находится из уравнения (14). Получим новую декартову СК с тем же началом $Ox'y'$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x=x'\cdot\cos\alpha-y'\cdot\sin\alpha, \\ y=x'\cdot\sin\alpha+y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Здесь на один штрих с каждой стороны меньше, чем в (14), поскольку это первая замена координат. В этой СК уравнение кривой не будет включать слагаемое, содержащее произведение $x'y'$:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2b_1x'+2b_2y'+c=0, \tag{20}$$

Заметим, что коэффициент $c$ останется прежним, а непосредственное вычисление показывает, что

$$b_1=a_1\cdot\cos\alpha+a_2\cdot\sin\alpha, \qquad b_2=a_1\cdot\sin\alpha+a_2\cdot\cos\alpha.$$

Числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ можно найти из уравнения (17). Так как $\delta=\lambda_1\cdot\lambda_2=0$, то один из корней будет равен нулю. Пусть это будет $\lambda_1$. Имеем уравнение

$$\lambda_2 y'^2+2b_1x'+2b_2y'+c=0. \qquad (21)$$

Для этого уравнения

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}=-\lambda_2 b_1^2.$$

*1 случай*: $\Delta=0 \;\Leftrightarrow\; b_1=0$. Уравнение имеет вид $\lambda_2 y'^2+2b_2y'+c=0$. Выделим полный квадрат:

$$\lambda_2(\,y'^2+y'+\;)-\;+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_2(\,y'+\;)^2-\;+c=0\,.$$

Обозначим $c'=(b_1^2-\lambda_2c)/\lambda_2$, $a^2=|\,c'\,|$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x', \\ y''=y'+\;, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'(0,-b_1/\lambda_2)_{Ox'y'}$ (подчеркнем, что координаты указаны в промежуточной СК $Ox'y'$). Получим уравнение

$$(y'')^2=a^2.$$

а) $c'>0 \;\Rightarrow\; (y'')^2=a^2$, т.е. $y''=a$ или $y''=-a$. Наша кривая – это *пара параллельных прямых*.

б) $c'>0 \;\Rightarrow\; (y'')^2=-a^2$, т.е. $y''=i\,a$ или $y''=-i\,a$. Говорят, что наше уравнение задает *пару мнимых параллельных прямых*.

в) $c'=0 \;\Rightarrow\; (y'')^2=0$. Говорят, что это уравнение задает *пару совпадающих прямых*.

*2 случай*: $\Delta\neq 0 \;\Leftrightarrow\; b_1\neq 0$. Так же, как и в предыдущем случае, выделяем в (21) полный квадрат по $y$:

$$\lambda_2{}^2-\;+2b_1x'+c=0\,,$$

а затем преобразуем так:

$$\lambda_2{}^2+2b_1=0\,.$$

Обозначим $c'=$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'-c', \\ y''=y'+\;, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'_{Ox'y'}$.

Получим уравнение

$$\lambda_2(y'')^2+2b_1x''=0 \quad\Leftrightarrow\quad (y'')^2=2px'',$$

где $p = -2b_1/\lambda_2$ . Это уравнение задает параболу.

Итак, мы установили, что общее уравнение кривой второго порядка (8) задает одну из следующих кривых второго порядка ($\operatorname{sign} x$ означает знак числа $x$).

| $\operatorname{sign}\delta$ | $\operatorname{sign} s\cdot\Delta$ | Кривая и ее каноническое уравнение | Кол-во центров |
|---|---|---|---|
| + | – | Эллипс $+ \ = 1$ | |
| + | + | Мнимый эллипс $+ \ = -1$ | |
| – | ± | Гипербола $- \ = 1$ | 1 |
| – | 0 | Пара пересекающихся прямых $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ | |
| + | 0 | Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ | |
| 0 | ± | Парабола $y^2 = 2px,$ | **0** |
| 0 | 0 | Пара параллельных прямых $x^2 = a^2$<br>Пара мнимых параллельных прямых $x^2 = -a^2$<br>Пара совпадающих прямых $x^2 = 0$ | **∞** |

## §10. *Примеры решения задач.*

**1.** *Составить уравнение кривой, каждая точка которой расположена вдвое дальше от точки* $F(3, 3)$, *чем от оси* $Ox$. *Определить тип кривой и изобразить ее в декартовой системе координат.*

***Решение.*** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, $MM'$ – перпендикуляр, опущенный на $O$. Тогда расстояние от $M$ до $Ox$ равно $|MM'| = |y|$ (см. чертеж в конце решения), а $|MF| =$ . По условию выполняется

$$= 2|y| .$$

Возведение в квадрат, вообще говоря, не является равносильным переходом; но в данном случае обе части равенства неотрицательны. Поэтому, без всяких дополнительных ограничений возводим в квадрат:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4y^2.$$

Мы раскроем только вторую скобку, и после приведения подобных вновь соберем полный квадрат:

$$(x-3)^2 + y^2 - 6y + 9 - 4y^2 = 0,$$

$$(x-3)^2 - 3y^2 - 6y + 9 = 0,$$

$$(x-3)^2 - 3(y^2 + 2y + 1 - 4) = 0,$$

$$(x-3)^2 - 3(y+1)^2 = -12.$$

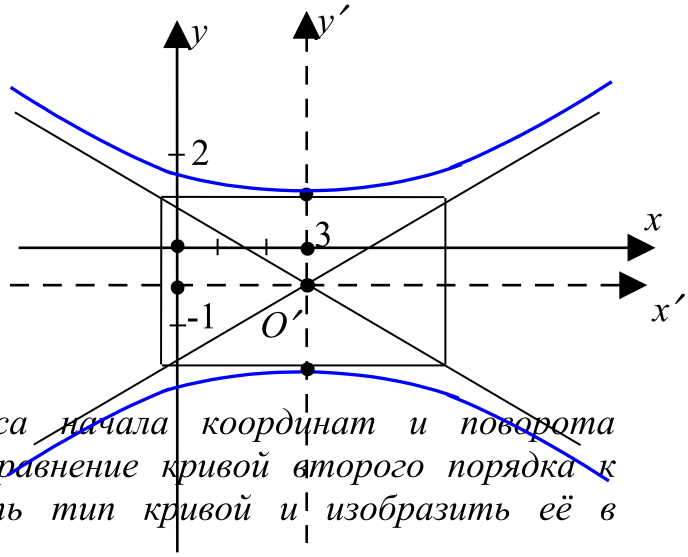
Делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(3,-1)$. Получившееся уравнение делим на $-12$:

$$- = -1.$$

Это уравнение задает гиперболу с полуосями $a$=2 ≈ 3,4 , $b$=2. Центр гиперболы находится в точке $O'(3,-1)$. Подробное описание построения приводится в решении задачи 2а).




**2.** *С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

**а)** $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$

***Решение.*** Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0. \qquad (8)$$

Если

$$\delta = \left| \quad \right| \neq 0,$$

то кривая имеет центр $O'(x_o, y_o)$, координаты которого можно найти из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1 = 0, \\ a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если мы совершим параллельный перенос начала координат в точку $O'$, то уравнение кривой примет вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0, \qquad (9)$$

где

$$c' = a_1 x_o + a_2 y_o + c. \qquad (12)$$

Вычисляем:

$$\delta = \quad = 576 \neq 0,$$

Значит, кривая имеет центр. Найдем координаты центра $(x_o, y_o)$ из системы уравнений (10):

$$\begin{cases} 25x_o - 7y_o + 32 = 0, \\ -7x_o + 25y_o - 32 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x_o - 7y_o = -32, \\ -7x_o + 25y_o = 32. \end{cases}$$

Для решения применим правило Крамера: $x_o =$ , $y_o =$ , где $\delta_x$ получается заменой первого столбца в $\delta$ на столбец свободных членов, а $\delta_y$ – второго столбца:

$$\delta_x = \quad = 32 \cdot \quad = 32 \cdot (-18) = -576.$$

$$\delta_y = \quad = 32 \cdot \quad = 32 \cdot 18 = 576.$$

$$x_o = \quad = -1, \quad y_o = \quad = 1.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(-1, 1)$. Совершим перенос начала координат в точку $O'$ и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

Однако делать эту подстановку в исходное уравнение кривой не следует; мы заранее из теории знаем, что получится в результате этой подстановки: уравнение примет вид (9) (то есть линейная часть уравнения исчезнет, а коэффициенты квадратичной части не изменятся), где $c'$ находится по формуле (12):

$$c' = 32 \cdot (-1) - 32 \cdot 1 - 224 = -288.$$

Уравнение данной кривой второго порядка в новой системе координат:

$$25x'^2 - 14x'y' + 25y'^2 = 288. \qquad (9')$$

Далее совершаем поворот координатных осей на угол $\alpha$, тангенс которого находится по формуле:

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22}) \cdot \operatorname{tg}\alpha - a_{12} = 0, \qquad (15)$$

$$-7\operatorname{tg}^2\alpha + (25 - 25)\operatorname{tg}\alpha + 7 = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha_1 = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -1.$$

Можем выбрать любое из них. Но, как правило, выбираем такое $\alpha$, для которого $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Имеем: $\alpha =$ , $\sin\alpha = \cos\alpha =$ .

Получим новую систему координат $O'x''y''$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha\,, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha\,. \end{cases} \qquad (14)$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = (x'' - y''), \\ y' = (x'' + y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену в (9′):

$$[25(x''-y'')^2 - 14(x''-y'')\cdot(x''+y'') + 25(x''+y'')^2\,] = 288$$

$$[25x''^2 - 50x''y'' + 25\,y''^2 - 14x'' + 14\,y'' + 25x''^2 + 50x''y'' + 25\,y''^2] = 288.$$

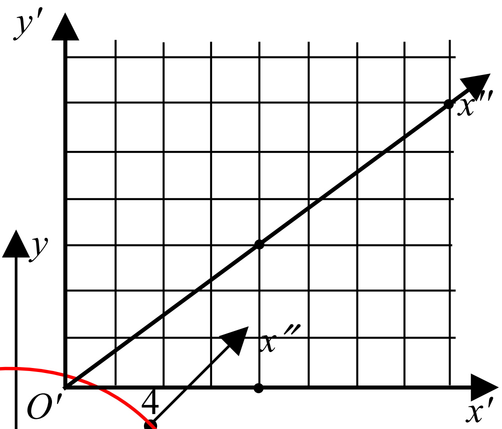
Слагаемые, содержащие произведение $x''y''$ обязательно должны сократиться. Если это не происходит, то следует искать ошибку выше.

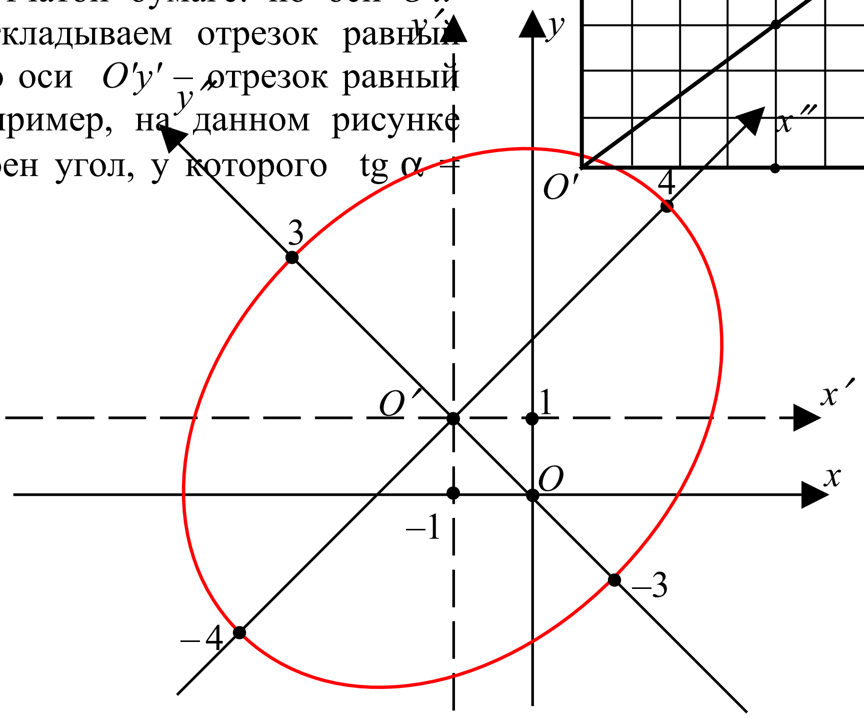
$$[36x''^2 + 64y''^2] = 288,\quad 9x''^2 + 16y''^2 = 144,$$

$$+ \;= 1.$$

Это уравнение задает эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$. Строим эллипс. Для этого сначала строим исходную систему координат $Oxy$, затем в этой системе находим точку $O'$ и строим промежуточную систему координат $O'x'y'$, которая получается из $Oxy$ переносом начала в точку $O'$. Затем поворачиваем координатные оси на выбранный нами ранее угол $\alpha$ и получаем окончательную систему координат $O'x''y''$. Именно на осях этой системы координат мы и откладываем полуоси эллипса.

В нашем случае $\alpha = 45^\circ$, и поэтому повернутые оси легко построить. В более общем случае, если мы нашли, что $\operatorname{tg}\alpha = a/b$, мы этот угол очень легко можем построить на клетчатой бумаге: по оси $O'x'$ мы откладываем отрезок равный $b$, а по оси $O'y'$ – отрезок равный $a$. Например, на данном рисунке построен угол, у которого $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$.



**б)** $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

***Решение.***

$$\delta=\left|\quad\right|=-161-64=-225\neq 0.$$

Значит, ищем координаты центра:

$$\begin{cases}7x_o+8y_o-7=0,\\ 8x_o-23y_o-8=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}7x_o+8y_o=7,\\ x_o-23y_o=8.\end{cases}$$

По правилу Крамера:

$$\delta_x=\left|\quad\right|=-161-64=-225\neq 0,\ \ \delta_y=\left|\quad\right|=0.$$

$$x_o=\ =-1,\ y_o=\ =0.$$

Значит центр кривой находится в точке $O'(1,\ 0)$. Совершаем перенос начала координат в точку $O'$ и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат:

$$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'\end{cases}$$

Находим $c'=-7x_o-8y_o+c=-7-218=-225$. Значит в новой системе координат уравнение кривой примет вид:

$$7x'^2+16x'y'-23y'^2-225=0. \qquad (*)$$

Совершаем поворот координатных осей на угол $\alpha$, тангенс которого находим из уравнения (5):

$$8\,\mathrm{tg}^2\alpha+30\,\mathrm{tg}\alpha-8=0,$$

$$4\,\mathrm{tg}^2\alpha+15\,\mathrm{tg}\alpha-4=0,$$

$$D=225+64=289,$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1=\ =\ ,\ \mathrm{tg}\alpha_2=\ =-4.$$

Выбираем положительный тангенс: $\mathrm{tg}\alpha=$ . Находим $\sin\alpha=$ , $\cos\alpha=$ .
В уравнении $(*)$ делаем замену:

$$[7(4x''-y'')^2+16(4x''-y'')(x''+4y'')-23(x''+4y'')^2]=225,$$

$$[112x''^2-\underline{56x''y''}+7y''^2+64x''^2+\underline{240x''y''}-64y''^2-$$
$$-23x''^2-\underline{184x''y''}-368y''^2]=225$$

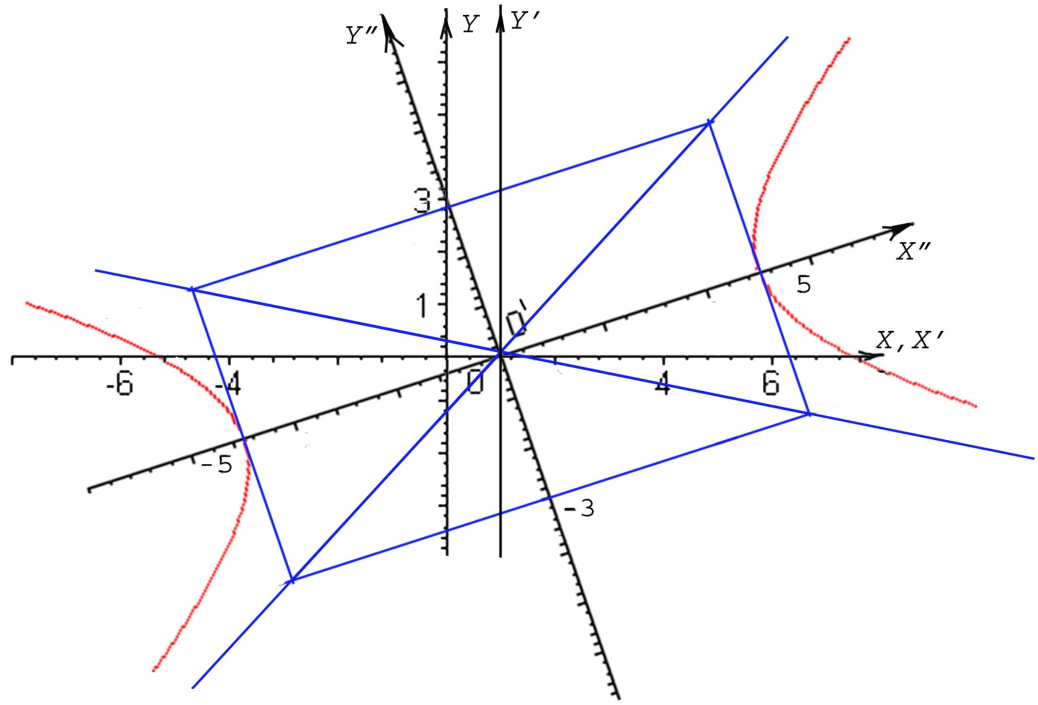
При приведении подобных, слагаемые содержащие произведения $x''y''$ должны сократиться. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$$[153x''^2 - 425y''^2] = 225,$$

$$9x''^2 - 25y''^2 = 225,$$

$$- \quad = 1.$$

Получилось уравнение гиперболы с полуосями $a = 5$, $b = 3$.



Описание построения:

1) $O'(1,0)$ – новое начало координат, $O'x' \| Ox$, $O'y' \| Oy$ – вспомогательные оси;
2) совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$ ; получаем новые координатные оси $O'x''$ и $O'y''$ (способ построения см. в конце решения задачи 2а)).
3) в новой системе координат $O'x''y''$ строим фундаментальный прямоугольник: $a = 5$, $b = 3$ ;
4) проводим диагонали фундаментального прямоугольника, они будут являться асимптотами гиперболы;
5) строим гиперболу: она стремится к асимптотам, касаясь фундаментального прямоугольника.

**в)** $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

$$\delta = \left| \quad = 0 \quad \right|$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра и сразу поворачиваем координатные оси:

$$-12\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 12 = 0,$$

$$D = 49 + 576 = 625,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \quad = \quad, \ \operatorname{tg}\alpha_2 = \quad = - \quad .$$

$$\sin\alpha = \quad ; \ \cos\alpha = \quad .$$

Поскольку это первая замена координат, то вид формул отличается от (6) количеством штрихов. Подставляем в первоначальное уравнение:

$$[9(4x' - 3y')^2 - 24(4x' - 3y')(3x' + 4y') + 16(3x' + 4y')^2] -$$
$$- (4x' - 3y') + (3x' + 4y') - 50 = 0,$$
$$[144\,x'^2 - 216\,x'y' + 81\,y'^2 - 288\,x'^2 - 168\,x'y' + 288\,y'^2 + 144\,x'^2 + 384\,x'y' + 296\,y'^2] -$$
$$-16\,x' + 12\,y' + 66\,x' + 88\,y' - 50 = 0 .$$

Слагаемые с $x'y'$ должны сократиться. Кроме того, если $\delta = 0$, то одна из переменных в квадрате сокращается полностью:

$$25\,y'^2 + 50\,x' + 100\,y' - 50 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0 . \ (*)$$

Выделяем полный квадрат:

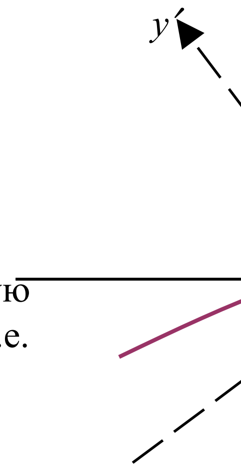
$$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0,$$
$$(y' + 2)^2 + 2(x' - 3) = 0.$$

Делаем замену координат:

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-2)_{O'x'y'}$. Подчеркнем, что это координаты относительно второй системы координат $O'x'y'$.

$$y''^2 = -2x'' \text{ – парабола.}$$

Ее параметр $p = 1$, а ось параболы – $O'x''$.




Описание построения:

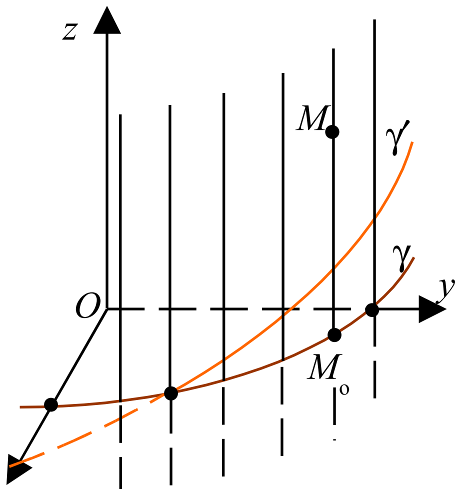
1. совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$;
2. новое начало координат $O'(3,-2)$ в системе координат $Ox'y'$;
3. координатные оси $O'x''$ и $O'y''$.
4. для построения параболы любым способом находим дополнительную точку; например, подставим в уравнение (*) $y' = 0$, тогда $x' = 1$. Т.е. $A(1,0)_{O'x'y'}$ – дополнительная точка (в системе $Ox'y'$).

# ГЛАВА 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## §1. *Цилиндрические поверхности.*

***Определение.*** *Линейчатой* называется поверхность, через каждую точку которой проходит хотя бы одна прямая, принадлежащая поверхности.

***Определение.*** *Цилиндрической* называется поверхность, которую образует множество параллельных прямых (*образующих*), проходящих через каждую точку некоторой кривой (*направляющей*).




Пусть $\Phi$ – цилиндрическая поверхность. Выберем декартову СК так, чтобы ось $Oz$ была параллельна образующим. Если, при этом, направляющая $\gamma'$ не лежит в плоскости $Oxy$, то мы ее спроецируем в эту плоскость, и получим некоторую кривую $\gamma$. Если теперь мы возьмем $\gamma$ в качестве направляющей, то получим ту же поверхность $\Phi$. Поэтому будем с самого начала считать, что направляющей служит кривая $\gamma$, лежащая в плоскости $Oxy$. Пусть

$$\varphi(x, y) = 0 \quad – \qquad (1)$$

ее уравнение в плоскости $Oxy$ (в пространстве она задается системой из двух уравнений: $\varphi(x, y) = 0$ и $z = 0$). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности $\Phi$. Тогда ее проекция на плоскость $Oxy$ будет точка $M_0(x,\ y,\ 0)$; и эта точка должна принадлежать кривой $\gamma$. Поэтому ее координаты удовлетворяют (1). Но тогда этому уравнению будут удовлетворять и координаты точки $M_0$: ведь координаты $x$ и $y$ у этих точек одинаковы, а $z$ в уравнение не входит.

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (1). Тогда этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки $M_0(x, y, 0)$, а т.к. $M_0 \in Oxy$, то $M_0 \in \gamma$. При этом, $M$ и $M_0$ лежат на одной прямой, параллельной оси $Oz \Rightarrow M \in \Phi$.

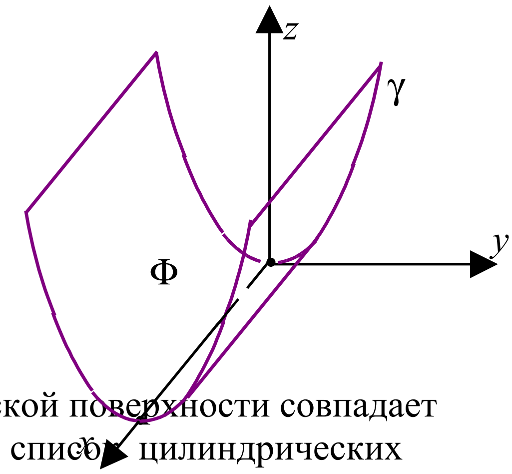
Итак, мы установили, что (1) и есть уравнение поверхности $\Phi$, т.е. *уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением ее направляющей кривой* $\gamma$ *в плоскости* $Oxy$, *если образующие параллельны оси* $Oz$. Аналогично, если образующие параллельны $Oy$, то уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей кривой в плоскости $Oxz$.

И обратно, если в уравнении поверхности отсутствует, например, координата $x$, то сразу можем сделать вывод, что эта поверхность цилиндрическая, а ее образующие параллельны $Ox$.

***Пример.*** Пусть поверхность задана уравнением $y^2 = 2z$. Тогда это цилиндрическая поверхность, ее образующие параллельны $Ox$, а направляющей служит парабола

$$\begin{cases} y^2 = 2z\ , \\ x = 0\ . \end{cases}$$

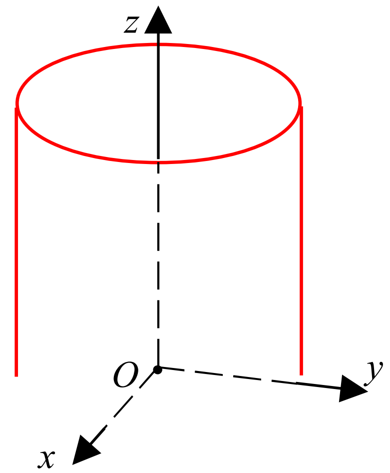
Такая поверхность называется «*параболический цилиндр*».

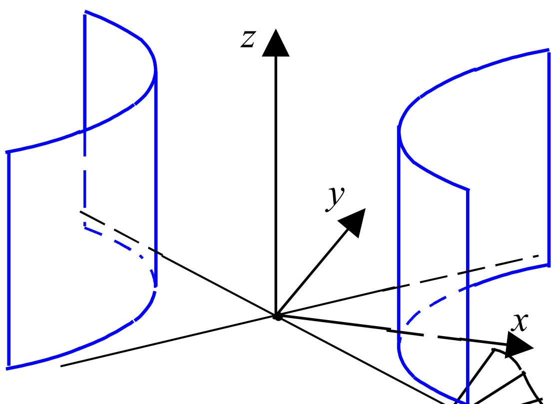


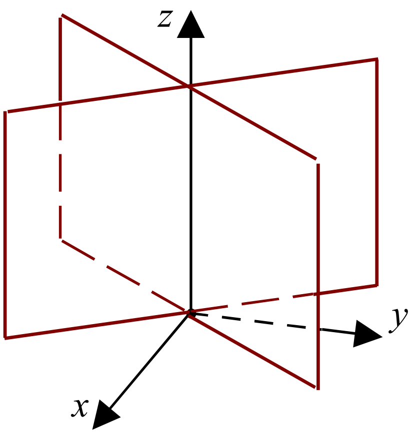

Поскольку уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей кривой, то список цилиндрических поверхностей второго порядка совпадает со списком их направляющих кривых второго порядка.

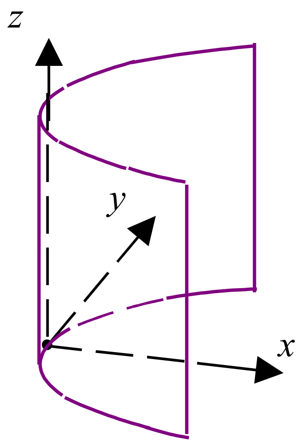
| | |
|---|---|
| 1. Эллиптический цилиндр | $+ \ = 1$ |
| 2. Мнимый эллиптический цилиндр ( ∅ ) | $+ \ = -1$ |
| 3. Гиперболический цилиндр | $- \ = 1$ |
| 4. Параболический цилиндр | $y^2 = 2px$ |
| 5. Пара пересекающихся плоскостей | $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ |
| 6. Пара мнимых плоскостей, которые пересекаются по действительной прямой | $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ |
| 7. Пара параллельных плоскостей | $x^2 = a^2$ |
| 8. Пара совпадающих плоскостей | $x^2 = 0$ |
| 9. Пара мнимых параллельных плоскостей ( ∅ ) | $x^2 = -a^2$ |

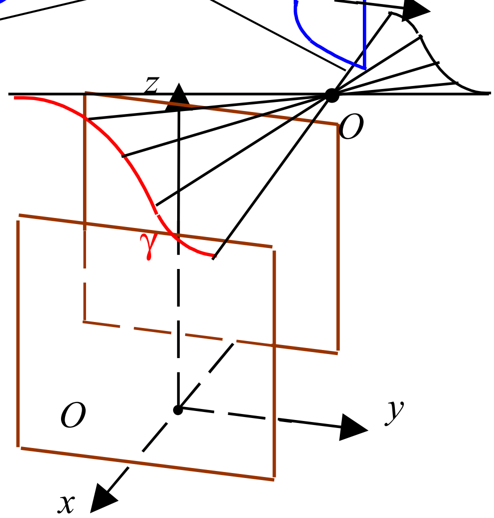
***Упражнение.*** Самостоятельно определите, какая поверхность изображена на каждом из следующих рисунков.



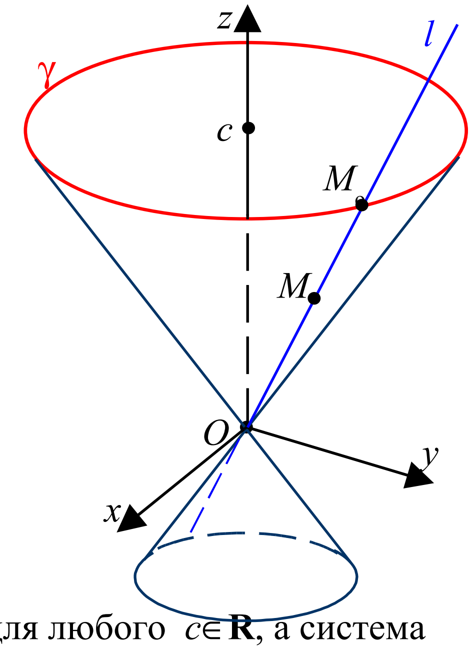



## §2. *Конические поверхности.*

***Определение.*** *Конической* называется поверхность, которую образует множество всех прямых (*образующих*), проходящих через каждую точку некоторой кривой (*направляющей*), и через некоторую точку $O$ (*вершину*).




Выберем декартову СК так, чтобы начало координат совпадало с вершиной конической поверхности Ф. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности Ф в этой СК. Поскольку мы рассматриваем только поверхности второго порядка, то $F$ – многочлен второй степени от 3 переменных. Тогда функция двух переменных

$$\varphi(x,y)=F(x,y,c)$$

будет также многочленом второй степени для любого $c\in\mathbf{R}$, а система

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=c \end{cases}$$

будет задавать сечение поверхности Ф плоскостью $z=c$. Получающуюся в сечении кривую $\gamma$ выберем в качестве направляющей. Т.к. $\varphi(x, y)$ – многочлен 2 степени, то $\gamma$ – кривая 2 порядка. Если $\gamma$ – центральная, то можем считать, что ось $Oz$ проходит через ее центр.

Предположим сначала, что направляющая – эллипс

$$\gamma\colon \begin{cases} + -1=0, \\ z=c \end{cases} \qquad (*)$$

Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка поверхности Ф. Тогда вся прямая $OM$ должна лежать на поверхности. Ее параметрическое уравнение:

$$OM\colon \begin{cases} x=x_1t, \\ y=y_1t, \\ z=z_1t. \end{cases}$$

Пусть она пересекает направляющую $\gamma$ в точке $M_o(x_o, y_o, c)$. Тогда ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой $OM$:

$$\begin{cases} x_o = x_1 t, \\ y_o = y_1 t, \\ c = z_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = x_1 c/z_1, \\ y_o = y_1 c/z_1, \\ t = c/z_1. \end{cases}$$

А теперь подставим найденные выражения в уравнение эллипса:

$$+ \; - 1 = 0.$$

Домножим это уравнение на $z_1/c$, и получим

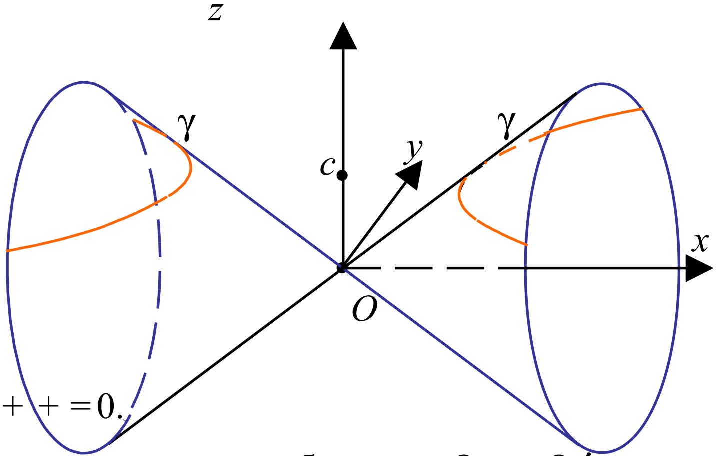
$$+ \; - \; = 0. \qquad (2)$$

Обратно, пусть координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяют уравнению (2). Тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки на прямой $OM$:

$$+ \; - \; = t^2( \; + \; - \; ) = t^2 \cdot 0 = 0,$$

а подставив в (2) $z = c$, получим уравнение эллипса (*). Значит, (2) и есть уравнение конической поверхности. Опуская индексы, окончательно получаем каноническое уравнение конуса.

$$+ \; - \; = 0.$$




Аналогично, если направляющая кривая – это гипербола

$$\begin{cases} - \; - 1 = 0, \\ z = c, \end{cases}$$

получим уравнение конической поверхности

$$- \; - \; = 0 \Leftrightarrow - \; + \; + \; = 0.$$

Это такой же «эллиптический» конус, только ось его будет не $Oz$, а $Oz'$.

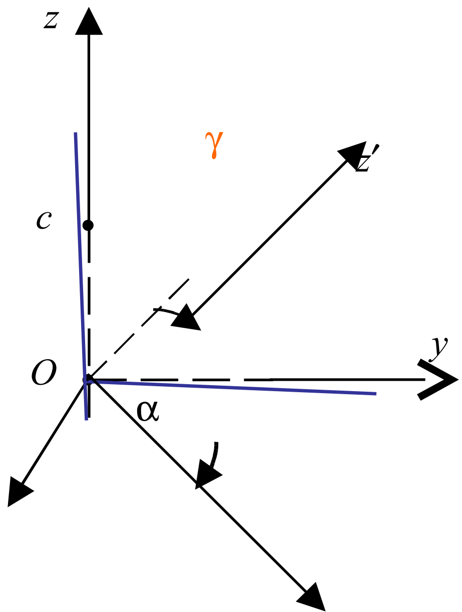
Пусть теперь направляющая $\gamma$ – это парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ z = c. \end{cases}$$

Тогда тем же способом получим уравнение

$$x^2 = yz. \qquad (**)$$

Повернем СК на $45^\circ$ вокруг оси $Ox$. Тогда формулы замены координат имеют вид



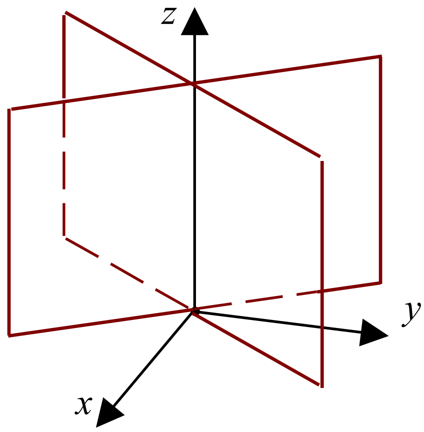
$$\begin{cases} x = x', \\ y = \ (y' + z'), \\ z = \ (-y' + z'). \end{cases}$$

Подставим эти формулы в (**), и обозначив $a^2 = p/c$, получим

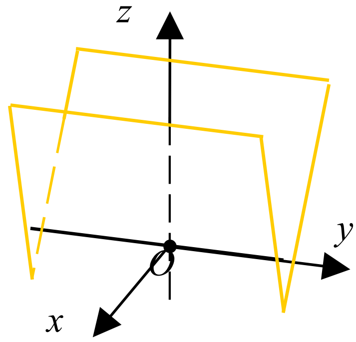
$$x^2 = a^2(-y'^2 + z'^2) \quad \Leftrightarrow \quad + y'^2 - z'^2 = 0.$$

Таким образом, уравнение (**) тоже определяет конус, ось которого является биссектрисой угла $yOz$. При этом, оси $Oy$ и $Oz$ принадлежат конусу. Поэтому плоскость, в которой лежит направляющая $\gamma$, параллельна образующей.

Мы уже говорили в предыдущей главе, что эллипс, гипербола и парабола – это конические сечения. Теперь мы в этом убедились.




Если направляющей служит пара прямых, то коническая поверхность представляет собой *пару плоскостей*, обязательно пересекающихся или совпадающих, т.к. обе плоскости должны проходить через начало координат. Эти поверхности относятся также к цилиндрическим и они были рассмотрены в предыдущем параграфе.




Итак, мы установили, что существуют 4 типа конических поверхностей:

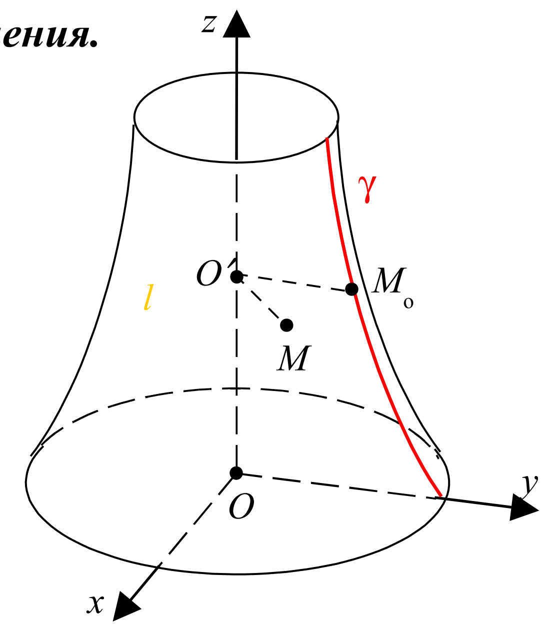
**1.** Конус $\quad + \quad - \quad = 0$.

**2.** Пара пересекающихся плоскостей $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ .

**3.** Пара мнимых пересекающихся плоскостей $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ .

**4.** Пара совпадающих плоскостей $x^2 = 0$.

## §3. *Поверхность вращения.*




Пусть некоторая кривая $\gamma$ расположена в плоскости $Oyz$. Будем вращать ее вокруг оси $Oz$. Получим некоторую поверхность Ф, которая называется *поверхностью вращения*. Каждая точка кривой $\gamma$ описывает окружность – *параллель*, центр которой лежит на оси $Oz$.

Пусть

$$\varphi(y,z)=0 \; – \qquad (3)$$

уравнение кривой $\gamma$ в плоскости $Oyz$. Тогда в пространстве она задается системой

$$\begin{cases} \varphi(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности $\Phi$. Тогда она лежит на одной из таких параллелей $l$ и может быть получена поворотом точки $M_o(0, y_o, z_o) = \gamma \cap l$. Очевидно, что $z_o = z$ (∗), и центр $O'$ параллели $l$ имеет координаты $O'(0,0,z)$. Кроме того, $|O'M| = |O'M_o|$ . В координатах это условие имеет вид

$$y_o = \;. \qquad (**)$$

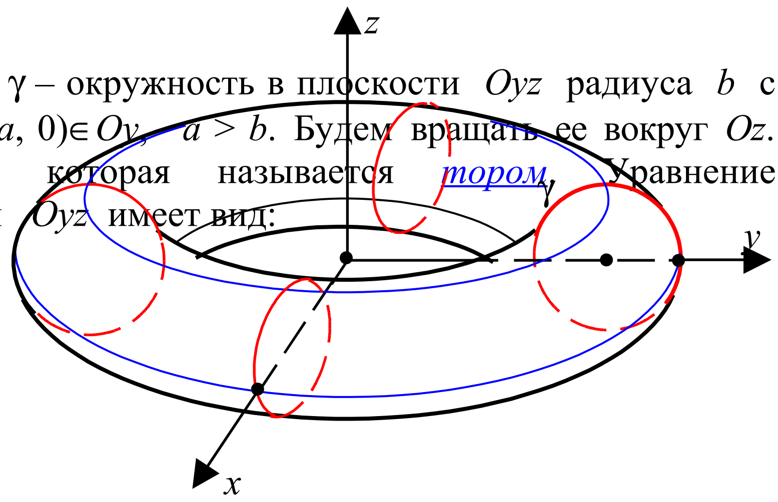
Координаты точки $M_o$ должны удовлетворять уравнению (3): $\varphi(y_o, z_o) = 0$. Подставляя сюда (∗) и (∗∗) получаем

$$\varphi(\;,z)=0. \qquad (4)$$

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (4). Тогда, если выполнено (∗) и (∗∗), то этому уравнению будут удовлетворять координаты точки $M_o(0, y_o, z_o)$, а значит $M_o \in \gamma$. Кроме того, в силу (∗) и (∗∗) точка $M_o$ лежит на одной параллели с $M$, а значит $M$ может быть получена поворотом точки $M_o$ вокруг оси $Oz \Rightarrow M \in \Phi$.

Итак, мы доказали, что (4) есть уравнение поверхности вращения $\Phi$. Таким образом, *для того чтобы из уравнения кривой* $\gamma$ *получить уравнение поверхности вращения* $\Phi$*, мы в уравнении кривой оставляем без изменения координату* $z$*, а* $y$ *заменяем*: $y$ ⃞ .

Обратно, если в уравнении поверхности можно выделить , и при этом, нигде более координаты $x$ и $y$ в уравнение не входят, то мы сразу можем сделать вывод, что наша поверхность есть поверхность вращения вокруг $Oz$.




***Пример* 1.** Пусть $\gamma$ – окружность в плоскости $Oyz$ радиуса $b$ с центром в точке $A(0, a, 0) \in Oy$, $a > b$. Будем вращать ее вокруг $Oz$. Получим поверхность, которая называется *тором*. Уравнение окружности в плоскости $Oyz$ имеет вид:

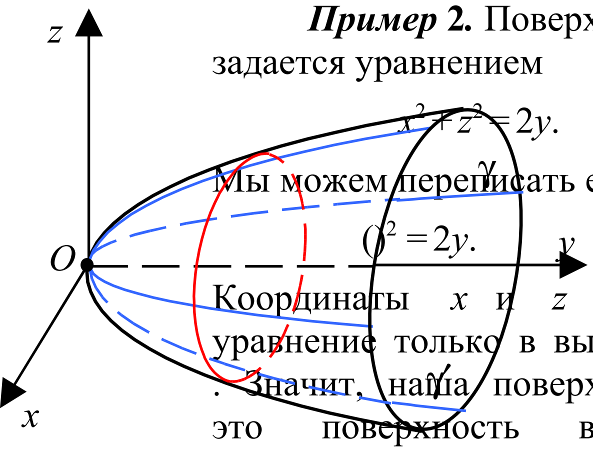
$$(y-a)^2+z^2=b^2.$$

Вращаем вокруг $Oz$. Поэтому $z$ оставляем без изменений, а $y$ заменяем:

$y$ □ :

$(-a)^2+z^2=b^2.$

Получили уравнение тора. Заметим, что тор не относится к поверхностям 2 порядка.




***Пример 2.*** Поверхность $\Phi$ задается уравнением

$$x^2+z^2=2y.$$

Мы можем переписать его так:

$$(\ )^2=2y.$$

Координаты $x$ и $z$ входят в уравнение только в выражении . Значит, наша поверхность – это поверхность вращения вокруг $Oy$. Для того, чтобы получить уравнение кривой, которая вращается, мы заменяем на $x$ и получаем уравнение кривой $\gamma$ в плоскости $Oxy$: $x^2=2y$. В пространстве эта кривая задается системой

$$\begin{cases} x^2=2y, \\ z=0. \end{cases}$$

Точно так же мы можем заменить на $z$ и получить уравнение кривой $\gamma'$ в плоскости $Oyz$: $z^2=2y$. Вращая вокруг $Oy$ первую или вторую кривую, мы получим одну и ту же поверхность.

## §4. *Эллипсоид.*

***Определение.*** *Эллипсоидом* называется поверхность $\Phi$, имеющая каноническое уравнение вида

$$+\ +=1. \qquad (5)$$

Исследуем ее форму *методом параллельных сечений*. В сечениях плоскостями $z=h$ получаем кривую

$$+\ =1- \qquad (*)$$

Если $|h| \neq c$, то обозначим $a'^2 = a^2|1- \ |$, $b'^2 = b^2|1- \ |$.

При $|h| < c$ получаем эллипсы $\ + \ = 1$, полуоси которых $a'$ и $b'$ достигают максимального значения $a$ и $b$ при $h = 0$.

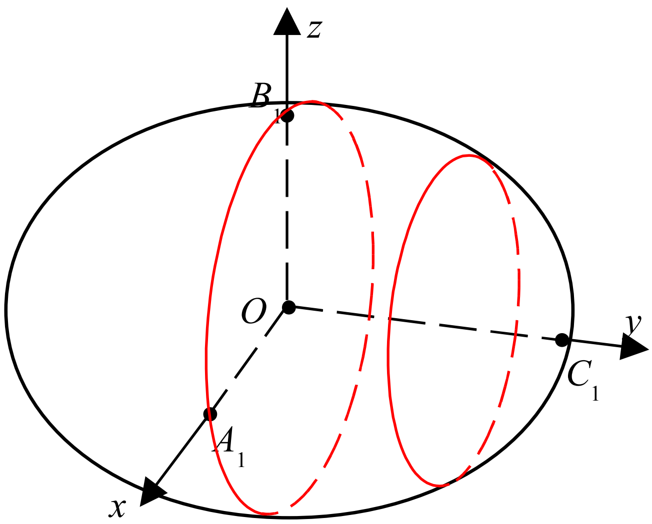
При $|h| > c$ получаем мнимые эллипсы $\ + \ = -1$ ($\varnothing$). А при $h = \pm c$ из ($*$) получаем уравнение $\ + \ = 0$, которое задает только одну из точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

Аналогично, в сечениях плоскостями $x = h$, или $y = h$ в случае $|h| < a$, или $|h| < b$, получаем только эллипсы, полуоси которых достигают максимальных значений при $h = 0$. При $h = \pm a$, или $h = \pm b$ будем получать одну точку.

*<u>Прочие геометрические свойства эллипсоида</u>*.

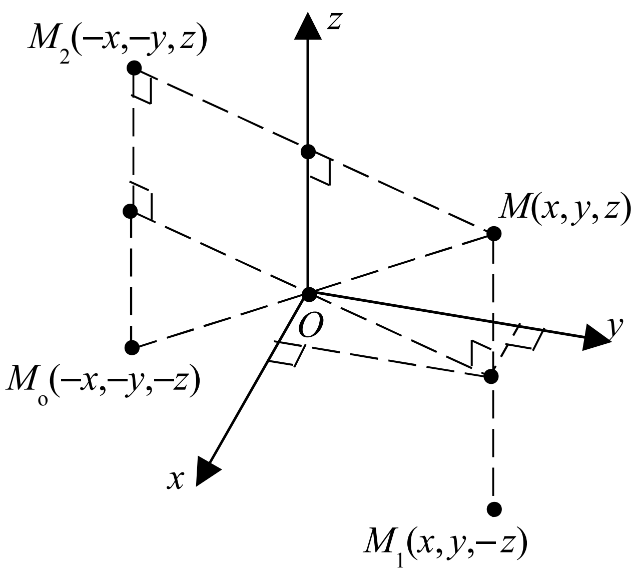
**1.** Из уравнения (5) получаем, что $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$ (если $|x| > a$, то уже первое слагаемое в (5) будет больше 1, а к нему еще надо что-то прибавить). Значит, весь эллипсоид содержится в пар-де, который определяется этими неравенствами.

**2.** Координатные оси пересекают эллипсоид в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$, которые называются вершинами эллипсоида.




**3.** Координатные оси являются осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии, начало координат $O$ – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка эллипсоида. Тогда ее координаты $(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (5). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также тройки чисел $(x,-y,-z)$, $(-x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$, $(x,y,-z)$, $(x,-y,z)$, $(-x,y,z)$, $(-x,-y,-z)$, которые определяют точки симметричные $M$ соответственно относительно



осей $Ox$, $Oy$, $Oz$, плоскостей $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$ и точки $O$. Поэтому все эти точки тоже принадлежат эллипсоиду.

На рисунке показано, как изменяются координаты точки при симметрии относительно оси $Oz$, плоскости $Oxy$ и точки $O$.

**4.** При $a=b$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг $Oz$. Действительно, в этом случае его уравнение можно переписать так:

$$+ = 1.$$

Аналогично, при $a=c$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг $Oy$, а при $b=c$ – вокруг $Ox$.

При $a=b=c$ эллипсоид будет сферой:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (**).$$

Произвольный эллипсоид может быть получен из сферы $(**)$ в результате равномерного сжатия (растяжения) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Действительно, если в $(**)$ сделать замену координат $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, то получим уравнение (5), только со штрихами.

## §5. *Однополостной и двуполостной гиперболоиды.*

***Определение.*** *Однополостным и двуполостным гиперболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$\Phi_1$: $+ - = 1$ (6) $\Phi_2$: $+ - = -1$. (7)

Исследуем их форму методом параллельных сечений. В сечениях плоскостями $z=h$ получаем соответственно кривые

| | |
|---|---|
| $+ = 1+$ | $+ = -1+$ $(*)$ |
| Обозначим соответственно | |
| $a'^2=a^2(1+)$, $b'^2=b^2(1+)$; | $a'^2=a^2\mid -1+\mid$, $b'^2=b^2\mid -1+\mid$, $h\neq\pm c$ |
| при любом $h$ получаем эллипсы | при $\mid h\mid>c$ получаем эллипсы |
| $+ = 1$ | |
| полуоси которых $a'$ и $b'$ неограни-неогченно возрастают при возрас-воз-тании $\mid h\mid$, и достигают минимумов $a$ и $b$ при $h=0$. | полуоси которых $a'$ и $b'$ раниченно возрастают при растаснии $\mid h\mid$; при $\mid h\mid<c$ получаем мнимые эллипсы $+ = -1$ ($\varnothing$), а при $h=\pm c$ $(*)$ превращается в $+ = 0$, а это уравнение задает одну из |

точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем соответственно кривые

$$- = 1- \quad (**)$$

Обозначим соответственно

$$a'^2 = a^2|\,1- \,|\,,\ c'^2 = c^2|\,1- \,|$$

и при $h \neq \pm b$ получаем гиперболы,

$$+ = \pm 1,$$

а при $h = \pm b$ (**) превращается в уравнение $- = 0$, которое задает пару пересекающихся прямых.

$$- = -1-$$

$$a'^2 = a^2(1+ )\,,\ c'^2 = c^2(1+ )\ .$$

и при любом $h$ получаем гиперболы

$$- + = 1.$$

Аналогично, в сечениях $\Phi_2$ плоскостями $y=h$ получаем только гиперболы, а в сечениях $\Phi_1$ – гиперболы или пары прямых при $h=\pm a$.

*Прочие геометрические свойства гиперболоидов*.

**1.** Из уравнения (7) получаем, что $|z| \geq c$, т.е. в пространственном слое $z < c$ нет точек $\Phi_2$. Координатные оси $Ox$ и $Oy$ пересекают $\Phi_1$ в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, которые называются его вершинами. Ось $Oz$ его не пересекает. Зато ось $Oz$ пересекает $\Phi_2$ в точках $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$, которые называются его вершинами. Оси $Ox$ и $Oy$ не пересекают $\Phi_2$.

**2.** Точно так же, как и для эллипсоида доказывается, что координатные оси являются осями симметрии гиперболоидов, координатные плоскости – плоскостями симметрии, а точка $O$ – центром симметрии.

**3.** При $a=b$ гиперболоиды будут поверхностями вращения, а при $a=c$ гиперболы в сечениях плоскостями $y=h$ будут равнобокими. При $b=c$ равнобокими будут гиперболы в сечениях плоскостями $x=h$.

**4.** Пусть $\Phi_o$ – конус, заданный уравнением

$$\Phi_o:\ + - = 0.$$

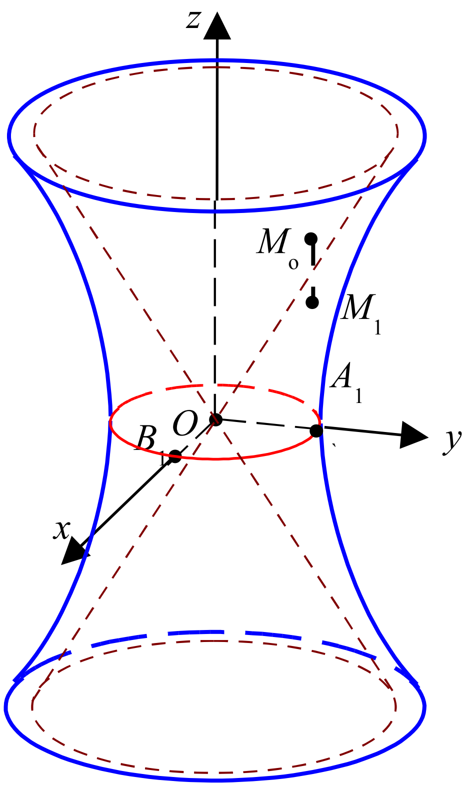
Пусть $M_o(x,y,z_o) \in \Phi_o$, $M_1(x,y,z_1) \in \Phi_1$, $M_2(x,y,z_2) \in \Phi_2$ – три точки с одинаковыми координатами $x$ и $y$, лежащие на конусе и на гиперболоидах. Тогда

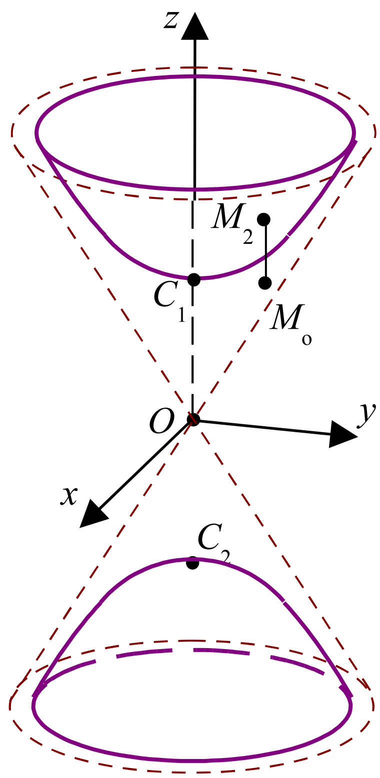
$$z_o^2 = c^2(\ +\ ),\quad z_1^2 = c^2(\ +\ -1),\quad z_2^2 = c^2(\ +\ +1) \quad \Rightarrow$$

$|z_1^2| < |z_o^2| < |z_2^2|$, а значит, $\Phi_1$ лежит снаружи конуса $\Phi_o$, а $\Phi_2$ – внутри. Кроме того, из тех же равенств следует $z_o^2 - z_1^2 = z_2^2 - z_o^2 = c^2$ $\Rightarrow$

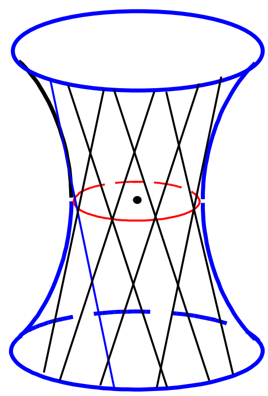
$$M_o M_1 = |\,z_o - z_1| = \ \to 0 \ \text{ и } \ M_2 M_o = |\,z_2 - z_o| = \ \to 0\ ,$$

когда точки $M_o$, $M_1$, $M_2$ уходят на бесконечность (необходимо при этом заметить, что $z_o$, $z_1$ и $z_2$ все стремятся к бесконечности при $x \to \infty$ или $y \to \infty$). Значит, оба гиперболоида асимптотически приближаются к конусу.




**5.** Мы уже видели, что в сечениях $\Phi_1$ плоскостями может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что $\Phi_1$ является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащая на поверхности.



## §6. *Эллиптический и гиперболический параболоиды.*

***Определение.*** *Эллиптическим и гиперболическим параболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$\Phi_3$: $+ \; = 2z$ (8) $\Phi_4$: $- \; = 2z.$ (9)

Исследуем их форму методом параллельных сечений. В сечениях плоскостями $z = h$ получаем соответственно кривые

$$+ \; = 2h \qquad\qquad - \; = 2h \quad (*)$$

Обозначим $a'^2 = 2|\,h\,|\,a^2$, $b'^2 = 2|\,h\,|b^2$ .

При $h > 0$ получаем эллипсы

$$+ \; = 1,$$

полуоси которых возрастают при возрастании $h$, а при $h < 0$ получаем мнимые эллипсы

$$+ \; = -1.$$

При $h \neq 0$ получаем гиперболы

$$- \; = \pm 1,$$

(см. на рисунке $\gamma_4$), а при $h = 0$ из ($*$) получаем уравнение, которое задает пару пересекающихся прямых

$$- \; = 0.$$

В сечениях плоскостями $y = h$ получаем для обеих поверхностей параболы

$$x^2 = 2a^2(z - \;). \qquad\qquad x^2 = 2a^2(z + \;).$$

Причем параметр этих парабол одинаков для обеих поверхностей и не зависит от $h$: $p = a^2$. Таким образом, все параболы в сечениях равны друг другу и получаются одна из другой параллельным переносом. Вершины этих парабол имеют координаты

$$(0, h, \;). \qquad\qquad (0, h, - \;).$$

Значит вершины при перемещении парабол описывают кривую в плоскости $Oyz$

$$\gamma_2 : z = \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2b^2 z \qquad\qquad \gamma_2 : z = - \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -2b^2 z,$$

т.е. параболу. Поэтому можем сказать, что оба параболоида получаются движением параболы $\gamma_1$, когда ее вершина скользит по параболе $\gamma_2$ (см. рисунки).

Аналогично, в сечениях параболоидов плоскостями $x = h$ получаем равные друг другу параболы, причем $\gamma_2$ тоже будет среди них; а вершины этих парабол описывают параболу $\gamma_1$: $x^2 = \pm 2b^2 z$ в плоскости $Oxz$ («+» для $\Phi_3$, «–» для $\Phi_4$).

*Прочие геометрические свойства гиперболоидов*.

**1.** Из уравнения (8) получаем, что $z \geq 0$, т.е. $\Phi_3$ целиком находится в полупространстве, которое определяется этим неравенством.

**2.** Координатные оси пересекают оба параболоида только в точке $O(0,0,0)$, которая называется вершиной.

**3.** Ось $Oz$ является осью симметрии параболоидов, а координатные плоскости $Oxz$ и $Oyz$ – плоскостями симметрии. Других симметрий у параболоидов нет.

**4.** При $a = b$ $\Phi_3$ будет поверхностью вращения, а гиперболы в сечениях $\Phi_4$ плоскостями $z = h$ будут равнобокими.

**5.** Мы уже видели, что в сечениях $\Phi_4$ плоскостями $z=h$ может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что $\Phi_1$ является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащая на поверхности.

## §7. *Классификация поверхностей второго порядка.*

***Определение.*** *Поверхностью второго порядка* называется геометрическое место точек пространства координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+c=0, \qquad (8)$$

где среди коэффициентов $a_{ij}$, $i,j=1,2,3$ есть хотя бы один ненулевой. Выражение в первой строке называется *квадратичной частью уравнения*, $c$ – *свободным членом*, остальное – *линейная часть*.

Квадратичная часть уравнения (8) представляет собой квадратичную форму. Её коэффициенты образуют матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

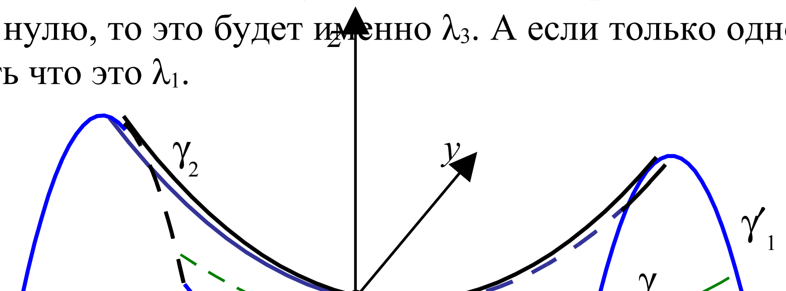
В курсе линейной алгебры доказывается, что матрицу любой квадратичной формы с помощью поворота координатных осей декартовой СК можно привести к диагональному виду

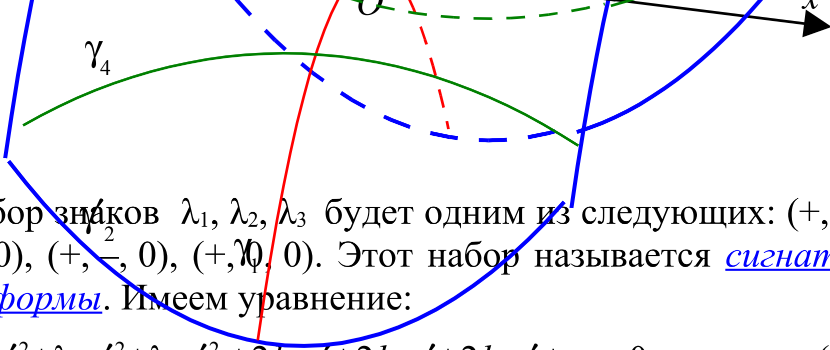
$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Тогда в новой декартовой СК $Ox'y'z'$ с тем же началом квадратичная часть уравнения (8) примет к вид:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2, \qquad (9)$$

который тоже называется диагональным. При этом числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ не зависят от выбора новой декартовой СК $Ox'y'z'$. Т.е. если ещё в одной декартовой СК квадратичная часть уравнения имеет вид (9), то набор чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ будет тем же (может измениться только их порядок). Если количество отрицательных коэффициентов $\lambda_i$ больше, чем количество положительных, то мы во всём уравнении поверхности поменяем знаки. Затем мы выберем именно такой порядок обозначения координатных осей, что сначала будут следовать положительные $\lambda_i$, потом отрицательные, а в конце нулевые. Таким образом, если только одно из $\lambda_i$ равно нулю, то это будет именно $\lambda_3$. А если только одно $\lambda_i\neq0$, то можем считать что это $\lambda_1$.





Тогда набор знаков $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будет одним из следующих: (+, +, +), (+, +, –), (+, +, 0), (+, –, 0), (+, 0, 0). Этот набор называется *сигнатурой квадратичной формы*. Имеем уравнение:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2 +2b_1x'+2b_2y'+2b_3z'+c=0 \qquad (10)$$

Далее, если все $\lambda_i \neq 0$ мы выделим полные квадраты

$$\lambda_1(x'^2+\ x'+\ )-\ +\lambda_2(y'^2+\ y'+\ )-\ +$$

$$+\lambda_3(z'^2+\ z'+\ )-\ +c=0,$$

$$\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+{}^2+c'=0.$$

Более подробно мы изучим эту процедуру выделения квадратов на практике. Затем делаем замену координат

$$x''=x'+\ ,\quad y''=y'+\ ,\quad z''=z'+\ ,$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'(-\ ,-\ ,-\ )$. Получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2=-c'.$$

Затем делим уравнение на $|c'|$, если $c'\neq 0$. Тогда в правой части уравнения останется 1, –1 или 0. Мы получим одно из уравнений 1 – 6 (см.таблицу ниже).

Если $\lambda_3=0$, то мы не можем выделить полный квадрат по $z'$, но тогда преобразуем выражение $2b_3z'+c'$ так: $2b_3(z'+c'/2b_3)$, и третья координата также будет участвовать в переносе начала координат в виде $z''=z'+c'/2b_3$. В этом случае в уравнении остается слагаемое $2b_3z''$, но не остается свободного члена и слагаемого, содержащего $(z'')^2$:

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-2b_3z''.$$

Мы разделим уравнение на $|b_3|$ и получим одно из уравнений вида 7, 8 (см.таблицу ниже). Если при этом справа получится не $2z''$, а $-2z''$, то это будет всё равно та же поверхность, только ориентированная по-другому относительно координатных осей.

Если $\lambda_3=0$ и $b_3=0$, то мы получим уравнение вида

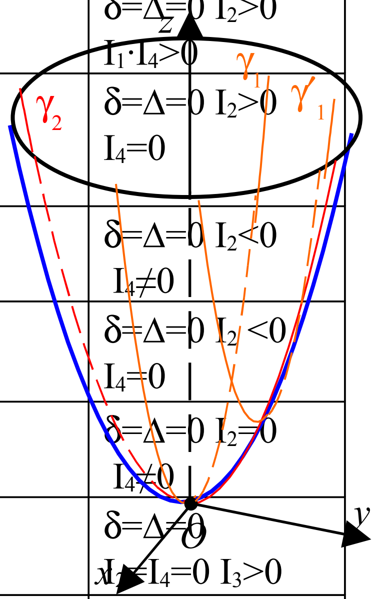
$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-c',$$

которое даст нам одну из поверхностей 9 – 13 из списка.

Аналогично рассматривается и случай $\lambda_2=\lambda_3=0$. Итак, мы показали, что уравнение (8) мы можем привести к одному из следующих:

| Поверхность | Её каноническое уравнение | Инварианты |
|---|---|---|
| 1. Эллипсоид | $+\ +\ =1,$ | $\delta>0\ \Delta<0$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2. Мнимый эллипсоид (Ø) | + + =–1, | $\delta>0$ $\Delta>0$ |
| 3. Мнимый конус (точка) | + + =0, | $\delta>0$ $\Delta=0$ |
| 4. Двуполостной гиперболоид | + − =–1, | $\delta<0$ $\Delta<0$ |
| 5. Однополосной гиперболоид | + − =1, | $\delta<0$ $\Delta>0$ |
| 6. Конус | + − =0, | $\delta<0$ $\Delta=0$ |
| 7. Эллиптический параболоид | + = $2z$, | $\delta=0$ $\Delta<0$ |
| 8. Гиперболический параболоид | − = $2z$, | $\delta=0$ $\Delta>0$ |
| 9. Эллиптический цилиндр | + =1, | $\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_1\cdot I_4<0$ |
| 10. Мнимый эллиптический цилиндр | + =–1, | $\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_1\cdot I_4>0$ |
| 11. Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой | + =0, | $\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_4=0$ |
| 12. Гиперболический цилиндр | – =1, | $\delta=\Delta=0$ $I_2<0$ $I_4\neq0$ |
| 13. Пара пересекающихся плоскостей | – =0, | $\delta=\Delta=0$ $I_2<0$ $I_4=0$ |
| 14. Параболический цилиндр | $x^2=2py$ | $\delta=\Delta=0$ $I_2=0$ $I_4\neq0$ |
| 15. Пара параллельных плоскостей | $x^2=a^2$ | $\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3>0$ |
| 16. Пара совпадающих плоскостей | $x^2=0$ | $\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3=0$ |
| 17. Пара мнимых параллельных плоскостей | $x^2=-a^2$ | $\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3<0$ |




Здесь мы использовали инварианты:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad c$$

$$I_1 = \operatorname{trace} \delta = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – сумма диагональных миноров второго порядка в $\delta$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & c \end{vmatrix}$$ – сумма диагональных миноров второго порядка из $\Delta$, не входящих в $\delta$.

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & c \end{vmatrix}$$ – сумма диагональных миноров третьего порядка в $\Delta$, кроме $\delta$

***Теорема.*** *Величины* $\delta$, $\Delta$, $I_1$, $I_2$ *не изменяются при любых преобразованиях декартовой* СК, $I_3$ , $I_4$ *не изменяются при повороте координатных осей, но меняются при переносе начала координат* (без доказательства).

Поэтому эти величины называют *инвариантами поверхности второго порядка*. Вычислив эти инварианты мы можем определить тип поверхности, не упрощая ее уравнения. Однако так мы не сможем определить положение поверхности в пространстве и величины полуосей.

## §8. *Примеры решения задач*

**1**. *С помощью переноса начала координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

$$4x^2+z^2-24x+8y+2z+5=0.$$

***Решение.*** Выделим в уравнении полные квадраты:

$$4(x^2-6x+9)-36+(z^2+2z+1)-1+8y+5=0,$$

$$4(x-3)^2+(z+1)^2+8y-32=0,$$

$$4(x-3)^2+(z+1)^2=-8(y-4).$$

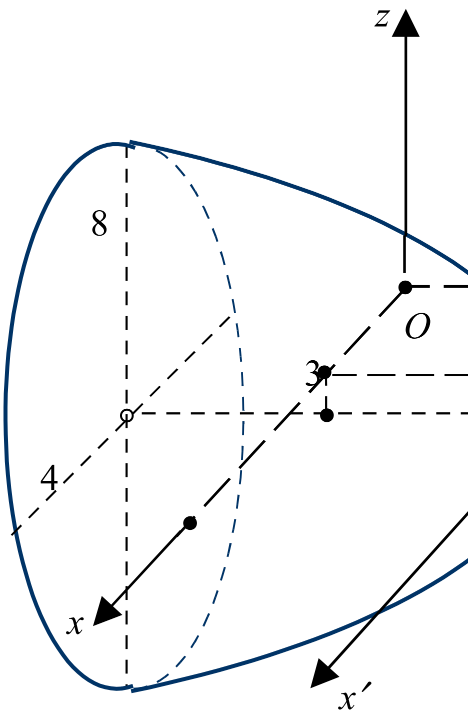
Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y-4, \\ z'=z+1, \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,\ 4,–1)$. После замены получаем уравнение

$$4x'^2+z'^2=-8y', \quad \Leftrightarrow \qquad (x')^2+ \ =-8y',$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, ось которого будет $O'y'$. В сечении плоскостью $y'=-8$ получится эллипс $+ \ =1$ с полуосями 4 и 8. Это следует учесть при изображении.




**2.** *Определите, какое множество определяется в декартовой системе координат неравенством*

$$(x-3)-4(y+4)^2 \geq 0.$$

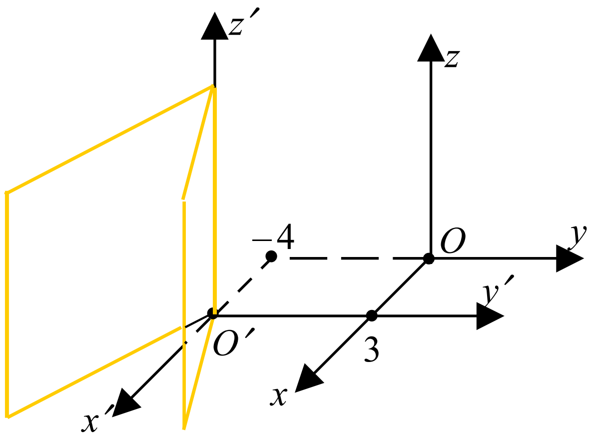
*Изобразите это множество.*

***Решение.*** Определим сначала, какое множество определяется уравнением $(x-3)-4(y+4)^2=0$. Делаем замену координат

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y+4, \\ z'=z. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-4,0)$. В новой системе координат $O'x'y'z'$ получаем, что поверхность задается уравнением

$$(x')^2-4(y')^2=0. \qquad (*)$$




Поскольку в уравнении отсутствует координата $z'$, то мы сразу делаем вывод, что наша поверхность является цилиндрической и ее образующие параллельны оси $O'z'$. На плоскости $O'x'y'$ уравнение (*) задает пару пересекающихся прямых

$$(x'-2y')(x'+2y')=0.$$

Эта кривая 2 порядка будет направляющей для нашей поверхности. Значит, наша поверхность – это пара пересекающихся плоскостей. Для того, чтобы не загромождать изображение мы нарисовали только небольшую часть этой поверхности. Поскольку изначально у нас было неравенство, то искомое множество – это внутренность одной из двух пар вертикальных углов, образуемых этими плоскостями. Мы возьмем любую точку на оси $O'x'$: $A(a,0,0)_{O'x'y'z'}$ и убедимся, что ее координаты удовлетворяют неравенству $(x')^2-4(y')^2 \geq 0$. Значит, ось $O'x'$ лежит в нашем множестве. Таким образом, исходное неравенство задает внутренность изображенного двугранного угла и угла, вертикального с ним. А т.к. неравенство нестрогое, то и сами плоскости тоже принадлежат множеству.

**3.** *Составить уравнение поверхности, полученной вращением кривой*

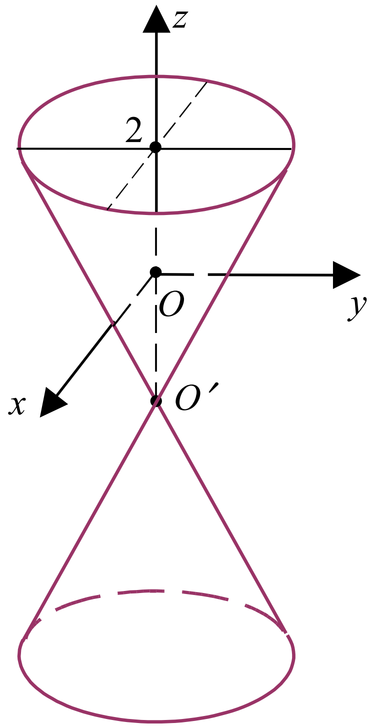
$$\begin{cases} z=2y-2, \\ x=0. \end{cases}$$

*вокруг оси* а) $Oz$, б) $Oy$. *Определить тип поверхности. Изобразите ее.*

***Решение.*** Данная система уравнений задает прямую $l$, лежащую в плоскости $Oyz$. Первое из уравнений – это уравнение $l$ в данной плоскости. Для того, чтобы составить уравнение поверхности Ф, получающейся вращением $l$ вокруг $Oz$, мы должны в уравнении $l$ оставить $z$ без изменения, а $y$ заменить на квадратный корень из суммы квадратов оставшихся координат: $y$ □ . Получаем уравнение

$$z=2\ -2, \Rightarrow$$
$$x^2+y^2- \ =0.$$

Данное уравнение определяет конус, ось которого – $Oz$, а вершина находится в точке $O'(0,0,-2)$.




Строим изображение данного конуса.

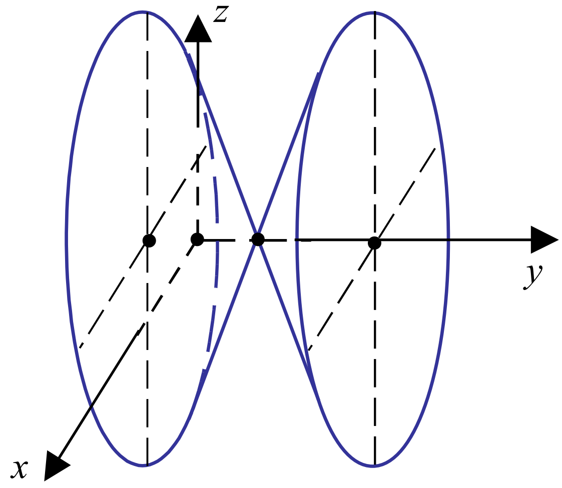
1) Подставив в уравнение конуса $z=2$, получим $x^2+y^2=4$. Значит, в сечении плоскостью $z=2$ получается окружность радиуса 2. Проводим через точку $z=2$ на оси $Oz$ вспомогательные линии, параллельно осям $Ox$ и $Oy$; откладываем на них от данной точки отрезки длины 2 и через получившиеся точки проводим эллипс, изображающий окружность. При этом, масштаб по оси $Ox$ выбираем в два раза меньше, чем по осям $Oy$ и $Oz$.
2) Строим эллипс равный данному с центром в точке $z=-6$ на оси $Oz$.
3) Проводим касательные к эллипсам через точку $O'$. *Подчеркнем, что точки касания ни в коем случае не совпадают с вершинами эллипса*.
4) Часть нижнего эллипса, заключенную между точками касания изображаем пунктиром.

Аналогично, для того чтобы получить уравнение поверхности вращения вокруг $Oy$, мы в уравнении $l$ оставляем $y$ без изменения, а $z$ заменяем: $z$ □ . Получаем уравнение

$$x^2 - 4(y-1)^2 + z^2 = 0,$$

$$-(y-1)^2 + \quad = 0.$$

Оно задает конус, вершина которого находится в точке $O'(0, 1, 0)$, а ось конуса – $Oy$. Эту поверхность тоже следует изобразить. При этом, учитываем, что в сечении плоскостью $y = 3$ получается окружность радиуса 4.




**4.** *Является ли поверхность заданная уравнением*

$$-x^2 + \quad + \quad = 1$$

*поверхностью вращения? Если да, то вращением какой кривой (написать уравнение) вокруг какой оси она получена? Изобразите ее.*

***Решение.*** Данная поверхность – это однополостной гиперболоид. В уравнении поверхности можно выделить выражение :

$$-x^2 + \quad = 1,$$

и больше нигде в уравнении $x$ и $z$ не встречаются. Поэтому сразу делаем вывод, что это уравнение задает поверхность вращения вокруг $Oy$. Для того, чтобы определить, какая кривая $\gamma$ вращается, мы заменяем на $y$ и получаем уравнение $-x^2 + \quad = 1$ кривой, которая лежит в плоскости $z = 0$. Для того, чтобы задать эту кривую в пространстве, мы должны написать систему уравнений

$$\begin{cases} -x^2 + \quad = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Можем заменить на $z$, и тогда получим уравнение кривой $\gamma'$, лежащей в плоскости $y = 0$:

$$\begin{cases} -x^2 + \quad = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

**5.** *Составьте уравнение поверхности, каждая точка которой равноудалена от плоскости* $x = -a$ *и от точки* $F(a, 0, 0)$.

***Решение.*** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка поверхности. Тогда

$$|MF| = ,$$

а расстояние от $M$ до плоскости равно $|x+a|$. По условию

$$= |x+a|.$$

Возводим это равенство в квадрат:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 + z^2 = 4ax \quad \Leftrightarrow \quad + \ = 2ax.$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, осью которого является $Ox$.

**6.** *Найдите точки пересечения эллипсоида* $+ \ + \ = 1$ *и прямой* $=$ $=$ .

***Решение.*** Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = -6 + 12t. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение эллипсоида:

$$+ \ + \ = 1,$$

$$1 + 2t + t^2 + 4 - 12t + 9t^2 + 4 - 16t + 16t^2 = 9,$$

$$26t^2 - 26t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 26t(t-1) = 0.$$

Имеем два решения: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Подставляя их в уравнение прямой, находим две точки $M_1(1, 4, -6)$, $M_2(2, -2, 6)$.

***Ответ*:** $M_1(1, 4, -6)$, $M_2(2, -2, 6)$.

**7.** *Определить, какая кривая получается в сечении поверхности* $+ \ - \ = 1$ *плоскостью* **а)** $y = 2z$; **б)** $y = 2z + 2$.

***Решение.*** **а)** Данная поверхность – это однополостной гиперболоид. Подставим $y = 2z$ в уравнение поверхности:

$$+ \ - \ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость $Oxz$. Оно задает пару параллельных прямых. Следовательно, наша кривая – это тоже пара параллельных прямых.

**б)** Подставим $y = 2z + 4$ в уравнение поверхности:

$$+ \ - \ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad + \ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9z.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость $Oxz$. Оно задает параболу. Следовательно, наша кривая – это тоже парабола.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## §1. *Матрицы и определители.*

*Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в которых находится данный элемент. Например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер $2\times4$. В ней $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, а $a_{21} = 6$. Матрица размера $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка $n$.

Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*).

Понятие *определитель* вводится только для квадратных матриц. Определитель матрицы $A$ обозначается $\det\boldsymbol{A}$. Если вместо круглых скобок вокруг матрицы мы поставим прямые палочки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Обозначим $M_{ij}$ – это определитель матрицы, которая получается из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца. Он называется *минором, дополнительным к элементу* $a_{ij}$. Тогда определитель матрицы порядка 3 можно вычислить с помощью разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

*Пример*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot9 - 6\cdot8) - 2\cdot(4\cdot9 - 6\cdot7) + 3\cdot(4\cdot8 - 5\cdot7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0.$$

*Свойства определителя*.

**1.** Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

**2.** Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

**3.** При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

**4.** Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трём. Поэтому мы можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Вычтем в нашем примере из второй и третьей строки первую строку (сама первая строка при этом остается на своем месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 9 = -27$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому её определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

## §2. *Правило Крамера.*

Пусть дана система линейных уравнений, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{ij}$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1$, $b_2$, $b_3$ – *свободными членами*. Коэффициенты системы образуют матрицу $A$, а свободные члены – столбец $B$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\boldsymbol{A}$, а $\Delta_i$ – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой $i$-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема*. (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (1) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \ , \ x_2 = \ , \ x_3 = \ .$$

Эта теорема верна и для систем, состоящих произвольного числа $n$ уравнений и неизвестных.

***Пример.*** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

***Решение.***

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \ = \ = -3, \quad x_2 = \ = \ = 2.$$

<u>*Ответ*</u>: (–3, 2).

## *Используемые сокращения*

СК – система координат

КС – коническое сечение

## *Алфавитный указатель*

## *Литература*


1. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. М.:Наука,1978
2. Погорелов А.В. Геометрия. М.: Наука, 1984.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.I. М.:Просвещение, 1986.
4. Базылев В.Т., Дуничев К.И. и др. Геометрия. Ч.I. М.: Просвещение, 1974
5. Атанасян Л.С. Геометрия. Ч.I. М.: Просвещение, 1973
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981.
7. Постников М.М. Аналитическая геометрия. М.:Наука, 1973.
8. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I: Аналитическая геометрия. М.:Наука, 1986.
9. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М.: Наука, 1990.
10. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Алгебра и геометрия. Минск: Вышэйшая школа,1989
11. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии. М.:Просвещение, 1980.
12. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. Ч.1. М.: Просвещение, 1973.
13. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Под ред. Феденко А.С. Минск: Изд-во Университетское, 1989, 1999.
14. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987
15. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.:Наука, 1965
16. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986
17. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Мн.: «Вышейшая школа», 1976
18. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1969

**Комплексные числа. Определение комплексного числа**.

То, что действительные числа геометрически изображаются точками координатной прямой, приводит к мысли построить систему чисел, геометрически изображаемых всеми точками координатной плоскости. Поэтому в качестве исходных элементов для построения новой числовой системы берутся всевозможные упорядоченные пары $z = (x, y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Эти пары будем называть *комплексными числами*, если для неё понятие равенства и операции сложения и умножениye определены следующим образом:

1) две пары $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ считаются равными $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

2) суммой двух пар $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ считается пара$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$;

3) произведением двух пар $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ считается пара$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Обозначение. $\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Операции сложение и умножение обладают следующими свойствами:

1. Коммутативность.
$$z_1z_2 = z_2z_1;$$
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
2. Ассоциативность.
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 = (z_2 + z_3);$$
$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3);$$
3. Дистрибутивность(Распределительный закон).
$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Из равенства комплексных чисел для пар вида $(x, 0)$ операции выполняются также, как и для действительных чисел:
$$z_1 = (x_1, 0), \quad z_2 = (x_2, 0).$$
$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0);$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Определение. *Мнимой единицей* будем называть $i = (0, 1)$.
$$ii = i^2;$$
$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1;$$
$$i^2 = -1.$$

Определение. *Алгебраической формой* комплексного числа называется представление комплексного числа в виде $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.
$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0).$$
$x$-действительная часть комплексного числа.
$$x = Rez.$$
$y$-мнимая часть комплексного числа.
$$y = Imz.$$

Определение. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $x + iy$ и обозначается $\overline{z}$.

Свойства операции сопряжения:

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
3. $z + \overline{z} = 2x, \quad \forall z = x + iy$;
4. $\overline{z} = x^2 + y^2, \quad \forall z = x + iy$;
5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 - z2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
6. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$;
7. $\overline{z_1/z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, при $z_2 \neq 0$.

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

Пример.
Даны два комплексных числа:

$$z_1 = 1 + 3i, \quad z_2 + 1 - 2i.$$

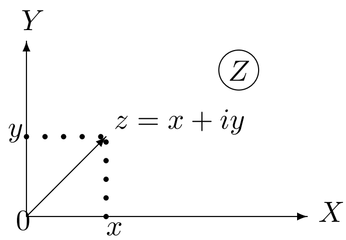
Выполнить операции сложения, вычитания, произведения и деления этих чисел.

Решение:

1. $z_1 + z_2 = 2 - i$;
2. $z_1 - z_2 = 5i$;
3. $z_1 z_2 = 7 + i$;
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+3i}{1-2i} \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1-6}{1+4} + i \frac{3+2}{1+4} = -\frac{5}{5} + i \frac{5}{5} = -1 + i$;

**Геометрическое представление комплексных чисел.**

Рассмотрим координатную плоскость $OXY$, каждой точке плоскости поставим в соответствие комплексное число. Плоскость будем называть *комплексной*.




$OX$-действительная ось, $OY$-мнимая ось.

Определение.
*Радиус-вектором* точки $z$, называется вектор, начало которого находится в точке 0, а конец в данной точке $z$ с координатами $(x, y)$.

Определение.
*Модулем* комплексного числа называется длина радиус-вектора

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\forall z \in \mathbb{C}$;

1. $|\overline{z}| = |z|$;

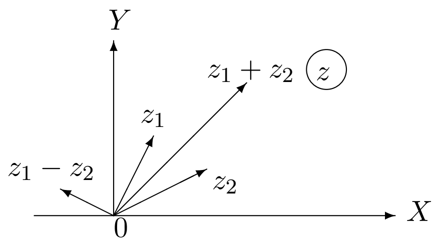
2. $z\overline{z} = |z|^2$;

3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$;

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2;$$

4. $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \ z_2 \neq 0, \quad \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$;

$$|z_1| = \left|z_1 \frac{z_2}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2} z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|.$$




Расстояние между двумя точками равно модулю радиус-вектора разности этих векторов:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

*Неравенство треугольника.*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

**Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.**

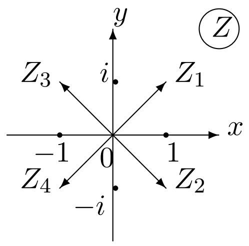
Определение. Главным аргументом комплексного числа $z \neq 0$ будем называть угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки $Z$:

$$\varphi = arg\ z, \quad \varphi \in (-\pi; \pi]\,.$$

Определение. Произвольный аргумент: $Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Примеры.
Найти главный аргумент всех четырех чисел: $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i, z_3 = -1+i, z_4 = -1-i$.

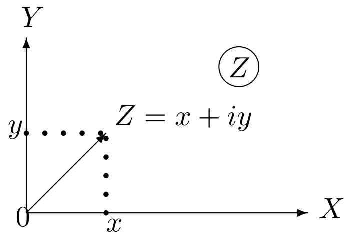
Решение: Нарисуем на комплексной плоскости радиус-векторы всех четырех чисел:




По определению главного аргумента: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{4},\ \varphi_3 = \frac{3\pi}{4},\ \varphi_4 = -\frac{3\pi}{4}$.

При $z = 0$ аргумент неопределен.

Рассмотрим комплексное число $z = x + iy,\ r = |z|\,,\ \varphi = arg\ z$.
Нарисуем радиус-вектор этого числа:




Очевидно, что $x = r\cos\varphi,\ y = \sin\varphi$.
Тогда $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, запись такого вида называется *тригонометрической формой* представления комплексного числа.

*Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); \quad z_1 \neq 0;$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2); \quad z_2 \neq 0;$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2));$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)); \tag{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}{1} + i\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2}{1}\right) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{5}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \tag{6}$$

$$|z| = r = 1; \quad \varphi = arg\ z; \quad z \neq 0.$$

*Формула Эйлера.*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{7}$$

Заменой $\varphi$ на $-\varphi$ получаем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{8}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \tag{9}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}. \tag{10}$$

*Формула Муавра.*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \tag{11}$$

Из (6) и (7) мы можем записать представление комплексного числа в *показательной форме.*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Используя (7), (8), (9) мы можем, также как и для тригонометрического представления, записать правила нахождения частного, произведения и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме:

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2}.$$

1. $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;
3. $(re^{i\varphi})^n = r^ne^{i\varphi n}$;
4. $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Пример.
Вычислить, используя тригонометрическую и показательную формы комплексного числа:

$$(1 - i\sqrt{3})^3(1 + i)^2.$$

Решение:

1. Вычисления в тригонометрической форме:

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}));$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4});$$

$$z_1^3 = 8(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi));$$

$$z_2^2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2});$$

$$z_1^3 z_2^2 = 2^4(\cos(-\frac{\pi}{2} + i\sin(-\frac{\pi}{2}))) = -16i.$$

2. Вычисления в показательной форме:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$z_2 = \sqrt{2}ei\frac{\pi}{4};$$

$$z_1^3 = 8e^{-i\pi};$$

$$z_2^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$z_1^3 z_2^2 = 8e^{-i\pi}2e^{i\frac{\pi}{2}} = 16e^{-\pi+\frac{\pi}{2}i} = 16e^{-1\frac{\pi}{2}} = 16(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = -16i.$$

## Извлечение корней из комплексных чисел.

$$\omega^n = Z; \quad n \in \mathbb{Z}; \quad Z \neq 0;$$
$$\omega^n = \rho^n e^{in\theta}; \quad Z = re^{i\varphi};$$
$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow \rho^n = r;\ n\theta = \varphi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$
$$\rho = \sqrt[n]{r}; \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n};$$
$$\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Покажем, что при нахождении корней по формуле (11) мы получаем ровно n различных корней:

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}\right)};$$
$$\omega_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)};$$
$$\vdots$$
$$\omega_{n-1} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right)};$$
$$\omega_n = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)}.$$

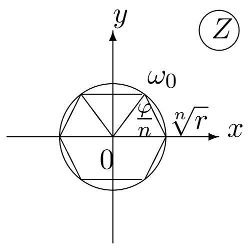
Очевидно, что первый и последний члены совпадают.

Формула нахождения корней:

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right));$$
$$k = 0, 1, ..., n-1.$$

Геометрическая интерпретация.

На комплексной плоскости точки $\omega_k$, $\quad k = 0, 1, ..., n-1$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{r}$ с центром в точке 0.

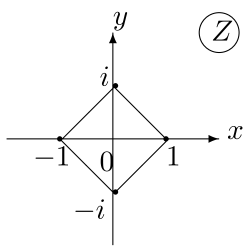



Пример.

Найти все значения корня $\sqrt[4]{1}$.

Решение:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$
$$k = 0 \quad \omega_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$
$$k = 1 \quad \omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$
$$k = 2 \quad \omega_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$
$$k = 3 \quad \omega_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i;$$



$y$
$Z$
$i$
$x$
$-1$
$0$
$1$
$-i$

**Линейные пространства**
**Понятие линейного пространства**

Рассмотрим множества объектов любой природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определены операция сложения двух элементов и операция умножения на число элемента этого множества. Такие множества, называемые линейными пространствами, обладают целом рядом общих свойств, которые и будут установлены ниже.

Множество $\mathcal{L}$ элементов любой природы будем называть *линейным пространством*, если выполнены следующие требования.

I. Имеется правило, посредством которого $\forall x, y \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $z \in \mathcal{L}$, называемый *суммой* и обозначаемый $z = x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого $\forall x \in \mathcal{L}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ставится в соответствие элемент $u \in \mathcal{L}$, называемый *произведением элемента $x$ на число* $\lambda$ и обозначаемый $u = \lambda x$.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{L}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

   1) $x + y = y + x$;
   2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
   3) $\exists \theta \in \mathcal{L} : x + \theta = x$;
   4) $\forall x \ \exists x' \in \mathcal{L}$(противоположный элемент): $x + x' = \theta$;
   5) $1 \cdot x = x$;
   6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Если число $\lambda \in \mathbb{R}$, то множество $\mathcal{L}$ называется вещественным линейным пространством. Если число $\lambda \in \mathbb{C}$, то множество $\mathcal{L}$ называется комплексным линейным пространством.

**Примеры линейных пространств.**

1. Множество функций $C_{[a,b]}$, определенных и непрерывных на $[a, b]$. Операции сложения таких функций и умножения их на вещественные числа определены обычными правилами математического анализа. Элементарно проверяется справедливость восьми аксиом, в частности, нулевым элементом является функция, тождественно равная нулю на отрезке $[a, b]$. Это позволяет заключить, что $C_{[a,b]}$ является линейным пространством.

2. Множество $P_n(x)$ алгебраических многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, с операциями, опеределенными так же, как в предыдущем примере. Заметим, что множество $P_n(x)$, если его рассматривать на отрезке $[a,b]$, является подмножеством линейного пространства $C_{[a,b]}$, рассмотренного в предыдущем примере.

**П р и м е р 1.** *Определить, является ли множество матриц* $M^{2\times2}$ *вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, *где* $a,b,c \in \mathbb{R}$, *линейным пространством?*

*Решение.*

*Пусть* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}$, *тогда*
$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 2 \end{pmatrix}$.
$C \notin M^{2\times2}$, *следовательно, множество не является ни вещественным, ни комплексным линейным пространством.*

**П р и м е р 2.** *Определить, является ли множество матриц* $S^{2\times2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $a,b,c \in \mathbb{R}$, *вещественным линейным пространством?*

*Решение.*

*Пусть* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$, *тогда*
$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times2}$,
$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times2}$, *где* $\lambda \in \mathbb{R}$, *все 8 аксиом выполняются тоже, следовательно, множество матриц является вещественным линейным пространством.*

**Свойства линейного пространства**.

1. Любое линейное пространство имеет только один нулевой элемент.

2. Каждый элемент линейного пространства имеет только один противоположный элемент.

3. Если элемент $(-x)$ противоположен элементу $x$, то элемент $x$ является противоположным для $(-x)$.

4. Для любых двух элементов $a$ и $b$ уравнение $a + x = b$ относительно $x$ имеет решение, и притом единственное.
   *Разностью* двух элементов $b - a$ называется такой элемент $x$, который является решением уравнения $a + x = b$;

5. Произведение произвольного элемента линейного пространства на число 0 равно нулевому элементу: $0 \cdot x = \theta$.

6. Элемент, противоположный данному элементу $x$, равен произведению $x$ на число $-1$: $(-x) = (-1)x$.

7. Произведение нулевого элемента на любое число есть нулевой элемент: $\lambda\theta = \theta$.

## Базис и размерность линейного пространства

**Линейно независимые и линейно зависимые системы элементов**.

Рассмотрим произвольное линейное пространство $\mathcal{L}$ с элементами $x, y, \dots, z$.

*Линейной комбинацией* элементов $x, y, \dots, z$ пространства $\mathcal{L}$ мы будем называть сумму произведений этих элементов на произвольные числа, т.е. выражения вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, в зависимости от того, вещественное или комплексное пространство $\mathcal{L}$.

Элементы $x, y, \dots, z \in \mathcal{L}$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация элементов $x, y, \dots, z$ с указанными числами является нулевым элементом пространства $\mathcal{L}$, т.е. имеет место равенство

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z = \theta. \tag{1}$$

Элементы $x, y, \dots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются *линейно независимыми*, если равенство (1) выполняется только при условии $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы элементы $x, y, \dots, z \in \mathcal{L}$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.*

**П р и м е р 3.** *Выяснить, является ли линейно независимой каждая из следующих систем элементов*:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*вещественнозначных матриц ;*

2) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$ *в пространстве* $C_{(-\infty,+\infty)}$ *вещественнозначных функций, непрерывных на* $[a, b]$?

*Решение.*

*1) Составим линейнейную комбинацию данных матриц*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

*Она равна нулевой матрице* $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *только в том случае, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$*, а это означает, что данная система матриц является линейно независимой.*

*2) Составим линейную комбинацию данных функций и приравняем ее к нулевому элементу (функции, тождественно равной нулю):*

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos 2x = \theta.$$

*Это равенство справедливо, например, при* $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = -1,$ *следовательно, данная система элементов является линейно зависимой.*

**Свойства систем элементов**.

1. Если в системе элементов есть нулевой элемент, то эта система будет линейно зависимой.

2. Если подсистема элементов линейно зависимая, то вся система будет линейно зависимой.

3. Любая подсистема линейно независимой системы элементов линейно независимая.

4. Если система элементов $x, y, \ldots, z$ линейно независимая, а система элементов $x, y, \ldots, z, z'$ линейно зависимая, то $z'$ представляется в виде линейной комбинации элементов $x, y, \ldots, z$.

Система линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ называется *базисом пространства* $\mathcal{L}$, если для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ найдутся числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \tag{2}$$

При этом равенство (2) называется *разложением элемента* $x$ *по базису* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *координатами* элемента $x$ (относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Любой элемент $x \in \mathcal{L}$ может быть разложен по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ единственным образом, т.е. координаты любого элемента $x$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяются однозначно.

Значение базиса заключается также и в том, что операции сложения элементов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами – координатами этих элементов.

**Теорема 2.** *При сложении любых двух элементов линейного пространства* $\mathcal{L}$ *(относительно любого базиса пространства* $\mathcal{L}$ *) их координаты складываются, а при умножении произвольного элемента на любое число* $\lambda$ *соответствующие координаты этого элемента умножаются на число* $\lambda$.

**Примеры базисов различных пространств**.

1. Для линейного пространства матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ базисом является, например, система элементов $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Для линейного пространства многочленов степени не выше двух базисом является, например, система элементов $1, x, x^2$. Координатами элемента $5 - x - x^2$ данного пространства в этом базисе будут $(x_1, x_2, x_3)^T = (5, -1, 1)^T$.

**П р и м е р 4.** *Определить, какая из следующих систем элементов является базисом линейного пространства* $\mathbb{R}^3$ *векторов с вещественными коэффициентами:*

*1.* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*2.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*3.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*4.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

*Решение.*

*Системы элементов 2, 4 являются базисом линейного пространства* $\mathbb{R}^3$*, т.к. эти системы линено независимые и любой элемент этого пространства представляется в виде линейной комбинации элементов одной из этих систем.*

*Системы элементов 1, 3 не являются базисом линейного пространства* $\mathbb{R}^3$*, т.к. система 3 является линейно зависимой, а через систему 1 нельзя представить в виде линейной комбинации любой элемент этого пространства.*

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *n-мерным*, если в нем существует линейно независимая система из $n$ элементов, а любая система из $n+1$ элементов линейно зависимая. При этом число $n$ называется *размерностью* пространства $\mathcal{L}$.

*Обозначение*: $\dim(\mathcal{L})$.

Линейное пространство $L$ называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

*Обозначение*: $\dim(L) = \infty$.

**Примеры размерностей линейных пространств.**

1. $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.
2. $\dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$.
3. $\dim(P_n(x)) = n + 1$.

**Теорема 3.** *Если $\mathcal{L}$ – линейное пространство размерности $n$, то в нём любая линейно независимая система из $n$ элементов образует базис.*

**Теорема 4.** *Если в пространстве $\mathcal{L}$ существует базис из $n$ элементов, то это пространство размерности $n$.*

### 1.3 Подпространства линейных пространств

Подмножество $\mathcal{L}'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется *линейным подпространством*, если выполняются для этого подмножества следующие требования:

I. Если $x, y \in \mathcal{L}'$, то $x + y \in \mathcal{L}'$.

II. Если $x \in \mathcal{L}', \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\lambda x \in \mathcal{L}'$.

**Теорема 5**. *Линейное подпространство само является линейным пространством.*

Рассмотрим для линейного пространства $\mathcal{L}$ линейные подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство $\{\theta\}$. Эти два подпространства называются *несобственными*, а все остальные *собственными.*

**Примеры линейных подпространств.**

1. В линейном пространствеа $V_3$ свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют:

   а) все векторы, параллельные данной плоскости;

   б) все векторы, параллельные данной прямой.

2. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений от $n$ переменных можно рассматривать как вектор в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Множествотаких векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

**Понятие линейной оболочки**.

Рассмотрим элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$. *Линейной оболочкой* элементов $x, y, \ldots, z$ будем называть совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество элементов вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

*Обозначение*: $L(x, y, \ldots, z)$.

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой элементов своего базиса.

Например, линейное подпространство, заданное однородной системой уравнений, является линейной оболочкой фундаментальной системы решений (ФСР).

Линейная оболочка произвольных элементов $x, y, \ldots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$, очевидно, является подпространством основного линейного пространства $\mathcal{L}$.

**П р и м е р 5.** *Являются ли каждое подмножество линейного пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ линейным подпространством:*

*а) множество симметричных матриц;*

*б) множество вырожденных матриц?*

*Решение.*

*а) сумма симметричных матриц есть симметричная матрица; при умножении симметричной матрицы на число получаем также симметричную матрицу, следовательно, множество симметричных матриц является линейным подпространством.*

*б) рассмотрим сумму вырожденных матриц:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

*полученная матрица невырожденная ($\det \neq 0$). Следовательно, множество вырожденных матриц не является линейным подпространством.*

**Теорема 6 (о монотонности размерности)**. *Размерность любого подпространства $\mathcal{L}'$ $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ не превосходит размерности $n$ пространства $\mathcal{L}$. Если размерности линейного пространства и линейного подпространства совпадают, то подпространство совпадает с пространством.*

**Теорема 7**. *Если система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является базисом $k$-мерного подпространства $\mathcal{L}'$ $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$, то этот базис можно дополнить элементами $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ так, что система $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ будет являться базисом всего пространства $\mathcal{L}$.*

**Теорема 8 (о размерности линейной оболочки)**. *Размерность линейной оболочки $\dim(L(x, y, \ldots, z))$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе $x, y, \ldots, z$. В частности, если система $x, y, \ldots, z$- линейно независимая, то размерность линейной оболочки системы $x, y, \ldots, z$ равна числу элементов в этой системе, а сами элементы $x, y, \ldots, z$ образуют базис линейной оболочки.*

*Рангом системы элементов* в линейном пространстве называют размерность линейной оболочки этой системы элементов.

Если в качестве системы элементов рассматривать строки (столбцы) матрицы, то получим следующее определение ранга матрицы: *ранг матрицы*-максимальное число линейно независимых строк(столбцов) матрицы.

**<u>Сумма и пересечение подпространств</u>**.

Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ – линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. *Суммой подпространств* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество всевозможных элементов $x$, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \tag{3}$$

где $x_i \in \mathcal{L}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$.

*Обозначение*: $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_k$.

Представление (3) элемента $x$ называется *разложением элемента $x$ по подпространствам* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$.

*Пересечением подпространств* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in \mathcal{L} | x_i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

*<u>Замечание</u>*. Пересечение подпространств не может быть пустым множеством, т.к. всегда содержит нулевой элемент $\theta$ пространства.

**Примеры суммы и пересечения линейных подпространств.**

Пусть $V_3$ – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXY$.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXZ$.

$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ – все пространство $V_3$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ – множество векторов, параллельных оси OX.

**Теорема 9**. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ являются линейными подпространствами пространства $\mathcal{L}$.*

**Теорема 10**. *Для любых линейных подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство:*

$$\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2).$$

**<u>Прямая сумма подпространств</u>**.

Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение в ней по слагаемым подпространства единственно.

*Обозначение*: $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_k$.

**Пример прямой суммы линейных подпространств.**

Пусть $V_3$ – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных оси $OY$.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXZ$.

$L_1 \oplus L_2 = V_3$.

**Теорема 11**. *Для того чтобы n-мерное пространство* $\mathcal{L}$ *представляло собой прямую сумму подпространств* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *достаточно, чтобы пересечение* $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$ *и чтобы* $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(L_2)$.

### 1.4 Преобразование координат при преобразовании базиса

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n),\ \dim \mathcal{L} = n$.

Выясним, как меняются координаты элемента при переходе от базиса $e$ к $e'$. Так как элементы базиса $e'$ являются элементами линейного пространства $\mathcal{L}$, то каждый из них можно разложить по базису $e$.

$$\begin{array}{c} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array} \tag{4}$$

Коэффициенты $a_{ij}$ в равенстве (4) образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\,n\times n}$, которая называется *матрицей перехода* от базиса $e$ к $e'$.

*Обозначение*: $P_{e\to e'}$.

Равенства (4) в матричном виде могут быть записаны : $e' = eP_{e\to e'}$.

**Теорема 12**. *Матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.*

**Теорема 13**. *Координаты элемента $x$ в базисах $e$ и $e'$ связаны между собой следующим образом:*

$$x_e = P_{e\to e'}x_{e'}.$$

**П р и м е р 6.** *В линейном пространстве многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами заданы два базиса:*
$e : e_1 = 1,\quad e_2 = x,\quad e_3 = x^2;$
$e' : e'_1 = 1,\quad e'_2 = x - 1,\quad e'_3 = (x-1)^2$. *Найти* $P_{e\to e'}$.

*Решение.*
$1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$
$x - 1 = -1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$

$$(x-1)^2 = 1\cdot e_1 - 2\cdot e_2 + 1\cdot e_3. \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**П р и м е р 7.** *Найти координаты элемента $x$ в базисе $e'$, если $x_e = 3e_1 - 2e_2;\quad e'_1 = 5e_1 + 3e_2,\quad e'_2 = e_1 + e_2$.*

*Решение.*

$$x_{e'} = P^{-1}_{e\to e'}x_e; \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \ P^{-1}_{e\to e'} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$x_{e'} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

**Евклидовы пространства**
**Понятие вещественного евклидова пространства**

Вещественное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *вещественным евклидовым пространством*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства $\forall x, y \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом $(x, y)$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{E}$ и $\forall \in \mathbb{R}$

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

**Пример вещественного евклидова пространства.**
Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C_{[a,b]}$, где скалярное произведение задано:

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**П р и м е р 8.** *Является ли вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ вещественным евклидовым пространством, если паре векторов* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *поставлено в соответствие число:*
$(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2$.

*Решение.* *Проверяем выполнение четырех аксиом:*

*1.* $(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2 = y_1 y_2 x_1 x_2 = (y, x)$;

*2.* $(x + y, z) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) z_1 z_2 \neq (x, z) + (y, z)$.

*вторая аксиома не выполняестся, следовательно, данное вещественное пространство не является вещественным евклидовым пространством.*

**Свойства скалярного произведения**.

1) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

2) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;

3) $(x, \theta) = 0$;

4) $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y),\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n$;

5) если $x, y \in \mathcal{E}$ такие, что $\forall z \in \mathcal{E}$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

**Теорема 14. (Неравенство Коши-Буняковского)**. $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

**Основные метрические понятия**.

*Длиной* элемента $x$ евклидова пространства, будем называть арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого элемента.

*Обозначение*: $|x|$.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из аксиом скалярного произведения вытекают следующие факты:

- Любой элемент $x \in \mathcal{E}$ имеет длину, при этом

  $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{E}$ и $\quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

- $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|\,, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

В новой терминологии неравенство Коши-Буняковского может быть записано следующим образом:

$$|(x, y)| \leq |x||y|.$$

Элемент, длина которого равна единице, называется *нормированным*.

Любой ненулевой элемент можно нормировать, поделив его на длину.

**Теорема 15**. В евклидовом пространстве $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливы следующие неравенства (неравенства треугольника)*

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

*Углом* в вещественном евклидовом пространстве будем называть угол $\varphi \in (0;\pi]$, который определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}} = \frac{(x,y)}{|x|\,|y|}. \tag{5}$$

Корректность определения следует из неравенства Коши-Буняковского.

**П р и м е р 9.** *Найти в евклидовом пространстве непрерывных на [0;1] вещественно-значных функций $C_{[0,1]}$:*

*1) длину элемента $f(x) = x$;*

*2) скалярное произведение $f(x) = x$; $g(x) = e^x$;*

*3) угол между элементами $g(x) = x$ и $f(x) = 1$,*

*если скалярное произведение задано следующим образом:* $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.

*Решение.*

1. $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$, $\quad |f(x)| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{cc} e^x dx = dv & v = e^x \\ u = x & du = dx \end{array} \right\} = xe^x|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = (xe^x - e^x)|_0^1 = e^x(x-1)|_0^1 = 1.$

3. *Воспользуемся формулой (5).*

   - $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$;
   - $(g(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$; $\quad \sqrt{(g(x), g(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
   - $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 dx = x|_0^1 = 1$; $\quad \sqrt{(f(x), f(x))} = 1$;

$$\cos\varphi = \frac{(f(x), g(x))}{\sqrt{(f(x), f(x))}\sqrt{(g(x), g(x))}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = 30^\circ.$$

### 2.2 Ортогональные и ортонормированные базисы

Элементы $x, y \in \mathcal{E}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю $(x, y) = 0$.

Согласно свойству скалярного умножения нулевой элемент ортогонален любому элементу.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортогональной*, если выполняется $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Систему, состоящую из одного элемента, будем считать ортогональной.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = 0, \ i \neq j;$$
$$(e_i, e_j) = 1, \ i = j.$$

**Теорема 16**. *Ортогональная система ненулевых элементов является линейно независимой.*

**Следствие**. Ортонормированная система элементов является линейно независимой.

Так как евклидово пространство является линейным пространством, то правомерно говорить о размерности и базисах этого пространства. Евклидово пространство может быть конечномерным и бесконечномерным.

Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему элементов, то этот *базис* называют *ортогональным.*

Если в линейном пространстве все базисы равноправны, то в евклидовом пространстве наличие скалярного произведения позволяет выделить ортогональный и ортонормированный базисы, которые более удобны и играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли декартовой прямоугольной системы координат в аналитической геометрии.

**Теорема 17**. *Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $\mathcal{E}_n$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Рассматриваемое доказательство носит название *ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – произвольный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_n$.

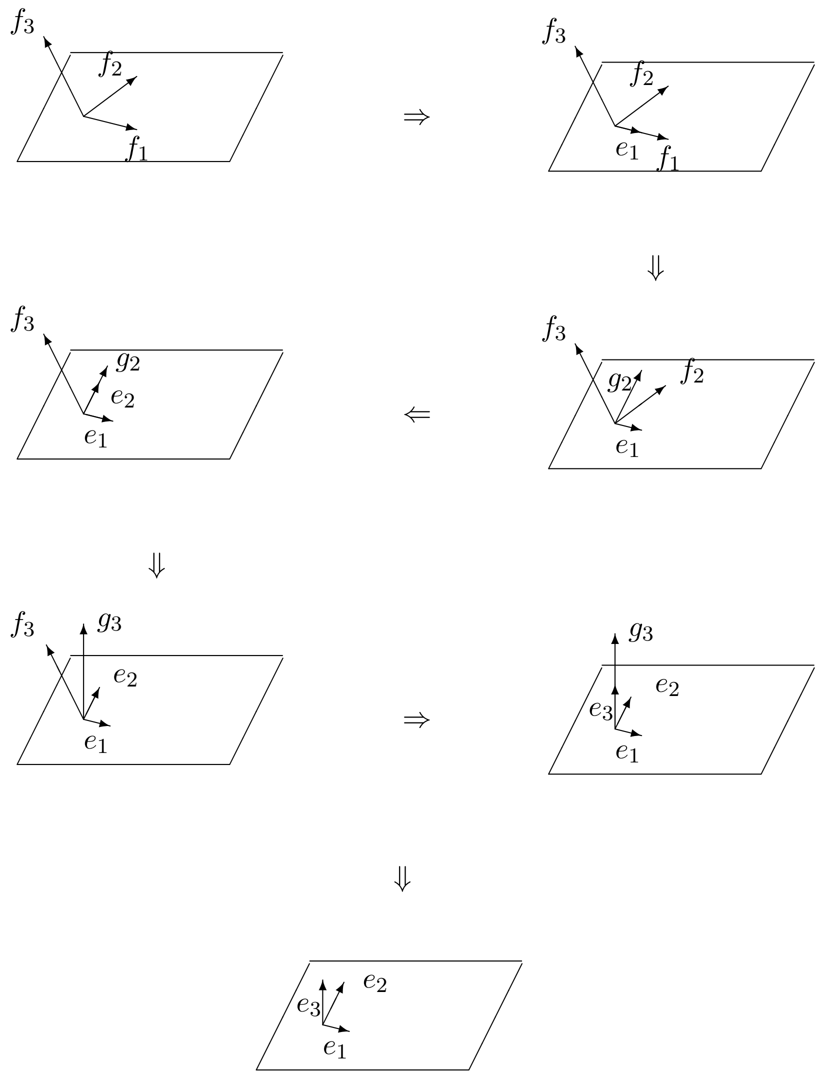
Модифицируя этот базис, мы будем строить новый $e_1, e_2, \ldots, e_n$, который будет ортонормированным.

Введем дополнительно систему элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1, \quad \ldots, \quad g_n = f_n - (f_n, e_1)e_1 - \ldots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}, \ldots, e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

Рассмотрим пример при $n = 3$.




Для обоснования алгоритма нужно показать, что ни один из последовательно вычисленных элементов $g_i$ не является нулевым (иначе процесс оборвался бы преждевременно) и что все элементы $g_i$ попарно отогональны.

Тогда и элементы $e_i$ образуют ортогональную систему, но при этом длина каждого из них равна единице.

Ортогональная система из $n$ ненулевых элементов согласно теореме 14 линейно независимая и поэтому в $n$-мерном евклидовом пространстве является базисом.

Докажем по методу математической индукции.

1. Докажем для $n = 1$.

   $g_1 \neq 0$, т.к. $g_1 = f_1$, то систему, состоящую из одного элемента, считают ортогональной.

2. Пусть выполняется при $n = k$.

3. Докажем для $n = k + 1$.

Вычислим новый элемент $g_{k+1}$ по формуле

$$g_{k+1} = f_{k+1} - (f_{k+1}, e_1)e_1 - \ldots - (f_{k+1}, e_k)e_k. \qquad (*)$$

Предположив, что $g_{k+1} = \theta$, получим, что

$$f_{k+1} = (f_{k+1}, e_1)e_1 + \ldots + (f_{k+1}, e_k)e_k,$$

т.е. элемент $f_{k+1}$ является линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, которые выражаются через $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Следовательно, $f_{k+1}$ является линейной комбинацией $f_1, f_2, \ldots, f_k$, а следовательно, система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ линейно зависимая. Но это противоречит условию линейной независимости системы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Итак, предположение о том, что $g_{k+1} = \theta$, привело к противоречию.

Покажем, что элемент $g_{k+1}$ ортогонален каждому из элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Умножим скалярно (*) на $e_i$, где $i \leq k$. Учитывая, что элементы $e_1, e_2 \ldots e_k$ образуют ортонормированную систему, получим:

$$(g_{k+1}, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i)(e_i, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i) = 0,$$

Следовательно, элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_{k+1}$, где $e_{k+1} = \frac{g_{k+1}}{|g_{k+1}|}$, образуют ортонормированную систему. □

В вычислениях удобны формулы, где сначала последовательно вычисляются элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$, а затем проводится их нормировка, приводящая к элементам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ :

$$g_1 = f_1; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)g_1}{(g_1, g_1)}; \quad \ldots \quad ; g_n = f_n - \frac{(f_n, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} - \ldots - \frac{(f_n, g_{n-1})g_{n-1}}{(g_{n-1}, g_{n-1})};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}; \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}; \quad \ldots \quad ; e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

**П р и м е р 10.** *В евклидовом пространстве дан базис:*

$$f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad f_2 = (1, 1, 1)^T; \quad f_3 = (0, 2, 3)^T.$$

*По этому базису построить ортонормированный базис. Скалярное произведение задано стандартным образом*

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

<u>*Решение.*</u>

$$g_1 = f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} = \frac{1}{7}(-2, 4, 1)^T;$$

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} - \frac{(f_3, g_2)g_2}{(g_2, g_2)} = \frac{1}{3}(-2, -2, 4)^T;$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, 2)^T; \quad e_2 = \frac{7}{\sqrt{21}}(-2, 4, 1)^T; \quad e_3 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(-2, -2, 4)^T.$$

**Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей**

Пусть $x, y \in \mathcal{E}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис этого пространства, $x, y$ в этом базисе представляются:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n,$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j). \tag{6}$$

В матричном виде (6) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, \Gamma_e \, [y]_e \,, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \text{ – матрица Грама.}$$

Матрица Грама является симметричной: $\Gamma_e = \Gamma_e^T$.

Если базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный, то $\Gamma_e = E$, а (7) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, [y]_e$$

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $P_{e \to e'} = (a_{ij})$ – матрица перехода, $\Gamma_{e'} = (g'_{ij})$ – матрица Грама.

Согласно определению матрицы перехода:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k.$$

Тогда элемент матрицы *Грама* представим в виде:

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} (e_k, e_l).$$

В матричной записи это эквивалентно:

$$\Gamma_{e'} = P^T_{e\to e'} \Gamma_e P_{e\to e'}.$$

**Теорема 18**. *Система элементов* $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{E}$*линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы* Грама *этой системы равен нулю:*

$$det \Gamma_a = 0.$$

**Теорема 19**. *Определитель матрицы* Грама *любого базиса положителен.*

**П р и м е р 11.** *Дано вещественное евклидово пространство, где скалярное произведение задано следующим образом:*

$$(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

*Вычислить матрицу Грама* $\Gamma_e$ *стандартного базиса*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*и матрицу Грама* $\Gamma_f$*, базиса* $f$*:*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

1. *Вычислим матрицу Грама, воспользовавшись формулой:*

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Найдем* $\Gamma_f$ *двумя способами:*

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = P^T_{e\to f} \Gamma_e P_{e\to f}$$

$P_{e\to f}$ – *это координаты базиса* $f$ *в базисе е выписанные по столбцам:*

$$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Ортогональная матрица**

Квадратная матрица $Q$ называется *ортогональной*, если она удовлетворяет условию

$$Q^T Q = E.$$

**Примеры ортогональных матриц.**

1. Единичная матрица $E$.
2. Матрица Гивенса (вращения) $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

**Свойства ортогональной матрицы**.

- $\det Q = \pm 1$.
- $Q^{-1} = Q^T$.
- Если $Q$ – ортогональная, то $Q^T$ – тоже ортогональная матрица.
- $QQ^T = E$.
- Пусть $Q_1, Q_2$ – ортогональные матрицы одного порядка, тогда $Q_1 Q_2$ – ортогональная матрица.
- Пусть $Q$ – ортогональная, тогда $Q^{-1}$ – тоже ортогональная матрица.

Если матрица ортогональная, то удобно находить к ней обратную, например

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

**Ортогональное дополнение**

Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$. Элемент $x \in \mathcal{E}$ *ортогонален к линейному подпространству* $\mathcal{H}$, если $x$ ортогонален любому элементу $y \in \mathcal{H}$.

Множество элементов из вещественного линейного евклидова пространства ортогональных линейному подпространству $\mathcal{H}$ называется *ортогональным дополнением* $\mathcal{H}^{\perp}$.

**Теорема 20**. *Ортогональное дополнение $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством.*

**Теорема 21**. *Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, тогда*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{E}.$$

**Следствие.** Если $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, то для любого $f \in \mathcal{E}$ существует и при том единственное разложение

$$f = g + h. \tag{8}$$

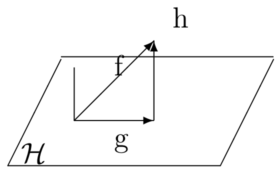
где $g \in \mathcal{H}, \quad h \in \mathcal{H}^{\perp}$.

В разложении (8)

$g$ – ортогональная проекция элемента $f$ на подпространство $\mathcal{H}$;

$h$ – ортогональная составляющая элемента $f$.

Нахождение разложения (8) называется *задачей о перпендикуляре*. Этот термин заимствован из геометрии. Чтобы получить разложение геометрического вектора, достаточно опустить перпендикуляр из конца вектора $f$ на плоскость.




Имея ввиду эту аналогию, называют

$f$ – наклонной к подпространству $\mathcal{H}$;

$h$ – перпендикуляром, опущенным на подпространство $\mathcal{H}$.

Аналогия с геометрическими векторами состоит не только в названии. Отметим несколько тех свойств $g$ и $h$ в разложении (8), которые имеют место и в геометрии т.к.

$$(f, f) = (g + h, g + h) = (g, g) + (h, h),$$

то

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2. \tag{9}$$

$$|h| \leq |f|.$$

Последнее неравенство свидетельствует о том, что длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной. Равенство (9) называется *теоремой Пифагора в евклидовом пространстве*

**П р и м е р 12.** *В евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением построить* $L^{\perp}$ *для подпространства* $L(a_1, a_2)$, *где* $a_1 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T, \ \ a_2 = (1\ -1\ \ 1\ \ 1)^T.$

*Решение.*

*Пусть* $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$ *– элемент ортогонального дополнения.*

*Система линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

*определяет ортогональное дополнение.*

*Найдем ФСР данной системы:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4; \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

$$X^* = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \ L^{\perp}: \ L(e_1, e_2).$$

**П р и м е р 13.** *Найти ортогональную проекцию* $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ *на подпространство* $L(b_1, b_2)$, *где* $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

*Решение.*

$$f = g + h; \quad g = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2;$$

$$f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + h.$$

*Умножаем последнее равенство скалярно, сначала на* $b_1$, *затем на* $b_2$. *Учитывая, что* $(b_1,h)=0,\quad (b_2,h)=0$ *, так как они ортогональны, получаем*

$$\begin{cases} (b_1,f)=\alpha_1(b_1,b_1)+\alpha_2(b_1,b_2), \\ (b_2,f)=\alpha_1(b_2,b_1)+\alpha_2(b_2,b_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3=2\alpha_1-3\alpha_2, \\ 9=-3\alpha_1+6\alpha_2; \end{cases}$$

$$\alpha_1=\alpha_2=3.$$

$$g=3b_1+3b_2;\quad g=3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Понятие унитарного пространства**

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого двум элементам $x, y \in \mathcal{U}$ ставится в соответствие комплексное число называемое скалярным произведением и обозначаемое символом $(x, y)$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{U}, \quad \forall \lambda \in$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ .

**Примеры комплексных евклидовых пространств.**

1. Множество комплексно-значных функций $C^*_{[a,b]} : z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t), \quad y(t)$ – вещественно-значные функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$.

   Операции сложения этих функций и умножения их на комплексные числа заимствуем из анализа. Скалярное произведение двух любых таких функций определим соотношением

$$(z_1(t), z_2(t)) = \int_a^b z_1(t)\overline{z_2(t)}dt.$$

2. Множество вектор-столбцов с комплексными координатами

$$x, y \in \mathbb{C}^n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

   Скалярное произведение введено следующим образом

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

**П р и м е р 14.** *Можно ли в унитарном пространстве квадратных матриц 2-ого порядка ввести скалярное произведение по формуле* $(A, B) = a_1\overline{a_2} - b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} - d_1\overline{d_2}$*, где* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$?

*<u>Решение.</u> Проверим четвертую аксиому.* $(A, A) = a_1\overline{a_1} - b_1\overline{b_1} + c_1\overline{c_1} - d_1\overline{d_1}$. *Неравенство* $(A, A) \geq 0$ *выполняется только тогда, когда* $|a_1|^2 + |c_1|^2 \geq |b_1|^2 + |d_1|^2$. *Следовательно, ввести скалярное произведение по данной формуле нельзя.*

**Свойства скалярного произведения**.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
2. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.
3. $(x, \theta) = 0$.
4. $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y), \quad \alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n.$
5. Если $x, y \in \mathcal{U} : \forall z \in \mathcal{U}$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

**Теорема 22 (Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве)**. *Для* $\forall x, y \in \mathcal{U}$*справедливо следующее неравенство*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Длина в унитарном пространстве вводится таким же образом как в вещественном евклидовом пространстве: $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Понятие угла в унитарном пространстве вводить не имеет смысла, т.к. $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Понятие ортогонального и ортонормированного базиса, процесс ортогонализации системы элементов, понятие ортогонального дополнения, ортогональной проекции элемента на подпространство без изменения определений и общих схем рассуждений переносится на унитарное пространство.

**Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей в унитарном пространстве**

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ задан некоторый базис $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Рассмотрим $x, y \in \mathcal{U}, \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (e_i, e_j). \tag{10}$$

Формула (10) в матричном виде запишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \Gamma_e [\bar{y}]_e,$$

где $\Gamma_e$ – матрица Грама

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \dots & (e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_e = E$ и

$$(x, y) = [x]_e^T [\bar{y}]_e.$$

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ даны два базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$, тогда справедлива формула:

$$\Gamma_{e'} = P_{e \to e'}^T \Gamma_e \bar{P}_{e \to e'}.$$

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_{e'} = P_{e \to e'}^T \bar{P}_{e \to e'}$.

**П р и м е р 15.** *Векторы $x, y \in \mathcal{U}$, унитарного пространства заданы в базисе $e_1, e_2$ координатными столбцами $[x]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$, $[y]_e = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}^T$, соответственно, и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = -3ie_1 + 4e_2$. Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $e_1, e_2$ и скалярное произведение $(x, y)$.*

*Решение.*

$P_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & 4 \end{pmatrix}$; $P_{f \to e} = P_{e \to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$;

$\Gamma_e = P_{f \to e}^T \Gamma_f \bar{P}_{f \to e}$;

$\Gamma_e = \begin{pmatrix} 4 & -i \\ 3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$(x, y) = [x]_e^T \Gamma_e [\bar{y}]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 3i.$

**Унитарная матрица**

Матрица $R$ называется *унитарной*, если выполняется равенство

$$\bar{R}^T R = E.$$

**Свойства унитарной матрицы**:

1. $\det R = \pm 1$.

2. $\bar{R}^T = R^{-1}$.

3. Если $R$ – унитарная матрица, то $\bar{R}^T$ – тоже унитарная матрица.

4. $R\bar{R}^T = E$.

5. Если $R_1$ и $R_2$ – унитарные матрицы, то $R_1 R_2$ – унитарная матрица.

6. Если $R$ – унитарная матрица, то $R^{-1}$ – тоже унитарная матрица.

**Линейные операторы в линейных пространствах**
**Определение и простейшие свойства**

Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ линейные пространства размерности $m$ и $n$ соответственно.

*Оператором*, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, называется отображение вида $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, которое каждому элементу $x \in \mathcal{L}_n$ ставит в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}_m$.

*Обозначения:* $\varphi(x) = y, \quad \varphi x = y$,
где $y$ – образ элемента $x$, а $x$ – прообраз элемента $y$.

*Оператор* называется *линейным*, если $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n, \forall\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняются соотношения:

1) $\quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$

2) $\quad \varphi(\lambda(x_1)) = \lambda\varphi(x_1).$

Если $\mathcal{L}_m$ представляет собой множество $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то линейный оператор называют *линейным функционалом* или *линейной формой.*

*Обозначение:* $f(x)$.

Линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, иногда называют *линейным отображением.*

Если пространство $\mathcal{L}_m$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_n$, то линейный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называют *линейным преобразованием* пространства $\mathcal{L}_n$.

Два оператора $\varphi$ и $\psi$ называются *равными*, если

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Примеры линейных операторов.**

1. Оператор (преобразование) $\varepsilon : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в $x$, является линейным и называется *тождественным оператором.*

2. Оператор $\Theta : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в нулевой элемент $\theta \in \mathcal{L}_m$, является линейным и называется *нулевым оператором.*

3. Пусть $P_n$ – пространство вещественных многочленов степени не выше $n$. Оператор $\varphi : P_n \to P_{n-1}$, определенный правилом $\varphi(p(x)) = p'(x)$, где $p(x) \in P_n$, является линейным и называется *оператором дифференцирования.*

4. Изоморфизм $\varphi$ линейных пространств $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}'_n$ является линейным оператором, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}'_n$.

5. Растяжение (сжатие) элементов пространства $\mathcal{L}_n$ в одно и то же число $\alpha$ раз является оператором в пространстве $\mathcal{L}_n$. Такой оператор называется *оператором подобия*: $\psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n,\ \psi x = \alpha x,\ x \in \mathcal{L}_n$.

**Простейшие свойства линейного оператора.**

Из определения вытекают следующие свойства линейных операторов.

1. Линейный оператор переводит нулевой элемент в нулевой элемент: $\varphi(\theta_1) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = \theta_2;\ \theta_1 \in \mathcal{L}_n,\quad \theta_2 \in \mathcal{L}_m$.

2. Линейный оператор сохраняет линейную комбинацию, т.е. переводит линейную комбинацию элементов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi x_i.$$

3. Линейный оператор переводит линейно зависимую систему элементов в линейно зависимую.

**Задание линейного оператора.**

Свойство 2° говорит о том, что для задания линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ достаточно определить его только на элементах $e_1, e_2, \cdots, e_n$ некоторого базиса пространства $\mathcal{L}_n$. Зная элементы $\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n$ можно однозначно найти образ любого элемена $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$:
$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in \mathcal{L}_m.$$

**Теорема 1.** *Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$, а $g_1, g_2, \cdots, g_n$ – произвольные элемены линейного пространства $\mathcal{L}_m$. Тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который переводит элементы $e_1, e_2, \cdots, e_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_n$ в элементы $g_1, g_2, \cdots, g_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_m$ соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим искомый оператор, положив для каждого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$
$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i. \tag{1}$$

Из единственности разложения элемента $x$ по базису следует, что правило (1) однозначно оределяет образ элемента $x$, при этом, как легко проверить,

$$\varphi e_i = g_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор $\varphi$ единственный, так как если $\psi$ любой другой линейный оператор, переводящий элемены $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в $g_1, g_2, \ldots, g_n$, то
$\psi x = \psi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \psi e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i g_i = \varphi x, \ \forall x \in \mathcal{L}_n \Rightarrow \varphi = \psi.$ $\square$

**Следствие.** Два оператора $\varphi, \ \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ равны тогда и только тогда, когда они одинаково определены на элементах базиса $\mathcal{L}_n$.

**Матрица линейного оператора**

Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.
По теореме из предыдущего параграфа оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ однозначно определяется заданием элементов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)$, которые однозначно определяются своими координатами в базисе $f$, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m, \\ \varphi(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m. \end{cases} \tag{2}$$

Матрица

$$[\varphi]_{fe} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* $\varphi$ в паре базисов $e$ и $f$.

**Координаты элемента и его образа.**

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.

**Теорема 2.** *Если $y = \varphi x$, то справедливо равенство*

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$ и $[\varphi]_{fe} = A = (a_{ij})$.
Утверждение (3) равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Докажем их. Имеем $y = \varphi x = \varphi(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \varphi e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i$.

Из единственности разложения элемента $y$ по базису $f$ следует (3).

**П р и м е р 1.** *Пусть* $\varphi : P_1 \to P_2$;
$\varphi(p(x)) = (x+1)p(x)$;
$e_1 = 1,\ e_2 = x; \quad f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2.$
*Найти:*

1. *Матрицу линейного оператора.*

2. *Проверить* $[\varphi]_{fe} y_e = [\varphi(y)]_f, \quad \forall y = p(x) \in P_1.$

<u>*Решение.*</u>

1. $\varphi e_1 = (x+1)\cdot 1 = x+1, \quad [\varphi e_1]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\varphi e_2 = (x+1)\cdot x = x^2 + x, \quad [\varphi e_2]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi e]_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $y = a + bx, \quad y_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$

$\varphi(y) = (x+1)(a+bx) = ax + a + bx^2 + bx = bx^2 + (a+b)x + a;$

$[\varphi(y)]_f = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}.$

$[\varphi]_{fe} y_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = [\varphi(y)]_f.$

## Матрицы оператора в различных базисах.

Пусть $e$ и $e' = e \cdot P_{e \to e'}$ – два базиса в пространстве $\mathcal{L}_n$ с матрицей перехода $P_{e \to e'}$, а $f$ и $f' = f \cdot P_{f \to f'}$ – два базиса пространства $\mathcal{L}_m$ с матрицей перехода $P_{f \to f'}$.

Одному и тому же оператору $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ в паре базисов $e$ и $f$ соответствует матрица $[\varphi]_{fe}$, а в паре базисов $e'$ и $f'$ соответствует матрица $[\varphi]_{f'e'}$.

**Теорема 3.** *Матрицы линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$[\varphi]_{f'e'} = P^{-1}_{f \to f'} [\varphi]_{fe} P_{e \to e'}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного элемента $x \in \mathcal{L}_n$ и его образа $y = \varphi x$ в силу $y_f = [\varphi]_{fe} x_e$ имеем

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e, \ y_{f'} = [\varphi]_{f'e'} x_{e'}. \tag{5}$$

В свою очередь,

$$x_e = P_{e \to e'} x_{e'}, \ y_f = P_{f \to f'} y_{f'}.$$

Подставив эти соотношения в (5), получим, что

$$P_{f \to f'} y_{f'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}$$

или

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} x_{e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}.$$

Так как это соотношение имеет место для любого $x_{e'}$, то

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'}.$$

В силу невырожденности матрицы перехода отсюда следует (4). □

Две прямоугольные одного размера матрицы $A$ и $B$ называются *эквивалентными*, если существуют такие две невырожденные матрицы $Q$ и $P$, что

$$B = Q^{-1} A P.$$

**Следствие 1.** Матрицы линейного операторав в различных парах базисов являются эквивалентными.

**Следствие 2.** Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

**Следствие 3.** Если оператор действует в одном пространстве (является преобразованием), то формула (4) будет иметь вид

$$[\varphi]_{e'} = P^{-1}_{e \to e'} [\varphi]_e P_{e \to e'}.$$

Две квадратные матрицы $A$ и $B$ одинаковых размеров называются *подобными*, если существует невырожденная матрица $P$, такая что справедливо равенство

$$B = P^{-1}AP.$$

**Теорема 5.** *Определители подобных матриц равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если матрицы $A$ и $B$ подобны, то согласно определению существует такая невырожденная матрица $P$, что $B = P^{-1}AP$.

Учитывая свойства определителя, получаем $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}P)\det(A) = \det(A)$. $\square$

**Следствие 4.** Матрицы линейного преобразования в различных базисах имеют равные определители.

**Линейное пространство линейных операторов**

Обозначим $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ множество линейных операторов, действующих из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$.

*Суммой* линейных операторов $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ будем называть оператор $\varphi + \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, определяемый формулой

$$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n. \tag{6}$$

*Произведением* линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ будем называть оператор $\alpha\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, такой что

$$(\alpha\varphi)x = \alpha\varphi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Теорема 6.** *Для любых операторов* $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m), \quad \alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n$ согласно (6) Имеем

$$(\varphi + \psi)(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y).$$

В силу линейности $\varphi, \psi$ и аксиом линейного пространства

$$(\varphi+\psi)(x+y) = (\varphi x+\varphi y)+(\psi x+\psi y) = (\varphi x+\psi x)+(\varphi y+\psi y) = (\varphi+\psi)x+(\varphi+\psi)y.$$

Для $\forall x \in \mathcal{L}_n,\ \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\varphi + \psi)(\lambda x) = \lambda((\varphi + \psi)x) \Rightarrow \varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$.

Аналогично доказывается, что $\alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$. $\square$

**Теорема 7.** *Множество линейных операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *является линейным пространством относительно введенных выше операций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить аксиомы линейного пространства, взяв в качестве нулевого элемента нулевое отображение $O \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, а в качестве противоположного к оператору $\varphi$ отображение $-\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, выполняемое по правилу

$$(-\varphi)x = -\varphi x,\ \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Все аксиомы вытекают из соответствующих аксиом линейного пространства, примененных к $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ и проверяются по единой схеме.

Проверим, например, коммутативность. Для $\forall \varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ и $\forall x \in \mathcal{L}_n$
$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x = \psi x + \varphi x$;
$(\psi + \varphi)x = \psi x + \varphi x$.

Таким образом, $\psi + \varphi = \varphi + \psi$. $\square$

**Теорема 8.** *Если* $\dim(\mathcal{L}_n) = n$, *а* $\dim(\mathcal{L}_m) = m$, *то линейное пространство операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *изоморфно пространству матриц* $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$.

**Следствие.** $\dim L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m) = \dim(\mathcal{L}_n) \cdot \dim(\mathcal{L}_m)$.

**Замечание.** Так как линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ изоморфно пространству матриц $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$, то при сложении линейных операторов их матрицы складываются, а при умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это же число.

### 1.4 Умножение линейных операторов

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $\psi : \mathcal{L}_m \to L_k$.

*Произведением* линейных операторов $\varphi, \psi$ будем называть оператор $\psi\varphi : \mathcal{L}_n \to L_k$, действующий по следующему правилу

$$(\psi\varphi)x = \psi(\varphi(x)), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Теорема 9.** *Если* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и* $\psi \in L(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_k)$, *то* $\psi\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n,\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\psi\varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi x) + \psi(\varphi y) = (\psi\varphi)x + (\psi\varphi)y$;
$(\psi\varphi)(\alpha x) = \psi(\varphi(\alpha x)) = \psi(\alpha(\varphi x) = \alpha\psi(\varphi x) = \alpha(\psi\varphi)x$. $\square$

**Свойства произведения линейных операторов.**

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако, если это произведение имеет смысл, то:

1. $\alpha(\varphi\psi) = (\alpha\varphi)\psi = \varphi(\alpha\psi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
2. $(\varphi + \psi)\xi = \varphi\xi + \psi\xi$.
   $\varphi(\psi + \xi) = \varphi\psi + \varphi\xi$.
3. $(\varphi\psi)\xi = \varphi(\psi\xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Следует из определения линейного оператора на скаляр и определения произведения операторов.
2. $((\varphi+\psi)\xi)x = (\varphi+\psi)(\xi x) = \varphi(\xi x) + \psi(\xi x) = (\varphi\xi)x + (\psi\xi)x = (\varphi\xi + \psi\xi)x$.
3. Согласно определению произведение линейных операторов заключается в их последовательном действии, и поэтому операторы $(\varphi\psi)\xi$ и $\varphi(\psi\xi)$ совпадают и, следовательно, тождественны.

Умножение линейных операторов не обладает свойством коммутативности. В самом деле, о коммутативности можно говорить лишь для линейных преобразований. Но и в этом случае умножение не коммутативно.

**Теорема 10.** *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т. е. если* $e, f, g$ *– базисы пространств* $\mathcal{L}_n,\ \mathcal{L}_m,\ L_k$ *соответственно и* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m, \quad \psi : \mathcal{L}_m \to L_k$, *то*

$$[\psi\varphi]_{ge} = [\psi]_{gf}[\varphi]_{fe}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[\varphi]_{fe} = (a_{ij}), \quad [\psi]_{gf} = (b_{ij}), \quad [\psi\varphi]_{ge} = (c_{ij})$, $\dim \mathcal{L}_n = n,\ \dim \mathcal{L}_m = m,\ \dim \mathcal{L}_k = k$.

Тогда

$$\psi\varphi e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} g_i. \tag{8}$$

$\psi\varphi e_j = \psi(\varphi e_j) = \psi(\sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} f_s) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj}(\psi f_s) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} \sum\limits_{i=1}^{k} b_{is} g_i =$
$= \sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{sj} b_{is} g_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (\sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}) g_i.$

Сравнение этого разложения с (8) приводит к равенству $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$, которое означает (7). □

**Обратный оператор**

Пусть $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Отображение $\varphi^{-1} : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *обратным оператором* к оператору $\varphi$, если

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon, \tag{9}$$

где $\varepsilon$ – тождественный оператор.

Из определения обратного оператора $\varphi^{-1}$ следует, что для $\forall x \in \mathcal{L}_n$ справедливо соотношение

$$\varphi^{-1}\varphi x = x.$$

Таким образом, если $\varphi^{-1}\varphi x = \theta$, то $x = \theta$, т.е., если оператор имеет обратный, то из условия $\varphi x = \theta$ следует, что $x = \theta$.

**Теорема 11.** *Для того, чтобы линейный оператор $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\varphi$ имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Это означает, что некоторым различным элементам $x_1$ и $x_2$, $x_2 - x_1 \neq \theta \in \mathcal{L}_n$ отвечает один и тот же элемент $y = \varphi x_1 = \varphi x_2$. Но тогда $\varphi(x_2 - x_1) = \theta$ и поскольку $\varphi$ имеет обратный, $x_2 - x_1 = \theta$. Но выше было отмечено, что $x_2 - x_1 \neq \theta$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия утверждения.

*Достаточность.* Допустим $\varphi$ действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Тогда каждому элементу $y \in \mathcal{L}_n$ отвечает элемент $x \in \mathcal{L}_n : y = \varphi x$.

Поэтому имеется оператор $\varphi^{-1}$, обладающий тем свойством, что $\varphi^{-1}y = \varphi^{-1}(\varphi x) = x$.

Легко убедиться, что $\varphi^{-1}$ линейный. Пусть $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{L}_n,\ \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n :$ $y_1 = \varphi x_1$, $y_2 = \varphi x_2$, при этом $x_1 = \varphi^{-1}y_1$, $x_2 = \varphi^{-1}y_2$.

Отсюда получим, что $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(\varphi x_1 + \varphi x_2) = \varphi^{-1}\varphi(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \varphi^{-1}y_1 + \varphi^{-1}y_2$.

Аналогично $\varphi^{-1}(\alpha y_1) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi x_1) = \varphi^{-1}\varphi(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha\varphi^{-1}y_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\square$

**Теорема 12.** *Матрица обратного оператора $\varphi^{-1}$ в произвольном базисе является обратной к матрице оператора $\varphi$ в этом же базисе.*

Доказательство. Пусть $e$ – произвольный базис пространства $\mathcal{L}_n$ и для оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ существует обратный оператор $\varphi^{-1}$. Перейдем в равенствах (9) к матрицам операторов в базисе $e$. Согласно теореме 10, получим, что $[\varphi]_e[\varphi^{-1}]_e = [\varphi^{-1}]_e[\varphi]_e = E$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для $[\varphi]_e$. $\square$

**Образ и ядро линейного оператора**

*Образом линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $y \in \mathcal{L}_m$, представляемых в виде $y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{L}_n$.

*Обозначение:* $\operatorname{im}\varphi$.

*Ядром линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $x \in \mathcal{L}_n$, для которых $\varphi(x) = \theta, \quad \theta \in \mathcal{L}_m$.

*Обозначение:* $\ker\varphi$.

**Теорема 13.** Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то $\operatorname{im}\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$; $\ker\,\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Докажем, что $\operatorname{im}\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$. Так как $y_1 \in \operatorname{im}\varphi,\ y_2 \in \operatorname{im}\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n$, что $y_1 = \varphi x_1,\ y_2 = \varphi x_2$,

$$y_1 + y_2 = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \varphi(x_1 + x_2);$$

$$\lambda y_1 = \lambda(\varphi x_1) = \varphi(\lambda x_1).$$

2. Докажем, что $\ker\,\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.
$x_1 \in \ker\,\varphi,\ \varphi x_1 = \theta$; $x_2 \in \ker\,\varphi,\ \varphi x_2 = \theta$.

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \theta + \theta = \theta;$$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda\varphi(x_1) = \lambda\theta = \theta. \ \square$$

Число $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \operatorname{rg}\varphi$ называется *рангом линейного оператора*, а $\dim(\ker\varphi) = \operatorname{defekt}\varphi$ называется *дефектом линейного оператора.*

Нулевой оператор $\Theta x = \theta$ и тождественный оператор $\varepsilon x = x$ являются предельными с точки зрения дефекта и ранга. Нулевой оператор имеет максимальный дефект равный размерности пространства, в котором этот оператор действует и минимальный ранг. Тождественный оператор имеет минимальный дефект (нулевой) и максимальный ранг равный размерности пространства, в котором этот оператор действует.

Оператор максимального дефекта определен однозначно, а операторов минимального дефекта и максимального ранга бесконечно много.

**Теорема 14.** *Пусть* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$. *Если* $e_1, e_2, \cdots, e_n$ *– базис в* $\mathcal{L}_n$, *то*

$$\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для множеств (10) имеет место двусторонние вложение:

с одной стороны, если $y \in \operatorname{im}\varphi$, то $y = \varphi x$ для некоторого элемента $x \in \mathcal{L}_n$, т.е. $y = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$;

с другой стороны, если $y \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi x$, где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, т.е. $y \in \operatorname{im} \varphi$. $\square$

**Теорема 15.** *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Доказательство. Из теоремы 14 и $\dim L(x, y, \dots, z) = \operatorname{rg}(x, y, \dots, z)$ следует, что $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{im} \varphi = \dim L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n) = \operatorname{rg}(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$. Ранг системы элементов $\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n$ совпадает с рангом системы элементов, состоящих из координат этих элементов в базисе $f$ пространства $\mathcal{L}_m$, т.е. с рангом системы столбцов матрицы $[\varphi]_{fe}$. $\square$

**Теорема 16.** *Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то*

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim(\mathcal{L}_n). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ – базис $\ker \varphi$. Дополним его до базиса $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства $\mathcal{L}_n$. Согласно теореме 14 $\operatorname{im} \varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_k) = L(\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n)$.

Докажем, что элементы $\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих элементов имеет место соотношение

$$\alpha_{k+1} \varphi e_{k+1} + \ldots + \alpha_n \varphi e_n = \theta;$$

$$\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = \theta.$$

Следовательно, $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker \varphi$. Это означает, что элемент $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$.

Таким образом, $\dim \operatorname{im} \varphi = n - k$, $\dim \ker \varphi = k$. Отсюда следует (11). $\square$

**Пример 2.** *Для линейного преобразования*

$$\varphi x = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ x_1 + 3x_3)^T, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

*Найти:*

*1)* $[\varphi]_e,\ e_1 = (1\ 0\ 0)^T,\ e_2 = (0\ 1\ 0)^T,\ e_3 = (0\ 0\ 1)^T$;

*2)* $\operatorname{defekt} \varphi, \quad \operatorname{rg} \varphi$;

*3)* $\ker \varphi, \quad \operatorname{im} \varphi$;

*4) базисы ядра и образа.*

*<u>Решение.</u> По условию* $\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

1. $[\varphi(e_1)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1$, $[\varphi(e_2)]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2$, $[\varphi(e_3)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_3$,
   $[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\operatorname{defekt}\varphi + \operatorname{rg}\varphi = 3$;
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\varphi = 2 \Rightarrow \operatorname{defekt}\varphi = 3 - 2 = 1.$

3. Согласно теореме 14 $\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3)$. Это означает, что $\operatorname{im}\varphi$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$ и, следовательно, за базис $\operatorname{im}\varphi$ можно взять любой из базисов системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$, например, $a_1, a_2$, получим, что $\operatorname{im}\varphi = L(a_1, a_2)$.

   Аналогично, $x \in \ker\varphi$ в том и только в том случае, когда $\varphi(x) = \theta$ или в координатной форме

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

   Отсюда следует, что $\ker\varphi$ совпадает с подпространством решений однородной системы (12), и в качестве базиса в $\ker\varphi$ может быть выбрана фундаментальная система решений уравнений (12). Найдем решение. Преобразуем матрицу системы

   $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, если $\alpha = 1$, то получим

   $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ker\varphi = L(b_1)$, $b_1$ – базисный вектор ядра.

**Собственные значения и собственные векторы линейного оператора**

**Характеристический многочлен.**

Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ рассмотрим

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

где $E$ – единичная матрица и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Относительно переменной $\lambda$ этот определитель является многочленом степени $n$ и может быть записан в виде

$$f(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i. \tag{13}$$

Многочлен $f(\lambda) = \det(A-\lambda E)$ называется *характеристическим многочленом матрицы* $A$, а уравнение $f(\lambda)=0$ – *характеристическим уравнением матрицы* $A$,

$$\alpha_0 = f(0) = \det A,$$

$$\alpha_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr} A.$$

**Теорема 17.** *Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A$ и $B$ подобные матрицы, т. е. $B = P^{-1}AP$, тогда в силу свойств определителей имеем

$$f_B(\lambda) = \det(B-\lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det(P^{-1}(A-\lambda E)P) =$$

$$= \det P^{-1} \det(A-\lambda E) \det P = \det(A-\lambda E) = f_A(\lambda). \ \square$$

Рассмотрим линейный оператор (преобразование) $\varphi \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$ и тождественный оператор $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$.

*Характеристическим многочленом оператора* называется функция

$$f(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\varepsilon), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как $\det\varphi = \det[\varphi]_e$, где $e$ – базис в $\mathcal{L}_n$, то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе. При этом коэффициенты $\alpha_k$ характеристического многочлена, представляемого в виде (13), также не связаны с использованным базисом, т.е. являются *инвариантами* относительно выбора базиса.

Уравнение $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ называется *характеристическим уравнением оператора* $\varphi$.

Пусть $\mathcal{L}'$ – подпространство $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}_n$ и $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Линейное подпространство $\mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}_n$ называется *инвариантным подпространством относительно оператора* $\varphi$, если для $\forall x \in \mathcal{L}'$ его образ $\varphi x \in L^{'}$.

**Примеры инвариантных подпространств**.

1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и $\mathcal{L}_n$ инвариантны относительно любого оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

2. Для любого линейного оператора $\varphi$ инвариантными подпространствами будут $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$, так как если $\varphi x = \theta$, то $\varphi(\varphi x) = \varphi\theta = \theta$ и если $y = \varphi x$, то $\varphi y = \varphi(\varphi x) = \varphi x_1$, где $x_1 = \varphi x$.

**Собственные значения и собственные векторы линейного оператора**

Число $\lambda$ называется *собственным значением линейного оператора* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$, если $\exists x \neq \theta$:
$$\varphi x = \lambda x. \tag{14}$$
При этом элемент $x$ называется *собственным вектором оператора* $\varphi$.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется *спектром линейного оператора.*

1. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением.

   Доказательство. Если $x$ одновременно удовлетворяет двум равенствам $\varphi x = \lambda x$ и $\varphi x = \mu x$, то
   $$\lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu)x = \theta \Rightarrow x = \theta,$$
   что противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой. $\square$

2. Каждому собственному значению соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

   Доказательство. Действительно, если $x$ – собственный вектор линейного оператора $\varphi$ с собственным значением $\lambda$, т.е. $\varphi x = \lambda x$, то для $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеем $\alpha x \neq \theta$ и
   $$\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x).$$
   Значит, и вектор $\alpha x$ является для линейного оператора собственным. $\square$

**Теорема 18.** *Число $\lambda$ является собственным значением линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ тогда и только тогда, когда оно является корнем его характеристического уравнения.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lambda$ – собственное значение оператора $\varphi$,
$x$ – собственный вектор, отвечающий этому $\lambda (x \neq \theta)$. Перепишем соотношение (14) в следующем виде
$$(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta,$$
где $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ – тождественный оператор.

Так как $x \neq \theta \Rightarrow \ker(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq \theta$, т.е. $\dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) \geq 1$, а так как
$$\dim(\operatorname{im}(\varphi - \lambda\varepsilon)) + \dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) = n,$$

$$\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) + \mathrm{def}(\varphi - \lambda\varepsilon) = n,$$

то $\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) < n$, т.е. $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ и $\Rightarrow \lambda$ – корень характеристического уравнения.

*Достаточность.* Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. $\square$

**Следствие.** Каждые линейный оператор имеет собственное значение. Действительно, характеристическое уравнение всегда имеет корень (в силу основной теоремы алгебры).

*Алгебраической кратностью* собственного значения оператора будем называть кратность соответствующего корня характеристического уравнения этого оператора.

**Собственное подпространство линейного оператора.**

Не следует путать два термина: собственное подпространство и собственное подпространство линейного оператора.

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является линейным подпространством, так как это множество не содержит $\theta$ вектора, который по определению не может быть собственным. Это формальное и легко устранимое препятствие является единственным.

Пусть $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ – множество всех собственных векторов линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n)$, соответствующих значению $\lambda$ с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

**Теорема 19.** *Множество* $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ *линейное подпространство в* $\mathcal{L}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, y \in \mathrm{V}(\varphi, \lambda)$.
$\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y)$;
$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi x = \alpha\lambda x = \lambda\alpha x$. $\square$

Множество $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ называется *собственным подпространством линейного оператора.*

Собственное подпространство является инвариантным относительно оператора $\varphi$.

*Геометрическая кратность собственного значения* $\lambda$ – это $\dim(\mathrm{V}(\varphi, \lambda))$.

**Теорема 20.** *Для того, чтобы матрица* $[\varphi]_e$ *линейного оператора* $\varphi$ *в данном базисе* $e$ *была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы* $e_k$ *были собственными векторами этого оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть базисные векторы $e_k$ являются собственными векторами оператора $\varphi$. Тогда

$$\varphi e_k = \lambda_k e_k, \tag{15}$$

и поэтому матрица $[\varphi]_e$ имеет вид (согласно равенствам (2))

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

т.е. является диагональной.

Пусть матрица $[\varphi]_e$ диагональна, т.е. имеет вид (16). Тогда соотношения (2) примут вид (15), а это означает, что $e_k$ – собственные векторы оператора $\varphi$. □

**Теорема 21.** *Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ линейного оператора $\varphi$ различны, тогда отвечающие им собственные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию. Так как $e_1$ – ненулевой вектор, то для одного вектора ($p = 1$) утверждение справедливо (один ненулевой вектор является линейно независимым).

Пусть утверждение теоремы доказано для $m$ векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$. Присоединим к этим векторам $e_{m+1}$ и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0. \tag{17}$$

Тогда, используя свойства линейного оператора, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \varphi e_k = 0. \tag{18}$$

Так как $e_k$ – собственные векторы, то $\varphi e_k = \lambda_k e_k$, и поэтому равенство (18) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{19}$$

Согласно (17) $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k e_k = 0$. Вычитая это равенство из равенства (19), найдем

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k e_k = 0. \tag{20}$$

По условию все $\lambda_k$ различны, т.е. $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$. Поэтому из (20) и предположения о линейной независимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Отсюда и из (17), а также из условия, что $e_{m+1}$ – собственный вектор ($e_{m+1} \neq \theta$), вытекает, что $\alpha_{m+1} = 0$. Таким образом из равенства (17) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1} = 0$. Это означает, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ линейно независимы. □

**Алгоритм нахождения собственных значений и векторов линейного оператора.**

Чтобы вычислить собственные значения линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, действующего в вещественном линейном пространстве, нужно выполнить следующие операции:

1. Выбрать в линейном пространстве базис $e$ и сопоставить линейному оператору $\varphi$ матрицу $[\varphi]_e$ в выбранном базисе $e$.

2. Составить характеристическое уравнение $\det([\varphi]_e - \lambda E)$ и найти всего корни.

3. Выделить только вещественные корни $\lambda_k$, так как пространство вещественное. Если действительных корней нет, то нет и собственных векторов.

4. Для каждого собственного значения $\lambda_k$ найти ФСР для одноророндой системы уравнений $(A - \lambda_k E)x = \theta$. Столбцы ФСР представляют собой координаты векторов некоторого базиса в собственном подпространстве $\mathrm{V}(\varphi, \lambda_k)$ линейного оператора $\varphi$. Каждому собственному вектору соответствует собственное значение $\lambda_k \in \mathrm{V}(\varphi, \lambda_k)$ и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с с собственным значением $\lambda_k$.

**П р и м е р 3.** *Найти собственные векторы линейного преобразования* $\varphi : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$, *заданного матрицей* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

*Если*

а) $\mathcal{L}_2$ - *вещественное линейное пространство;*

б) $\mathcal{L}_2$ - *комплексное линейное пространство.*

*Решение.*

$$\det(A - \lambda E) = 0; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(1-\lambda)(1+\lambda) = 0;$$

$$\lambda^2 = -1;$$

$$\lambda = \pm i.$$

а) так как $\lambda$ - комплексное, то собственных значений нет.

б) $\lambda = i$ :

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix};$$

$$x_1 = (-1-i)x_2, \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X^* = \alpha \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\lambda = -i:$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix};$$

$$x_1 = (-1+i)x_2,\ x_2 = 1 \Rightarrow\ X^* = \alpha \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Операторы простой структуры**

Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *оператором простой структуры*, если в $\mathcal{L}_n$ существует базис из собственных векторов этого линейного оператора.

В базисе из собственных векторов матрица оператора простой структуры имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора.

Если в исходном базисе $[\varphi]_e = A, \ \ [\varphi]_{e'} = \Lambda,$ и $P_{e\to e'}$ – матрица перехода, то

$$\Lambda = P^{-1}_{e\to e'} A P_{e\to e'}, \tag{21}$$

$$A = P_{e\to e'} \Lambda P^{-1}_{e\to e'}. \tag{22}$$

На матричном языке соотношение (21) означает, что матрица $A$ приводится матрицей $P_{e\to e'}$ к диагональному виду и оператор простой структуры называется также *диагонализируемым оператором.*

Соотношение (22) называется *каноническим разложением матрицы* $A$, а $P_{e\to e'}$ – трансформирующей матрицей.

**Теорема 22.** *Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда алгебраическая и геометрическая кратности его собственных значений совпадают.*

*Замечание*. Эта теорема в вещественном пространсте верна только для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Приведение матрицы к диагональному виду и каноническое разложение матриц используется в теории и вычислительной практике. Например, если известно каноническое разложение (22), то, если $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$A^m = P_{e\to e'} \Lambda^m P^{-1}_{e\to e'}.$$

**Алгоритм нахождения трансформирующей матрицы.**

1. Находим все собственные значения матрицы $A$.

2. При каждом собственном значении $\lambda_k$ строим ФСР однородной системы уравнения $(A - \lambda_k E)x = \theta$.

3. Из решений всех построенных ФСР, как из столбцов, составляем матрицу $P_{e\to e'}$, причем в матрицу $P_{e\to e'}$ столбцами записываются решения по каждому $\lambda_k$ в порядке нумерации собственных значений.

Матрица $P_{e\to e'}$ должна быть квадратной. Это будет выполняться только тогда, когда каждый корень характеристического уравнения $\lambda_k$ матрицы $A$ является ее собственным значением и для каждого $\lambda_k$ его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Лишь в этом случае матрица $A$ приводится к диагональному виду.

**П р и м е р 4.** *Привести, если возможно, следующую матрицу к диагональному виду и найти ее трансформирующую матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2;$ $\qquad\overbrace{s=2;}^{\textit{алгебраическая кратность}}$

$\lambda_3 = 1;$ $\qquad s = 1.$

*Найдем геометрическую кратность:*

*При* $\lambda_{1,2} = 2:$

$$\mathrm{rg}(A-\lambda_{1,2}E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 \quad\Rightarrow\quad \overbrace{k = n - \mathrm{rg}(A-\lambda_{1,2}E) = 2}^{\textit{геометрическая кратность}}.$$

*При* $\lambda_3 = 1:$

$$\mathrm{rg}(A-\lambda_3 E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad\Rightarrow\quad k = n - \mathrm{rg}(A-\lambda_3 E) = 1.$$

*Найдем собственные векторы.*

*При* $\lambda_{1,2} = 2:$

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 3x_2 - 3x_1.$$

$$X^* = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \textit{где} \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R} \quad \text{и} \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0.$$

*При* $\lambda_3 = 1:$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow X^* = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

*В итоге:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Жорданова нормальная форма

Итак, самый простой формой матрицы обладают только операторы простой структуры, т.е. операторы, имеющие полный набор линейно независимых собственных векторов. Как мы уже отмечали в вещественном пространстве существуют операторы, которые не имеют ни одного собственного вектора. И в комплексном пространстве не каждый линейный оператор обладает необходимым для базиса числом линейно независимых векторов.

Приведение матрицы линейного оператора к простому виду связано со структурой его собственных подпространств.

**Теорема 23**. *Пусть* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ *– инвариантные пространства линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$*, причем* $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s = \mathcal{L}$*, тогда в некотором базисе* $f$ *матрица оператора* $\varphi$ *имеет блочно-диагональный вид:*

$$[\varphi]_f = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

*где квадратный блок* $A_i$ *имеет порядок* $\dim \mathcal{L}_i,\ i = 1, 2, \ldots, s$*, а остальные блоки являются нулевыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в линейных подпространствах $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ базисы
$e^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)})$,
$e^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)})$,
$\ldots$
$e^{(s)} = (e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \ldots, e_{n_s}^{(s)})$.

В совокупности эти базисы дают базис $f$ всего пространства $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}_1$ – инвариантное подпространство линейного оператора $\varphi$, элемент $\varphi e_i^{(1)},\ i = 1, 2, \ldots, n_1$, попадет в $\mathcal{L}_1$ и поэтому является линейной комбинацией системы элементов $e^{(1)}$. Другими словами, координаты элементов $\varphi e_i^{(1)}$ в базисе $f$, соответствующие $e_i^{(2)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, равны нулю. Аналогично координаты элементов $\varphi e_i^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, n_2$ в базисе $f$, соответствующие $e_i^{(1)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, также равны нулю.

Остановимся на случае, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет лишь простые корни, среди которых, вообще говоря, есть и комплексные. Так как характеристическое уравнение линейного оператора имеет действительные коэффициенты, каждому комплексному корню $\alpha + i\beta$ этого уравнения соответствует комплексно сопряженный корень $\alpha - i\beta$ той же кратности.

**Теорема 24**. *Каждой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линейного оператора соответствует двумерное инвариантное подпространство этого оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый базис $e$ и рассмотрим матрицу $A$ линейного оператора $\varphi$ в этом базисе.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора $\varphi$.

Тогда $\det(A - \lambda E) = 0$ и система линейных уравнений $(A - \lambda E)x = \theta$ с комплексными коэффициентами имеет ненулевое решение $x$, которое можно записать в виде $x = u + iv$, разделив действительные и мнимые части у элементов столбца $x$.

Столбец $v$ не является нулевым, так как в противном случае $x = u$, $Au = \lambda x$. Мы видим, что действительные элементы столбца $Au$ получаются из действительных элементов столбца $u$ умножением на комплексное число $\lambda$, а это возможно лишь в случае, когда $u = \theta$. Но это заключение противоречит выбору столбца $x$.

Столбцы $u$ и $v$ линейно независимы. Действительно, если они линейно зависимы, то $\mu u + \nu v = 0$, где одно из чисел $\mu$ и $\nu \neq 0$. Мы можем утверждать, что $\mu \neq 0$, так как в противном случае $\nu v = \theta$. Но $v \neq \theta$, значит $\nu = 0$.

Пусть $\mu \neq 0$ и поэтому $u = kv$, где $k = -\frac{\nu}{\mu} \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x = u + iv = (k + i)v$.

Так как $Ax = \lambda x$, то

$$A(k + i)v = \lambda(k + i)v,$$

$$Av = \lambda v.$$

Как мы уже знаем, для комплексных $\lambda$ такое равенство невозможно.

В равенстве $Ax = \lambda x$ сделаем замены $\lambda = \alpha + i\beta,\ x = u + iv$:

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Разделив действительные и мнимые части, получим два матричных уравнения

$$Au = \alpha u - \beta v,\ Av = \beta u + \alpha v.$$

Рассмотрим векторы $x$ и $y$, которые в базисе $e$ имеют координатные столбцы $x_e = u,\ y_e = v$, тогда

$$\varphi x = \alpha x - \beta y, \quad \varphi y = \beta x + \alpha y.$$

Векторы $x$ и $y$ линейно независимы, так как независимы их столбцы $u$ и $v$. Полученные соотношения означают, что двумерное линейное подпространство $\mathcal{L}' = L\{x, y\}$ является инвариантным подпространством линейного оператора $\varphi$. $\square$

Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

**Теорема 25**. *Если характеристическое уравнение линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ имеет $p$ различных пар комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, где $j = 1, 2, \cdots, p$, и $q$ различных действительных корней $\mu_j$ где $j = 1, 2, \cdots, q$, причем $2p + q = n$, где $\dim(\mathcal{L}_n) = n$, тогда матрица линейного оператора в некотором базисе будет иметь вид:*

$$A = \begin{pmatrix} C(\alpha_1, \beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha_2, \beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C(\alpha_p, \beta_p) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \mu_q \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ характеристического уравнения соответствует двумерное инвариантное подпространство $P_j$ оператора $\varphi$ с базисом $u_j, v_j$ (см. доказательство т. 24). Каждому собственному значению $\mu_j$ соответствует одномерное собственное подпространство $Q_j$ линейного оператора $\varphi$. Можно показать, что все эти подпространства образуют прямую сумму, так как пересечение любой пары таких подпространств содержит лишь $\theta$. Учитывая, что сумма размерностей этих подпространств $2p + q = n = \dim(\mathcal{L}_n)$, заключаем, что $P_1 \oplus P_2 + \ldots + P_p \oplus Q_1 \oplus Q_2 \ldots \oplus Q_q = \mathcal{L}$. Согласно теореме 23 в некотором базисе матрица $A$ оператора $\varphi$ имеет блочно-диагональный вид, причем каждый диагональный блок представляет собой ограничения оператора $\varphi$ на соответствующее инвариантное подпространство. В случае двумерного подпространства $P_j$ в базисе $u_j, v_j$ эта матрица равна $C(\alpha_j, \beta_j)$, а в случае одномерного инвариантного подпространства $Q_j$ такой блок есть простое число, представляющее собой собственное значение $\mu_j$. $\square$

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные корни, действительные или комплексные, то инвариантные подпространства такого оператора имеют более сложную структуру.

Рассмотрим два типа специальных матриц. Для произвольного числа $\mu \in \mathbb{R}$ введем обозначение матрицы порядка $s$:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы все диагональные элементы равны $\mu$, над главной диагональю расположены единицы, а все остальные равны нулю. В случае $s = 1$ рассматриваемая матрица сводится к единственному числу $\mu$.

Для любого комплексного числа $\alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$:

$$C_r(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C(\alpha,\beta) & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где $C_1(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Все остальные блоки также являются матрицами второго порядка. $E$ обозначим единичную матрицу, а $O$ – нулевую.

Блочно-диагональную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_{r_2}(\alpha_2,\beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C_{r_l}(\alpha_l,\beta_l) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{s_1}(\mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s_2}(\mu_2) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k$ называют *жордановой*. Ее диагональные блоки – *жордановыми клетками*.

## . Линейные операторы в евклидовых (унитарных) пространствах Сопряженный оператор

Линейный оператор $\varphi^* : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *сопряженным* данному оператору $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_m)$, если для $\forall x \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, $\forall y \in \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_m)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y). \tag{23}$$

Из определения сопряженного оператора вытекают следующие его **свойства**:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
4. $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;
5. $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ (если $\varphi$ является преобразованием).

Все свойства доказываются однотипно.

Докажем, например, свойство 3: согласно определению произведения операторов и определения сопряженного оператора получаем

$$((\varphi\psi)x, y) = ((\varphi(\psi x), y) = (\psi x, \varphi^* y) = (x, (\psi^*\varphi^*)y).$$

Выясним, как связаны матрицы операторов $\varphi$ и $\varphi^*$ в базисе $e$ в вещественном евклидовом пространстве.

Обозначим соответственно матрицы этих операторов $[\varphi]_e = A$ и $[\varphi^*]_e = A^*$ и пусть для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ $\quad x_e,\ y_e$ – координатные столбцы векторов $x, y$ в базисе $e$, тогда равенство (23) можно переписать с учетом, что $(x, y) = x_e^T \Gamma y_e$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_1, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ в виде

$$(Ax_e)^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e.$$

Далее $\quad x_e^T A^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e; \quad x_e^T (A^T\Gamma - \Gamma A^*) y_e = 0.$

Так как $x_e,\ y_e$ – произвольные столбцы, отсюда можно заключить, что

$$A^T\Gamma - \Gamma A^* = O,$$

где $O$ – нулевая матрица.

Итак, матрицы операторов $\varphi$ и $\varphi^*$ в базисе $e$ связаны соотношением

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma. \tag{24}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $\Gamma = E$ и

$$A^* = A^T. \tag{25}$$

В унитарном пространстве, где $(x, y) = x_e^T \Gamma \bar{y}_e$, формулы (25) и (26) соответственно примут вид

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma};$$

$$A^* = \bar{A^T}.$$

**Теорема 26.** *Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве имеет сопряженный оператор, и притом только один.*

**Пример 5.** *Линейный оператор $\varphi$ в базисе $e'_1 = (1\ 1\ 1)^T$, $e'_2 = (1\ 0\ 1\ 1)^T$, $e'_3 = (0\ 0\ 1)^T$ имеет матрицу $[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $[\varphi^*]_{e'}$, если векторы $e'_1, e'_2, e'_3$ заданы координатами в ортонормированном базисе $e_1, e_2, e_3$.*

<u>*Решение.*</u> *Найдем матрицу*

$$\Gamma_{e'} = \begin{pmatrix} (e'_1, e'_1) & (e'_1, e'_2) & (e'_1, e'_3) \\ (e'_2, e'_1) & (e'_2, e'_2) & (e'_2, e'_3) \\ (e'_3, e'_1) & (e'_3, e'_2) & (e'_3, e'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[\varphi]'_e = \Gamma_{e'}^{-1} [\varphi]_{e'}^T \Gamma_{e'}$.

$$\Gamma_{e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*В результате перемножения матриц получим*

$$[\varphi]'_e = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *В трёхмерном евклидовом $\mathcal{E}_3$ пространстве выбран ортонормированный базис $e_1, e_2, e_3$. Найти преобразование $\varphi^*$, сопряжённое преобразованию $\varphi$ пространства $\mathcal{E}_3$, если преобразование $\varphi$, задано формулой*

$$\varphi(x) = [a, x],$$

*где $a$ - фиксированный вектор из $\mathcal{E}_3$, $[a, x]$ - векторное произведение векторов $a$ и $x$.*

<u>*Решение.*</u> *По определению сопряженного оператора*

$(\varphi x, y) = ([a, x], y) = axy = xya = (x, -[a, y]) = (x, \varphi^* y) \Rightarrow \varphi^* = -\varphi$.

Областью значений $\varphi^*$ является подпространство, ортогональное к ядру оператора $\varphi$. Это следует из того, что $\forall x \in \ker\varphi,\ \forall y \in \mathrm{im}\varphi$

$$(x, \varphi^* y) = (\varphi x, y) = (0, y) = 0,$$

т.е. $\varphi^* y \perp x$.

**Основное свойство сопряженного оператора**.

*Если некоторое подпространство $\mathcal{H}$ инвариантно относительно оператора $\varphi$, то ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ этого подпространства инвариантно относительно сопряженного оператора $\varphi^*$.*

**Свойства собственных значений и собственных векторов сопряженного оператора**.

1. Характеристические многочлены, а, следовательно, и собственные значения сопряженных операторов в вещественном евклидовом пространстве одинаковы. В комплексном пространстве собственные значения сопряженных операторов являются комплексно сопряженными числами.

2. Каждый собственный вектор сопряженного оператора $\varphi^*$ ортогонален ко всем собственным векторам оператора $\varphi$, принадлежащим другим собственным значениям.

**Нормальный оператор**

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным оператором $\varphi^*$, т.е. если

$$\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*. \tag{26}$$

Квадратная матрица $A$ называется *нормальной матрицей*, если $A^* A = AA^*$.

Из определения и связи матриц операторов $\varphi$ и $\varphi^*$, рассмотренных в пункте 2.1, следует

**Теорема 27.** *Оператор нормален тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица нормальна.*

**Теорема 28.** *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению $\lambda$, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\varphi - \lambda\varepsilon$ также нормален.

Пусть теперь $x$ – собственный вектор оператора $\varphi$, отвечающий собственному значению $\lambda$, тогда $(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta$ и $((\varphi - \lambda\varepsilon)x, (\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$.

Согласно определению сопряженного оператора можем записать, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)^*(\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$$

или, с учетом нормальности оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0,$$

т.е.

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x, ((\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0$$

и $(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x = \theta$.

Отсюда в силу свойств сопряженного оператора следует, что

$$(\varphi^* - \bar{\lambda}\varepsilon) = \theta,$$

т.е. $\varphi^*x = \bar{\lambda}x$. $\square$

**Следствие 1**. Если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \ker\varphi^*$, так как нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими нулевому собственному значению.

**Следствие 2**. Если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \mathrm{im}^\perp\varphi$. Это следует из $\ker\varphi = \mathrm{im}^\perp\varphi^*$ и предыдущего следствия.

**Теорема 29.** *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

**Самосопряженный оператор**

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *самосопряженным*, если для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi y),$$

т.е. $\varphi = \varphi^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называют *эрмитовым*, а в евклидовом пространстве – *симметрическим*.

**Примеры самосопряженного оператора.**

1. Тождественный: $(\varepsilon x, y) = (x, y) = (x, \varepsilon y)$.
2. Нулевой: $(\theta x, y) = (0, y) = 0 = (x, 0) = (x, \theta y)$.

Квадратная матрица называется *самосопряженной*, если $A = A^*$.
Из определения вытекает, что самосопряженный оператор нормален.

**Теорема 35.** *Оператор самосопряженный тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет самосопряженную матрицу.*

**Теорема 36.** *Если подпространство $\mathcal{H}$ инвариантно относительно самосопряженного оператора $\varphi$, то ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ этого подпространства также инвариантно относительно оператора $\varphi$.*

**Теорема 37 (спектральная характеристика самосопряженного оператора)**. *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В унитарном пространстве это утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из равенств $\varphi x = \lambda x$ и, с учетом теоремы 28, $\varphi x = \bar{\lambda} x$. Докажем утверждение для евклидова пространства . Пусть $e$ - ортонормированный базис , тогда $[\varphi]_e$ - самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим произвольное унитарное пространство $\mathcal{U}$ той же размерности, что и пространство $\mathcal{E}$, и в нем произвольный ортонормированный базис $f$. Тогда матрице $[\varphi]_e$ отвечает самосопряженный оператор $\psi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$, для которого матрица $[\varphi]_e$ является матрицей в базисе $f : [\varphi]_e = [\psi]_f$. Следовательно, характеристические многочлены операторов $\varphi$ и $\psi$ совпадают и по доказанному выше (применительно к оператору $\psi$) все корни характеристического многочлена оператора $\varphi$ вещественны.

Достаточность. Пусть $\varphi$ - нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны. Тогда как в евклидовом, так и в унитарном пространстве существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$

из собственных векторов оператора $\varphi$. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ – любой вектор пространства, то $\varphi x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ и $\varphi^* x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{\lambda}_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$, так как $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi x = \varphi^* x, \ \forall x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, откуда следует, что $\varphi = \varphi^*$. $\square$

**Теорема 38.** *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Основным свойством самосопряженного оператора является то, что в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что самосопряженный оператор является оператором простой структуры, а матрица $P_{e \to e'}$ приводит матрицу $A$ самосопряженного оператора к диагональному виду, т.е. удовлетворяет соотношению (21)

$$\Lambda = P_{e \to e'}^{-1} A P_{e \to e'}.$$

Правило построения такой матрицы остается таким же, как и в случае любых операторов простой структуры с той лишь разницей, что базис из собственных векторов матрицы $A$ здесь еще и ортонормируют.

### 2.3 Ортогональный (унитарный) оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *ортогональным (унитарным)*, если он сохраняет скалярное произведение в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y).$$

Полагая в этом равенстве $x = y$, получаем $|\varphi x|^2 = |x|^2$. Это означает, что ортогональный (унитарный) оператор сохраняет длины векторов.

**Теорема 30.** *Ортогональный (унитарный) оператор $\varphi$ переводит любой ортонормированный базис $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ в ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$. В силу ортогональности оператора $\varphi$ имеем

$$(\varphi e_i, \varphi e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Видим, что различные векторы $\varphi e_i$ и $\varphi e_j$ ортогональны, а длина каждого из них равна единице. Поэтому система векторов $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$ состоит из ненулевых векторов и ортогональна. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Количество векторов в линейно независимой системе $\varphi e$ равно размерности пространства $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. $\dim \mathcal{E}_n = n \Rightarrow$ эта система является базисом, притом ортонормированным. $\square$

**Теорема 31.** *Если линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ переводит какой-либо ортонормированный базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в ортонормированный базис $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$*, то этот оператор ортогональный (унитарный).

**Теорема 32.** *Оператор ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет ортогональную (унитарную) матрицу.*

**Теорема 33.** *Собственные значения ортогонального (унитарного) оператора по абсолютной величине равны единице.*

Доказательство. Докажем для унитарного оператора. По определению можем записать $(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$. Пусть $x$ – собственный вектор оператора $\varphi$ и $\lambda$ – отвечающее ему собственное значение, $\varphi x = \lambda x$. Тогда $(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x)$;

$|\lambda|^2 (x, x) = (x, x)$;

$|\lambda|^2 = 1$. $\square$

**Теорема 34.** *Собственные векторы ортогонального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

**Квадратичные формы.**

Рассмотрим симметричную билинейную форму $f(x, y)$ в вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$.

*Квадратичной формой (функцией , функционалом)* будем называть вещественнозначную функцию $f(x, x)$, полученную из симметричной билинейной формы путем замены $y$ на $x$, где $x \in \mathcal{L}$.

Соответствующую билинейную форму называют *полярной к квадратичной форме* $f(x, x)$.

Связь между квадратичной и полярной формой:
$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y, x + y) - f(y, y) - f(x, x))$.

В базисе $e$ квадратичная форма $f(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в следующем общем виде:
$f(x, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$,
$a_{ij} = a_{ji}$,
или в компактной форме $f(x, x) = x_e^T A_e x_e$.

*Рангом квадратичной формы* будем называть ранг ее матрицы в произвольном базисе.

Квадратичная форма *вырожденная*, если ранг формы меньше размерности пространства, в котором она определена.

**П р и м е р 2**. *Составить матрицу билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в двумерном пространстве, если билинейная форма:* $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_1y_2$.

Решение. Матрица билинейной формы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая квадратичная форма:
$f(x, x) = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - 5x_2^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$.

**Виды квадратичных форм**.

1. Квадратичная форма $f(x, x)$ называется *положительно ( отрицательно ) определенной*, если $\forall x \neq \theta\ f(x, x) > 0$ ( $f(x, x) < 0$).

2. Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если $\exists x, y \in \mathcal{L}$, такие, что одновременно выполняются $f(x, x) > 0$ и $f(y, y) < 0$.

3. Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной)*, если $\forall x \quad f(x, x) \geq 0$ $(f(x, x) \leq 0)$ и $\exists x \neq \theta$, при котором $f(x, x) = 0$.

**Теорема 4**. *Пусть* $f(x, y)-$ *симметричная билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме* $f(x, x)$, *тогда форма* $f(x, y)$ *определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если число, называемое скалярным произведением векторов $x$ и $y$, обозначить символом $f(x, y)$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

1) $f(x, y) = f(y, x)$;
2) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;
3) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;
4) $f(x, x) \geq 0,\ f(x, x) > 0, x \neq \theta$.

Так как билинейная форма $f(x, y)$ полярная квадратичной форме $f(x, x)$ симметрична, то аксиома 1) выполняется. аксиомы 2) и 3) в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы. Аксиома 4) выполняется, так как квадратичная форма $f(x, x)$ положительно определена. Значит билинейная форма определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве. □

**Приведение квадратичной формы к каноническому виду.**

Рассмотрим различные меоды приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т. е. рассмотрим методы выбора такого базиса $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, по отношению к которому квадратичная форма представляется в следующем *каноническом виде*:

$$f(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2, \tag{4}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты $x$ в базисе $f$.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в выражении (4) называются *каноническими коэффициентами*.

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

**Метод Лагранжа**.

**Теорема 5**. *Любая квадратичная форма $f(x, x)$, заданная в $n$-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство теоремы *методом Лагранжа*. Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $f(x, x) \neq 0$ (если форма $f(x, x) \equiv 0$, то ее матрица в любом базисе состоит из нулевых элементов, и поэтому такая форма по определению имеет канонический вид в любом базисе) и в данном базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ имеет вид

$$f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $f(x, x)$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора $x$ будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. (Напомним, что $f(x,x) \neq 0$ и поэтому хотя бы один коэффициент $a_{ij}$ отличен от нуля). Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат (определитель матрицы этого преобразования равен 2, и поэтому это преобразование невырожденное):

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_1 - x_2, \\ &x'_2 = x_1 + x_2, \\ &x'_i = x_i,\ i = 3,\ 4,\ \ldots,\ n. \end{aligned}$$

После этого преобразования коэффициент при $x_i^2$ будет равен $2a_{12}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (5) $a_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (5) ту группу слагаемых, которые содержат $x_1$. Получим

$$f(x,x) = a_{11}x_1^2\ +\ 2a_{12}x_1x_2\ +\ \ldots\ +\ 2a_{1n}x_1x_n\ +\ \sum_{i,j\ =\ 2}^{n} a_{ij}x_ix_j. \qquad (6)$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + x_2\frac{a_{12}}{a_{11}} + \ldots + x_n\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2 \ -$$

$$-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - \ldots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n.$$

Очевидно, выражение (6) можно теперь переписать так:

$$f(x,x)\ =\ a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\ +\ \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_ix_j, \qquad (7)$$

где $a_{ij}^{*}$–коэффициенты при $x_ix_j$, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x'_2 &= x_2, \\ &\ldots \\ x'_n &= x_n. \end{aligned}$$

С помощью этого преобразования и представления (7) для $f(x,x)$ получим

$$f(x,x) \;=\; a_{11}(x_1')^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i' x_j'. \tag{8}$$

Итак, если форма $f(x,x) \;\neq\; 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (8).

Обратимся теперь к квадратичнй форме $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i' x_j'$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $f(x,x)$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i x_j \;\neq\; 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразования координат $x_2', \;\ldots, x_n'$, аналогичные описанным выше, и не меняя при этом координату $x_1'$. Очевидно, такого типа преобразования координат $x_1', \; x_2', \; \ldots, \; x_n'$ будут невырожденными.

Ясно что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $f(x,x)$ к каноническому виду (4).

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. □

**Замечание 1.** Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим.* Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

**Замечание 2.** Если форма $f(x,x)$ приведена к каноническому виду (4), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты $\lambda_i$ отличны от нуля. Оставляя в (4) лишь отличные от нуля $\lambda_i$ и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $f(x,x)$:

$$f(x,x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2. \tag{9}$$

Ясно, что $r \leq n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (9) и условия $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$ вытекает, что ранг формы равен $r$. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

**Метод Якоби.**

При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $f(x,x)$ можно указать явные формулы перехода от данного $e = (e_1, \; e_2, ..., e_n)$ базиса к каноническому $e' = (e_1', \; e_2', ..., e_n')$ и указать явные формулы канонических коэффициентов $\lambda_i$.

Введем понятие треугольного преобразования базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $e = (e_1,\ e_2, ..., e_n)$ называется *треугольным*, если оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&e'_1 = e_1,\\
&e'_2 = \alpha_{21}e_1 + e_2,\\
&e'_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + e_3,\\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&e'_n = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + ... + e_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $f(x,x)-$ квадратичная форма. И пусть $A-$ матрица квадратичной формы в базисе $e$.

Пусть $\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ ...\ ,\ \Delta_n = |A|$ – угловые миноры матрицы $A$.

**Теорема 6**. *Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы $f(x,x)$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $e_1,\ e_2, ..., e_n$ , которое приводит эту квадратичную форму к каноническому виду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коэффициенты $b_{ij}$ квадратичной формы $f(x,x)$ в базисе $e'$ вычисляются по формулам

$$b_{ij} = f(e'_i, e'_j). \tag{11}$$

Используя равенства (10) и линейное свойство квадратичной формы $f(x,x)$ по каждому аргументу, легко заметить, что соотношения (11) будут выполнены, если будут выполнены соотношения:

$$f(e_1, e'_j) = 0, \quad f(e_2, e'_j) = 0 \quad ... \quad f(e_{j-1}, e'_j) = 0, \quad j = 2, 3, ..., n. \tag{12}$$

Запишем формулы (12) в развернутом виде. Для этого подставим в левые части этих формул выражение

$$e'_j = \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j \tag{13}$$

из соотношений (10). Используя далее свойство линейности $f(x,x)$ по каждому аргументу и обозначение $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, получим в результате следующую систему уравнений для неизвестных коэффициентов $\alpha_{jk}$:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{1j-1} + a_{1j} &= 0,\\
\alpha_{j1}a_{21} + \alpha_{j2}a_{22} + ... + \alpha_{jj-1}a_{2j-1} + a_{2j} &= 0,\\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots &\\
\alpha_{j1}a_{j-11} + \alpha_{j2}a_{j-12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{j-1j-1} + a_{j-1j} &= 0,
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Определитель этой системы равен $\Delta_{j-1}$. По условию $\Delta_{j-1} \neq 0$. Следовательно, система (14) имеет единственное решение. Таким образом, можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого квадратичная форма $f(x,x)$ приводится к каноническому виду. $\square$

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты $\alpha_{ji}$ искомого треугольного преобразования и формулы для канонических коэффициентов $\lambda_j$. Используя формулу Крамера находим выражение для коэффициентов:

$$\alpha_{ji} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}, \tag{15}$$

где $\Delta_{j-1,i}$ минор матрицы $A$, расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, ...j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., j$. Так как $j$-й столбец должен стоять на $i$-ом месте, а мы приписываем его справа, то необходимо домножить на знак перестановки $j$-го столбца на $i$-е место.

Вычислим канонические коэффициенты $\lambda_j$.

$\lambda_{ij} = b_{jj} = f(e'_j, e'_j) = f(e_j, e'_j) = f(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j) =$
$= \alpha_{ij}a_{j1} + \alpha_{j2}a_{j2} + ... + \alpha_{jj-1}a_{jj-1} + a_{jj}$.

Подставляя выражение (15) для $\alpha_{ji}$, $\quad i = 1, 2, ..., j-1$ в правую часть последнего соотношения, найдем

$\lambda_j =$

$$= \frac{(-1)^{j+1}\Delta_{j-1,1}a_{j1} + (-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2}a_{j2} + ... + (-1)^{i+j-1}\Delta_{j-1,j-1}a_{jj-1} + a_{jj}\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1}}.$$

Числитель представляет собой $\Delta_j$. Поэтому

$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, ..., n,$
$\lambda_1 = f(e'_1, e'_1) = f(e_1, e_1) = a_{11}$.

**П р и м е р 3**. *С помощью метода Якоби вычислить коэффициенты треугольного преобразования и канонические коэффициенты, если квадратичная форма имеет вид:*

$f(x, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

*Решение*.

Так как форма квадратичная, то матрица ее будет симметричной:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = 2; \quad \Delta_2 = 2; \quad \Delta_3 = 1.$
$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{1}{2}.$
$\alpha_{21} = -\frac{2}{2} = -1; \quad \alpha_{31} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_{32} = 0.$

**Критерий Сильвестра**.

Пусть форма $f(x, x)$ в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ определяется матрицей $A_e = (a_{ij})$:

$$f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

и пусть

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n = |A|.$$

**Теорема 11. (Критерий Сильвестра)**.
*Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определённой необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

*Для того, чтобы квадратичноая форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причём* $\Delta_1 < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Докажем сначала, что из условия знакоопределенности квадратичной формы $f(x, x)$ следует $\Delta_i \neq 0$.

Убедимся, что предположение $\Delta_k = 0$ ведет к противоречию – при этом предположении $\exists x \neq \theta$, при котором квадратичная форма обращается в ноль, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, пусть $\Delta_k = 0$. Рассмотрим следующую квадратную однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = & 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = & 0, \end{cases}$$

По предположению $\Delta_k = 0$, следовательно, однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение. Далее умножим последовательно первое уравнение на $x_1$, второе – на $x_2$, последнее уравнение – на $x_k$ и сложим все $k$ уравнений. В результате получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы для $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ...0) \neq 0$. Это значение равно нулю, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_i \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому мы можем применить метод Якоби приведения формы к сумме квадратов и воспользоваться

формулами для вычисления канонических коэффициентов:
$\lambda_1 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ..., $\lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
Т. к. квадратичная форма положительно определённая, то $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$, следовательно, все $\Delta_i > 0$.

Если же $f(x,x)$ – отрицательно определенная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны и знаки угловых миноров будут чередоваться, причем $\Delta_1 < 0$.

**Достаточность.** Пусть все $\Delta_i > 0$, где $i = 1, 2, ..., n$, т.е. угловые миноры отличны от нуля, поэтому мы снова можем использовать метод Якоби.

$\Delta_i > 0$, следовательно, все $\lambda_i > 0$, отсюда по определению следует, что квадратичная форма будет положительно определённой.

Если же знаки $\Delta_i$ чередуются и $\Delta_1 < 0$, то все канонические коэффициенты $\lambda_i < 0$, т.е форма будет отрицательно определенной.□

**П р и м е р 5.** *Дана квадратичная форма:*
$f(x,x) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3, \ (n = 3).$
*Определить, является ли эта форма знакоопределённой.*

*Решение.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \ \Delta_3 = |A| = 1 > 0.$$

Все $\Delta_i > 0$, следовательно, квадратичная форма положительно определённая.

**Закон инерции квадратичных форм.**

Мы уже отмечали, что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразованияа, с помощью которого форма приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции квадратичных форм.*

**Теорема 7. (Закон инерции квадратичных форм) .** Число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e$ и $f$ – канонические базисы квадратичной формы $f(x,x)$ ранга $r$ и для $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i=\sum\limits_{i=1}^{n} y_if_i$

$$f(x,x)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_px_p^2-a_{p+1}x_{p+1}^2-...-a_rx_r^2,$$

$$f(x,x)=b_1y_1^2+b_2y_2^2+...+b_{p'}y_{p'}^2-b_{p'+1}y_{p'+1}^2-...-b_ry_r^2,$$

где $a_i>0,\ b_i>0, i=1,2,...,r$. Необходимо доказать, что $p=p'$.

1) Докажем, что $p\le p'$. Предположим,что это не выполняется, т.е. $p>p'$. Рассмотрим два подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_1=\mathcal{L}(e_1,e_2,...,e_p)$, $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}(f_{p'+1},f_{p'+2},...,f_n)$,

$\dim(\mathcal{L}1\bigcap\mathcal{L}_2)=\dim\mathcal{L}_1+\dim\mathcal{L}_2-\dim(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)=p+(n-p')-\dim(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)$.

Так как $\dim(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)\le n,\ p>p'$, то $\dim(\mathcal{L}_1\bigcap\mathcal{L}_2)>0$.

Следовательно, существует $x_0\ne\theta$ и $x_0\in\dim(\mathcal{L}_1\bigcap\mathcal{L}_2)$.

Пусть $x_0=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...\alpha_pe_p=\beta_{p'+1}f_{p'+1}+...+\beta_nf_n$.

Тогда

$$f(x_0,x_0)=a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2+...+a_p\alpha_p^2=-b_{p'+1}\beta_{p'+1}^2-...-b_r\beta_r^2. \qquad (16)$$

Так как $x_0\ne\theta$, то $a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2+...+a_p\alpha_p^2>0,\ -b_{p'+1}\beta_{p'+1}^2-...-b_r\beta_r^2<0$. Это противоречит (16), и значит, $p\le p'$.

2) $p\ge p'$ доказывается аналогично. $\Box$

Введем обозначения:

$i_+=p$ – положительный индекс инерции – число положительных коэффициентов в каноническом разложении квадратичной формы.

$i_-=q$ – отрицательный индекс инерции – число отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

$r$ – ранг квадратичной формы.

$s=p-q$ – сигнатура квадратичной формы.

Вид квадратичной формы

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \tag{17}$$

называется *нормальным.*

**Теорема 8. (Критерий знакоопределенности квадратичной формы).** *Для того чтобы квадратичная форма, заданная в $n$-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы в случае положительной определенности $p = n$, а в случае отрицательной определенности $q = n$.*

Доказательство. **Необходимость.**

Пусть форма $f(x,x)$ положительно определена. Тогда выражение (17) примет вид $f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2$.

Если при этом $p < n$, то из последнего выражения следует, что для $x \neq \theta$ с координатами

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_p = 0,\ x_{p+1} \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$$

форма $f(x,x)$ обращается в нуль, а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы, поэтому $p = n$.

**Достаточность.** Пусть $p = n$. Тогда соотношение (17) имеет вид $f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$.

Ясно, что $f(x,x) \geq 0$, причем, если $f(x,x) = 0$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $x = \theta$. Следовательно, $f(x,x)$ – положительно определенная форма.□

**Замечание.** Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

**Теорема 9. (Критерий знакопеременности квадратичной формы).** *Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы $p \neq 0$ и $q \neq 0$.*

Доказательство. **Необходимость.** Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ее представление (17) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные слагаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от нуля.

**Достаточность**. Пусть $p \neq 0$ и $q \neq 0$.

Тогда для вектора $x' = (0,\ 0 \ldots 0,\ x_{p+1}, \ldots, x_n)$ имеем $f(x',x') < 0$, а для вектора $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0,\ 0, \ldots, 0)$ имеем $f(x'',x'') > 0$. Следовательно, форма $f(x,x)$ является знакопеременной. □

**Теорема 10. (Критерий полуопределённости квадратичной формы).** *Для того, чтобы квадратичная форма $f(x,x)$ была полуопределённой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

*для положительной полуопределённости:* $p < n$, $q = 0$;

*для отрицательной полуопределённости:* $q < n$, $p = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай положительно полуопределённой квадратичной формы. Случай отрицательной полуопределенности рассматривается аналогично.

**Необходимость**. Пусть форма $f(x,x)$ положительно полуопределенная. Тогда, очевидно, $p < n$ и $q = 0$ ( если бы $p = n$, то форма была бы положительно определённой).

**Достаточность.** Если $p < n$, $q = 0$, то $f(x,x) \geq 0$ и для $x = (0,\ 0, \ldots, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ имеем $f(x,x)$=0, т.е. $f(x,x)$ – положительно полуопределенная форма. $\square$

**П р и м е р 4.**

*Дана квадратичная форма* $f(x,x) = {x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2$, $(n = 2)$. *Определить вид формы.*

<u>*Решение*</u>.

${x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2 = ({x_1}^2 + 4x_1x_3 + 4{x_3}^2) + ({x_2}^2 + 2x_2x_3 + {x_3}^2) -$
$- x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - {x_3}^2$.

Произведём замену:

$y_1 = x_1 + 2x_3$;

$y_2 = x_2 + x_3$;

$y_3 = x_3$.

Получим: ${y_1}^2 + {y_2}^2 - {y_3}^2$.

Следовательно, форма является знакопеременной $(p = 2,\ q = 1)$.

**Билинейные и квадратичные формы в комплексном линейном пространстве**

Пусть $\mathcal{V}_n$ – комплексное линейное пространство. Комплекснозначную функцию двух аргументов $f(x,y)$, где $x,y \in \mathcal{V}$, будем называть *полуторалинейной формой*, если $\forall\ x,y,z \in \mathcal{V}_n,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения:

1) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$;
2) $f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$;
3) $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$;
4) $f(x,\lambda y) = \overline{\lambda} f(x,y)$.

Полуторалинейную форму называют *эрмитовой*, если

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)}\ \forall x,y \in \mathcal{V}.$$

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис в комплексном линейном пространстве. Рассмотрим следующее выражение:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_i \tag{18}$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Матрица $A_e = (a_{ij}), i,j = 1,2,...,n$ называется *матрицей полуторалинейной формы*, а вид (18) называется *общим видом полуторалинейной формы.*

*Компактное представление полуторалинейной формы* имеет вид

$$f(x,y) = {[x]_e}^T A_e \overline{[y]}_e = \overline{[y]}_e A^T [x]_e. \tag{19}$$

*Ранг полуторалинейной формы* – это ранг её матрицы.

Полуторалинейная форма называется *вырожденной*,
если $\mathrm{rg} f(x,y) < \dim(\mathcal{V}_n)$.

**Теорема 12.** *Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда её матрица в любом базисе является эрмитовой.*

**Теорема 13.** *Матрицы полуторалинейной формы $f(x,y)$ в базисах $e$ и $f$ $A_e$ и $A_f$ связаны соотношением*

$$A_f = {P^T}_{e\to f} A_e \bar{P}_{e\to f}$$

Пусть $\mathcal{V}_n$ - комплексное линейное пространство, а $f(x,y)$ – эрмитовая полуторалинейная форма. Числовая вещественнозначная функция $f(x,x)$, которая получается из эрмитовой полуторалинейной формы заменой $y$ на $x$, $x \in \mathcal{V}_n$, называется *эрмитовой квадратичной формой.* Соответственно $f(x,y)$ называется полярной полуторалинейной формой к эрмитовой форме.

Эрмитова форма может быть представлена в виде

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j},$$

$a_{ij} = \overline{a}_{ij}$.

Запись в компактном виде:

$$f(x,x) = [x]_e^T \cdot A_e \cdot \overline{[x]}_e = \overline{[x]}_e \cdot {A_e}^T \cdot [x]_e.$$

**Канонический вид квадратичной формы в комплексном линейном пространстве.**

$$f(x,x) = \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + ... + \lambda_r |x_r|^2,$$

где $r$ - ранг квадратичной формы, $\dim(\mathcal{V}_n) = n$.

В отличие от вещественного случая мы выделяем полный квадрат модуля.

Остаются справедливыми и метод Якоби, закон инерции квадратичных форм и критерий Сильвестра.

**П р и м е р 6.** *Составить матрицу данной эрмитовой полулинейной формы в двумерном пространстве и записать соответствующую квадратичную форму. Определить по критерию Сильвестра вид формы.*

$f(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} - 5x_2\overline{y_2}$.

*Решение*.

$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$.

$f(x,x) = 2|x_1|^2 + (1+i)x_1\overline{x_2} + (1-i)x_2\overline{x_1} - 5|x_2|^2$,

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = -12 < 0$, форма является знакопеременной.

## Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть билинейная форма задана в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$.

**Лемма.** *Пусть $f(x)$ – линейная форма, рассматриваемая в вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$. Тогда существует единственный элемент $h \in \mathcal{E}_n$, такой, что выполняется:*

$$f(x) = (x, h), \qquad \forall x \in \mathcal{E}_n. \tag{15}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольный ортонормированный базис (ОНБ) $e_1, e_2, ..., e_n$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Возьмем $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ и определим компоненты $h_k = f(e_k)$.

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i,$$

$h$ - элемент пространства, следовательно, он может быть разложен по базису:

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \Rightarrow f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = (x, h).$$

2) Допустим, $h$ не единственное, т.е. существуют $h_1$ и $h_2$, такие, что $\forall x \in \mathcal{E}_n$
$(x_1, h_1) = (x_1, h_2)$,
$(x_1, h_1) - (x_1, h_2) = 0$,
$(x_1, h_1 - h_2) = 0$,
т. к. $x$ - произвольный, предположим, что он равен $h_1 - h_2$. Получаем: $(h_1 - h_2, h_1 - h_2) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $h_1 - h_2 = \theta$, следовательно, $h_1 = h_2$. $\square$

**Теорема 14.** *Пусть $f(x, y)$ - билинейная квадратичная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, такой, что справедливо равенство:*

$$f(x, y) = (x, \varphi y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{16}$$

Доказательство. 1) Зафиксируем элемент $y$ и применим лемму, рассмотренную выше. Существует $h$, для которого выполняется равенство $h = \varphi y$. Из свойств билинейной формы и скалярного произведения следует

данное равенство.
2) Пусть существует два таких $\varphi_1, \varphi_2, : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$.
$\forall x, y \ (x, \varphi_1 y) = (x, \varphi_2 y)$,
$(x, \varphi_1 y) - (x, \varphi_2 y) = 0$,
$(x, (\varphi_1 - \varphi_2) y) = 0$.
Т. к. $x$ – любой, предположим, что $x = \varphi_1 y - \varphi_2 y$.
$\varphi_1 y - \varphi_2 y, (\varphi_1 - \varphi_2) y) = 0$ справедливо при $\varphi_1 y - \varphi_2 y = 0$,
$\varphi_1 y = \varphi_2 y$ (равенство двух операторов),
$\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

**Следствие.** Наряду с равенством (16) справедливо

$$f(x, y) = (\varphi x, y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{17}$$

**Теорема 15.** *Пусть $f(x, y)$ – билинейная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ и пусть $[f]_e = B$ – матрица линейного оператора, фигурирующего в равенстве (17), причем $e$ – ортонормированный базис. Тогда*

$$a_{ij} = b_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n,$$

*где $a_{ij}$ – элементы матрицы билинейной формы в этом базисе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $a_{ij} = (\varphi e_i, e_j) = (\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik} e_k e_j) =$ (по определению)

$$\begin{cases} \varphi e_1 = b_{11} e_1 + b_{12} e_2 + \ldots + b_{1n} e_n, \\ \varphi e_2 = b_{21} e_1 + b_{22} e_2 + \ldots + b_{2n} e_n, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varphi e_n = b_{n1} e_1 + b_{n2} e_2 + \ldots + b_{nn} e_n, \end{cases}$$

т. к. $e$ – ортонормированный, т.е. $= b_{ij}$ при $k = j$, $a_{ij} = b_{ij}$ $\square$.

**Теорема 16.** *$f(x, y)$ – билинейная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ – является симметричной тогда и только тогда, когда оператор $\varphi$ фигурирующий в (17), является самосопряженным*

$$f(x, y) = f(y, x) \Leftrightarrow (\varphi x, y) = (x, \varphi y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
**Необходимость.** $(\varphi x, y) = f(x, y) = f(y, x) = (\varphi x, y) - (x, \varphi y)$.
**Достаточность.** $f(x, y) = (\varphi x, y) = (x, \varphi y) = (\varphi y, x) = f(y, x)$. $\square$

## Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе.

**Теорема 17.** *Пусть $f(x, y)$ – симметричная билинейная форма, определённая в $\mathcal{E}_n$, тогда существует ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$ и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, такие, что $\forall x \in \mathcal{E}_n$ справедливо представление*

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2,$$

*где*$[x]_e = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для билинейной формы справедливо $f(x, y) = (\varphi x, y)$; т. к. она симметричная, то по предыдущей теореме $\varphi$ будет самосопряжённым. Для самосопряжённого оператора

$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$\varphi x = \lambda x$, следовательно, $\varphi x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$, $f(x, x) = (\varphi x, x)$, т. к. базис $e_1, e_2, ..., e_n$ – ортонормированный, то получим:

$$(\varphi x, x) = f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2. \ \square$$

Пусть $A$ – матрица линейного оператора и матрица квадратичной формы в базисе $e$.

$A = [\varphi]_e = [f(x, x)]_e$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$\Lambda = {P^{-1}}_{e \to e'} \cdot A \cdot P_{e \to e'}$, где $P_{e \to e'}$ – ортогональная, т.е. ${P^{-1}}_{e \to e'} = P^T_{e \to e'}$.

**П р и м е р 7.** *Найти канонический вид квадратичной формы $f(x, x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5$, к которой она приводится ортогональным преобразованием и указать одно из таких ортогональных преобразований ($n = 2$).*

*Решение*.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 16 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 9,$

$f(x', x') = (x'_1)^2 + 9(x'_2)^2$

Для того, чтобы найти ортогональное преобразование, с помощью которого форма приводится к каноническому виду, необходимо найти соответствующие собственные векторы собственных значений. Проверить ортогональность и пронормировать. Соответствующие векторы выписать по столбцам (матрица перехода $e \to e'$, $e$ – канонический базис).
$x_e = P_{e \to e'} x_e$,

$P_{e \to e'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Связь $x$ и $x'$:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ - связь координат.

## Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.

**Теорема 18.** *Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ - симметричные билинейные формы, определённые в линейном пространстве, причём квадратичная форма, полученная из билинейной формы $g(x, y)$ является положительно определённой. Тогда существует базис $e_1, e_2, ..., e_n$, в котором справедливо представление*

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i^2,$$

$$g(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Доказательство.

Так как $g(x, y)$ является полярной положительной формой, то по теореме $(x, y) = g(x, y)$. Введя таким образом скалярное произведение, мы переходим в $\mathcal{E}_n$. Для $\mathcal{E}_n$ по теореме (представление квадратичной формы в каноническом виде в ортонормированном базисе): $f(x, x) = \sum \lambda x_i^2$.

В ортонормированном базисе $(x, x) = g(x, x)$.

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \quad \square$$

Пусть $A = [f(x, x)]_e$, $g(x, x)$ – положительно определенная,
$\Lambda = [f(x, x)]_{e'}$,
$[g(x, y)]_e = B$, $[g(x, x)]_{e'} = E$,

$\Lambda = P^T_{e\to e'} A P_{e\to e'}$,
$A = (P^T_{e\to e'})^{-1} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1}$,
$E = P^T_{e\to e'} B P_{e\to e'}$,
$B = (P^T_{e\to e'})^{-1} E (P_{e\to e'})^{-1}$,
$(AB)^{-1} = b^{-1} A^{-1}$,
$B^{-1} = P_{e\to e'} P^T_{e\to e'}$,
$B^{-1}A = P_{e\to e'} P^T_{e\to e'} (P^T_{e\to e'})^{-1} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1} = P_{e\to e'} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1}$,

$B^{-1} A P_{e\to e'} = P_{e\to e'} \Lambda$ – получили определение собственных значений собственных векторов матрицы $(B^{-1}A)$.

$\Lambda$ – матрица из всех собственных значений.

$P_{e\to e'}$ – матрица, состоящая из собственных векторов.

$$|B^{-1}A - \lambda E| = 0,$$
$$|A - \lambda B| = 0.$$

Возможен вариант с очевидными исправлениями в выводе данной формулы, когда
квадратичная форма задана следующим образом: $g(x,x) = \sum \mu_i x_i^2$

$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \mu_n \end{pmatrix}$

**П р и м е р 8.** *Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных форм является знакоопределённой. Найти замену координат, приводящих эти две формы к нормальному, и записать канонический вид этих форм.*

$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$,
$f = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$.

*Решение.*

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A - \lambda B| = 0, \qquad \lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -4$,

$f(x', x') = 5{x'}_1^2 - 4{x'_2}^2$,
$g(x', x') = {x'}_1^2 + {x'_2}^2$.

## Гиперповерхности второго порядка

**Понятие гиперповерхности второго порядка.** Пусть $V$ — $n$-мерное вещественное евклидово пространство.

Ради геометрической наглядности будем называть векторы $x$ этого пространства точками.

*Гиперповерхностью $S$ второго порядка будем называть геометрическое место точек $x$, удовлетворяющих уравнению вида*

$$A(x,x)+2B(x)+c, \tag{1}$$

где $A(x,x)$ — не равная тождественно нулю квадратичная форма, $B(x,x)$ — линейная форма, а $c$ — вещественное число.

Уравнение (1) будем называть общим уравнением гиперповерхности второго порядка.

Выделим в пространстве $V$ какой-либо ортонормирванный базис $e_k$. Координаты вектора $x$ (точки $x$) в этом базисе обозначим через $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда квадратичная форма $A(x,x)$ может быть представлена в виде

$$A(x,x)=\sum_{j,\ k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k, \tag{2}$$

где

$$a_{jk}=A(e_j,e_k) \tag{3}$$

и $A(e_j,e_k)$ — значение на векторах $e_j$ и $e_k$ симметричной билинейной формы $A(x,y)$, полярной квадратичной форме $A(x,x)$.

Линейная форма $B(x)$ в указанном базисе $e_k$ представляется в виде

$$B(x)=\sum_{k=1}^{n} b_kx_k. \tag{4}$$

Таким образом, *общее уравнение гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве $V$ с выделенным базисом $e_k$ может быть представлено в следующей форме:*

$$\sum_{j,\ k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k+2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k+c=0. \tag{5}$$

Договоримся о следующей терминологии.

Слагаемое $A(x,x)=\sum\limits_{j,\ k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k$ будем называть группой старших членов уравнения (1) или (5).

Группу слагаемых $B(x)+c=\sum\limits_{k=1}^{n} b_kx_k+c$ будем называть линейной частью уравнения (1) или (5).

Мы будем рассматривать в дальнейшем матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & b_n \\ b_1 & ... & b_n & c \end{pmatrix}$$

и определители $\det A$ и $\det B$ этих матриц.

Исследование гиперповерхностей второго порядка мы будем проводить с помощью метода, сходного с методом, применяемым в аналитической геометрии при исследовании кривых и поверхностей второго порядка, заданных общими уравнениями.

Идея этого метода заключается в том, что путем выбора специальной декартовой системы координат на плоскости (для кривых второго порядка) или в пространстве (для поверхностей второго порядка) достигается максимальное упрощение уравнения кривой или поверхности. Затем путем исследования этого уравнения выясняются геометрические свойства кривой или поверхности. Кроме того, перечисление всех возможных типов простейших (канонических) уравнений кривых или поверхностей второго порядка позволяет дать их классификацию.

Чтобы использовать этот метод в многомерном случае, мы сначала должны изучить такие преобразования (отображения) $n$-мерном евклидова пространства, которые представляют собой аналоги преобразований декартовых прямоугольных координат в случае двух и трех измерений.

Очевидно, гиперповерхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект пространства $V$, не изменяется, если производится преобразование указанного выше вида. Ниже мы убедимся, что для каждого уравнения вида (1) (или (5)) можно выбрать такое начало координат и выбрать такой ортонормированный базис в $V$, что это уравнение, записанное в координатах относительно нового базиса, будет максимально простого вида, и поэтому, как и в случае двух и трех измерений, можно будет указать геометрические характеристики таких поверхностей и дать им классификацию.

**2. Параллельные переносы в евклидовом пространстве. Преобразования ортонормированных базисов в ортонормированные.** П а р а л л е л ь н ы м  п е р е н о с о м в евклидовом пространстве $V$ мы будем называть преобразование, задаваемое формулами

$$x = x' + x^\circ, \tag{7}$$

где $x$ — фиксированная точка, называемая новым началом координат.

Пусть точки $x$, $x'$ и $x^\circ$ имеют координаты, соответственно равные $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(x_1', x_2' ..., x_n')$ и $(x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ)$.

Тогда в координатах параллельный перенос определяется формулами

$$x_k = x_k' + x_k^\circ, \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{8}$$

Отметим, что при параллельном переносе любой фиксированный базис не изменяется.

Перейдём теперь к выяснению характеристики преобразования ортонормированного базиса в ортонормированный.

Допустим, что ортонормированный базис $\{e_k\}$ преобразуется в новый ортонормированный базис $\{e_k'\}$. Разложим каждый вектор $\{e_k'\}$ по векторам $\{e_k\}$. Получим

$$\left.\begin{array}{lcr} e_1' & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n, \\ e_2' & = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n1}e_n, \\ ... & ... & ... \\ e_n' & = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Обозначим буквой $P$ матрицу преобразования (9):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Так как базисы $\{e_k\}$ и $\{e_k'\}$ ортонормированные, то из (9) путём скалярного умножения $e_j'$ и $e_k'$ получим

$$(e_j', e_k') = \sum_{m=1}^{n} p_{mj}p_{mk} = \delta_{jk} = \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & , & j = k, \\ 0 & , & j \neq k. \end{array} \right.$$

Рассмотрим теперь транспониролванную матрицу $P'$, т. е. матрицу, полученную из $P$ перестановкой строк и столбцов.

Очевидно,

$$PP' = P'P = I, \tag{12}$$

где $I$ — единичная матрица.

Равенства (12) показывают, что матрица $P'$ является обратной для матрицы $P$, т. е.

$$P^{-1} = P'. \tag{13}$$

Допустим теперь, что мы рассматриваем преобразование ортонормированног базиса $\{e_k\}$ по формулам (9), причём матрица $P$ этого преобразования удовлетворяет условию (12) (или, что то же, (13)).

Тогда, очевидно, элементы $p_{jk}$ матрицы $P$ удовлетворяют условию (11), что, согласно, этим же соотношениям (11), эквивалентно условию ортонормированности базиса $\{e'_k\}$

Напомним, что в матрицу $P$, удовлетворяющую условию (12), мы назвали ортогональной.

Итак, *для того чтобы преобразование (9) было преобразованием ортонормированного базиса в ортонормированный, необходимо и достаточно, чтобы матрица $P$ этого преобразования была ортогональной.*

З а м е ч а н и е. Обращаясь к формулам преобразования координат вектора при преобразовании базиса и учитывая, что обратная матрица для ортогональной матрицы $P$ есть матрица $P'$, получим следующие формулы преобразования координат точки $x$ при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1 & = & p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + & \ldots & + p_{1n}x'_n, \\ x_2 & = & p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + & \ldots & + p_{2n}x'_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + & \ldots & + p_{nn}x'_n. \end{array}\right\} \tag{14}$$

**Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при параллельном переносе.** Рассмотрим параллельный перенос, который определяется как преобразование пространства $V$ по формуле (7)(или в координатах по формуле (8)).

Левая часть (1) после подстановки вместо $x$ его выражения по формуле (7) в силу линейности квадратичной формы по первому и второму аргументу и свойств линейной формы примет вид:

$$A(x', x') + 2[A(x', x^\circ) + B(x')] + [A(x^\circ, x^\circ) + 2B(x^\circ) + c] = 0.$$

Итак, общее уравнение (1) гиперповерхности $S$ при параллельном переносе (7) запишется в форме

$$A(x', x') + 2B'(x') + c' = 0, \tag{15}$$

где линейная форма $B'(x')$ и постоянное число $c'$ определяются соотношениями

$$B'(x') = A(x', x^\circ) + B(x'), \tag{16}$$

$$c' = A(x^\circ, x^\circ) + 2B(x^\circ). \tag{17}$$

Запишем полученные формулы в координатах.

Пусть координаты точек $x'$ и $x^\circ$ равны соответственно $x'_1$, $x'_2$, ..., $x'_n$ и $x^\circ_1$, $x^\circ_2$, ..., $x^\circ_n$. Так как при параллельном переносе базис $\{e_k\}$ не меняется, то квадратичная форма $A(x', x')$ запишется следующим образом:

$$A(x', x') = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x'_j x'_k \tag{18}$$

(отметим, что коэффициенты $a_{jk} = A(e_j, e_k)$ не меняются, так как не меняются базисные векторы $e_k$).

Следоватльно, мы можем сделать важный вывод: *при параллельном переносе группа старших членов сохраняет свой вид.*

Займёмся теперь формулами (16) и (17). Так как

$$A(x', x^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ \right) x_k^\circ,$$

$$B(x') = \sum_{k=1}^{n} b_k x'_k,$$

$$A(x^\circ, x^\circ) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ x_k^\circ,$$

$$B(x^\circ) = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\circ,$$

то формула (16) примет вид

$$B'(x') = \sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k = \sum_{k=1}^{n} \left[ \sum \ limits_{j=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ + b_k \right] x_k^\circ, \tag{7.19}$$

а формула (17) запишется следующим образом:

$$c' = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ x_k^\circ + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\circ + c. \tag{20}$$

Таким образом, уравнение (15) в координатах будет иметь следующий вид:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x'_j x'_k + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k x'_k + c' = 0. \tag{21}$$

Нам понадобится несколько иное, чем (20), выражение для $c'$. Запишем (20) в следующей форме:

$$c' = \sum_{k=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ + b_k \right] x_k^\circ + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\circ + c. \tag{22}$$

Учитывая, что коэффициенты $b'_k$ выражаются, как это следует из (19), по формулам

$$b'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ + b_k, \tag{23}$$

мы получим из (22) нужное нам выражение для $c'$:

$$b'_k = \sum_{k=1}^{n} (b'_k + b_k) x_k^\circ + c. \tag{24}$$

**Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному.** Пусть ортонормированный базис $\{e_k\}$ преобразуется в новый ортонормированный базис $\{e'_k\}$ по формулам (9) и $P$— ортогоналбная матрица этого преобразования (см. (10)). Тогда, согласно замечанию в п. 2 этого параграфа, координаты $x_k$ и $x'_k$ точки в базисах $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$ связаны соотношениями (5). Подставляя выражение для $x_k$ из (14) в левую часть уравнения и учитывая, что вследствие однородности соотношений (14) группа старших членов и линейная часть уравнения (5) преобразуется автономно, получим следующее выражение для общего уравнения гиперповерхности второго порядка в координатах $x'_k$ точек в преобразованном базисе $\{e'_k\}$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a'_{jk} x'_j x'_k + 2\sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c' = 0. \tag{15}$$

Согласно отмеченной выше автономности преобразования группы старших членов, справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} a'_{jk} x'_j x'_k &= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k, \\ \sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k &= \sum_{k=1}^{n} b_k x_k, \\ c' &= c. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Обращаясь к первой из формул (26), мы видим, что для определения коэффициентов $a'_{jk}$ можно воспользоваться правилом преобразования коэффициентов квадратичной формы при переходе к новому базису. Именно, если обозначим буквой $A'$ матрицу квадратичной формы $A(x, x)$ в базисе $\{e'_k\}$ то, согласно теореме 7.2 и соотношению $P' = P^{-1}$, *получим следующую связь между матрицами* $A$ и $A'$ *формы* $A(x, x)$ в базисах $e_k$ и $e'_k$:

$$A' = P^{-1} A P \tag{27}$$

(напомним, что $P$ — матрица ортогонального преобразования).

Будем рассматривать теперь матрицу $A'$ как матрицу некоторого линейного оператора $A$ в базисе $\{e'_k\}$, а матрицу $P^{-1}$ как матрицу перехода от базиса $\{e'_k\}$ к $\{e_k\}$. Тогда, согласно теореме матрицу $A$ можно рассматривать как матрицу этого линейного оператора $A$ в базисе $\{e_k\}$.

Иными словами, *матрица квадратичной формы при преобразовании ортонормированного базиса в ортонормированный изменяется как матрица некоторого линейного оператора.*

Этот вывод мы используем в следующем пункте.

З а м е ч а н и е. Отметим, что оператор $A$, матрица которого в ортонормированном базисе совпадает с матрицей квадратичной формы $A(x, x)$, *самосопряжённый*

Для доказательства проведём следующие рассуждения.

Пусть $A(x, x)$ — квадратичная форма и $A(x, y)$ — симметричная билинейная форма, полярная форме $A(x, x)$. Согласно теореме 7.8 билинейная форма $A(x, y)$ может быть представлена в виде

$$A(x, y) = (Ax, y),$$

где $A$ — *самосопряжённый* оператор.

Поэтому квадратичная форма $A(x, x)$ может быть представлена в виде

$$A(x, x) = (Ax, x).$$

Докажем, что в ортонормированном базисе $\{e_k\}$ матрицы оператора $A$ и квадратичной формы совпадают. Этим будет доказано утверждение замечания.

Пусть $a_{jk}$ — элементы матрицы формы $A(x, x)$ и $\tilde{a}_{jk}$ — элементы матрицы оператора $A$ в базисе $\{e_k\}$. Согласно п. 2 §1 этой главы

$$a_{jk} = A(e_j, e_k),$$

а элементы $\tilde{a}_{jk}$ могут быть найдены из равенств

$$Ae_j = \sum_{p=1}^{n} \tilde{a}_{jp} e_p.$$

Умножим обе части последнего соотношения скалярно на $e_k$. Тогда, учитывая ортонормированность базиса $\{e_k\}$, получим

$$(Ae_j, e_k) = \tilde{a}_{jk}.$$

Так как $A(e_j, e_k) = (Ae_j, e_k)$, то $a_{jk} = \tilde{a}_{jk}$. Утверждение замечания доказано.

**5. Инварианты общего уравнения гиперповерхности второго порядка.** Назовём инвариантом общего уравнения (1) (или (5)) гиперповерхности второго порядка относительно параллельных переносов и преобразований ортогональных базисов в ортогональные такую функцию $f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, b_1, ..., b_n, c)$ коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при указаных преобразованиях пространства.

Докажем следующее утверждение:

***Теорема 7.11.*** *Инвариантами общего уравнения (1)(или (5)) гиперповерхности второго порядка являются коэффициенты характеристического многочлена матрицы $A$ квадратичной формы $A(x,x)$ и определитель $\det B$ матрицы $B$ в соотношении (6). В частности, инвариантами являются $\det A$ и след $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ матрицы $A$.*

Доказательство. Очевидно, инвариантность перечисленных в условии теоремы величин достаточно доказать отдельно для параллельного переноса и преобразования ортонормированного базиса в ортонормированный.

Рассмотрим сначала *параллельный перенос.* В п. 3 этого параграфа мы установили, что при этом преобразовании группа старших членов сохраняет свой вид (см. формулу (18)). Поэтому не меняется матрица $A$, а следовательно, и характеристический многочлен этой матрицы.

Докажем инвариантность $\det B$.

При параллельном переносе (7) (или (8)) матрица преобразуется в матрицу $B'$, определитель которой, согласно (11), имеет вид

$$\det B' = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b'_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & b'_n \\ b'_1 & ... & b'_n & c' \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где величины $b'_k$ $c'$ определяются по формулам (23) и (24).

Вычтем из элементов последней $(n+1)$-й строки определителя (28) элементы первой строки, умноженные на $x_1^\circ$, затем элементы второй строки, умноженные на $x_2^\circ$, и т. д., наконец, элементы $n$-й строки, умноженные на $x_n^\circ$. Так как при таких преобразованиях определитель не меняется, то, используя (23) и (24), получим соотношение

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b'_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & b'_n \\ b_1 & ... & b_n & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k^\circ + c\right) \end{vmatrix}$$

Вычтем теперь из элементов последнего $(n+1)$-го столбца определителя (29) элементы первого столбца, умноженные на $x_1^\circ$, затем элементы второго столбца, умноженные на $x_2^\circ$, и т. д., наконец, элементы $n$-го столбца, умноженные на $x_n^\circ$. Так как при таких преобразованиях определитель не меняется, то, используя соотношение $a_{jk} = a_{kj}$, вытекающее из симметричности формы $A(x,y)$, и формулу (23), мы получим в результате $\det B$. Итак, равенство $\det B' = \det B$ доказано. Следовательно, $\det B$ инвариантен относительно параллельных переносов.

Рассмотрим теперь *преобразование ортонормированного базиса в ортонормированный.*

Во-первых, убедимся, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы $A$ квадратичной формы являются инвариантами рассматриваемого преобразования.

В предыдущем пункте мы установили, что при переходе к новому ортонормированному базису матрица $A$ изменяется как матрица некоторого линейного оператора. Но в таком случае, как следует из замечания 1 п. 3, §2, гл. 5, коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы не меняются при переходе к другому базису.

В частности, определитель $\det A$ и след $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ матрицы $A$, как коэффициенты характеристического многочлена, являются инвариантами.

Нам останется доказать инвариантность определителя $\det B$ при преобразовании ортонормированного базиса в ортонормированный.

Приступим к этому доказательству.

Применим следующий приём. Введём обозначения $b_k = a_{k,n+1}, k = 1, 2, ..., n, \quad c = a_{n+1,n+1}$. Тогда уравнение (5) гиперповерхности можно записать следующим образом:

$$\sum_{j,k=1}^{n+1} a_{jk} x_j x_k = 0, \tag{7.91}$$

где $x_{n+1} = 1$.

Рассмотрим преобразование переменных $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ в переменные $x'_1, x'_2, ..., x'_n, x'_{n+1}$, при котором первые $n$ переменных преобразуются по формулам (14), а переменная $x_{n+1}$ преобразуется по формуле

$$x_{n+1} = x'_{n+1}.$$

Ясно, что это преобразование переменных можно рассматривать как преобразование координат при преобразовании ортонормированного базиса $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства, причём матрица $P$ этого преобразования имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{n1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{1n} & ... & p_{nn} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Легко видеть, что матрица $\tilde{P}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{P'} = \tilde{P^{-1}}$$

и поэтому является ортогональной. Но тогда, согласно п. 2 этого параграфа, ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ преобразуется с помощью матрицы $\tilde{P}$ в ортонормированнный базис. Выше было выяснено, что при таком преобразовании матрицы $B$ квадратичной формы определитель $\det B$ этой матрицы представляет собой инвариант. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из рассуждений в доказательстве теоремы следует, что инвариантами общего уравнения гиперповерхности второго порядка будут также величины $\operatorname{rang} A$ и $\operatorname{rang} B$.

**6. Центр гиперповерхности второго порядка.** Попытаемся найти такой параллельный перенос, при котором общее уравнение (15) не содержало бы слагаемое $2B'(x')$ (или, если обратиться к уравнению (21), то слагаемых $2\sum\limits_{k=1}^{n} b'_k x'_k$).

Иными словами, будем искать параллельный перенос (т. е. координаты $x_1^\circ$, $x_2^\circ$, ..., $x_n^\circ$ точки $x$), при котором обратятся в нуль все коэффициенты $b_k$. Обращаясь к формулам (23), найдём, что искомые координаты $x_1^\circ$, $x_2^\circ$, ..., $x_n^\circ$ точки $x$ представляют собой решение следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j^\circ + b_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{32}$$

Уравнения (32) называются *уравнениями центра гиперповерхности второго порядка*, а точка $x^\circ$ с координатами $x_1^\circ$, $x_2^\circ$, ..., $x_n^\circ$, где $x_1^\circ$, $x_2^\circ$, ..., $x_n^\circ$ — решение системы (32), называется ц е н т р о м этой поверхности.

Поясним наименование "центр"гиперповерхности. Пусть начало координат помещено в центр $x_\circ$, т. е. произведён искомый параллельный перенос. Тогда уравнение поверхности $S$ примет вид

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k + c' = 0. \tag{33}$$

Пусть точка $x$ с координатами $(x_1', x_2', ..., x_n')$ расположена на $S$. Это означает, что её координаты удовлетворяют уравнению (33). Очевидно, точка $-x$ с координатами $(-x_1', -x_2', ..., -x_n')$, симметричная с точкой $x$ относительно точки $x$, также расположена на $S$, ибо её координаты тоже удовлетворяют уравнению (33).

Таким образом, если у гиперповерхности $S$ есть центр, то *относительно центра точки $S$ располагаются парами.*

З а м е ч а н и е 1. Если гиперповерхности $S$ второго порядка имеет центр, то инвариантны $\det A$, $\det B$ и свободный член $c'$ в уравнении (33) связаны соотношением

$$\det B = c' \det A. \tag{34}$$

Действительно, для уравнения (33) получим

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & 0 \\ 0 & ... & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Из последней формулы и вытекает (34).

Наличие центра у гиперповерхности второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (32).

*Если уравнения центра имеют единственное решение, то гиперповерхность $S$ будем называть ц е н т р а л ь н о й.*

Так как определитель системы (32). равен $\det A$, а необходимым и достаточным условием существования единственного решения этой системы является отличие от нуля её определителя, то мы можем сделать следующий вывод: *для того чтобы гиперповерхность $S$* была центральной, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

З а м е ч а н и е 2. Если начало координат перенесено в центр центральной гиперповерхности $S$, то уравнение этой гиперповерхности будет иметь вид

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k + \frac{\det B}{\det A} = 0. \tag{35}$$

Действительно, после переносе начала в центр уравнение гиперповерхности примет вид (33). Так как для центральной гиперповерхности $\det A \neq 0$, то из формулы (34) найдём $c' = \det B/detA$. Подставляя это выражение для $c'$ в формулу (33), мы и получим уравнение (35).

**Стандартное упрощение любого уравнения гиперповерхности второго порядка путём преобразования ортонормированного базиса.** По теореме 7.8 существует такой ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $A(x, x)$ записывается в виде суммы квадратов. Обозначим этот базис через $\{e_k\}$, а координаты точки $x$ в этом базисе обозначим через $(x_1', x_2', ..., x_n')$. Кроме того, буквами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ обозначим собственные значения самосопряжённого оператора $A$, матрица которого в ортонормированном базисе совпадает с матрицей квадратичной формы $A(x, x)$ (см. замечание в п. 4 этого параграфа).

Используя теперь выводы теорем 7.8, запишем квадратичную форму $A(x, x)$ в координатах $(x_1', x_2', ..., x_n')$ точки $x$ в базисе $\{e_k\}$ следующим образом:

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 {x_k'}^2. \tag{36}$$

Итак, перейдём от базиса $\{e_k\}$ к базису $\{e'_k\}$. Так как формулы преобразования координат точек при таком преобразовании линейны и однородны (см. замечание п.2 этого параграфа, формулы (24)), то группа старших членов и линейная часть уравнения гиперповерхности $S$ преобразуются автономно. На основании этого и в силу (36) уравнение гиперповерхности $S$ в базисе $\{e'_k\}$ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k {x'_k}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c = 0. \tag{37}$$

Приведение любого уравнения гиперповерхности $S$ второго порядка к виду (37) будем называть *с т а н д а р т н ы м   у п р о щ е н и е м   этого уравнения (путём преобразования ортонормированного базиса).*

**8. Упрощение уравнения центральной гиперповерхности второго порядка. Классификация центральных гиперповерхностей.** Выводы, сделанные в предыдущих двух пунктах, позволяют решить вопрос о классификации всех центральных гиперповерхностей второго порядка. Решение этого вопроса мы проведём по следующей схеме. Во-первых, путём переноса начала координат в центр гиперповерхности (5) мы приведём её уравнение к виду (35). После этого произведём стандартное упрощение уравнения (35). В результате, очевидно, мы получим, согласно (37), следующее уравнение центральной поверхности второго порядка:

$$\lambda_1 {x''_1}^2 + \lambda_2 {x''_2}^2 + ... + \lambda_n {x''_n}^2 + \frac{\det B}{\det A} = 0, \tag{38}$$

в котором $\lambda_k$ — собственные числа матрицы $A$ квадратичной формы $A(x,x)$ в уравнении (1), а $x''_k$ — координаты точки $x$ в окончательном ортонормированном базисе $\{e_k\}$.

Отметим, во-первых, что *все собственные числа* $\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$, *отличны от нуля.*

Действительно, подсчитывая $\det A$ для уравнения (38), получим

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n,$$

а так как для центральной поверхности $\det A \neq 0$, то, очевидно, что все $\lambda_k \neq 0$.

Договоримся далее все положительные собственные числа матрицы $A$ нумеровать первыми индексами, а отрицательные — последующими. Таким образом, найдётся такой номер $p$, что

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 > 0 & \lambda_2 > 0 & ... \quad \lambda_p > 0 \\ \lambda_{p+1} < 0 & \lambda_{p+2} < 0 & ... \quad \lambda_n < 0. \end{array}$$

Введём теперь следующие обозначения: если $sgn\frac{\det B}{\det A} \neq 0$, то положим

$$\left.\begin{array}{ll} \left|\frac{\det A}{detB}\right| = \frac{1}{a_k^2} \quad , & k = 1, 2, ..., p, \\ \left|\frac{\det A}{detB}\right| = -\frac{1}{a_k^2} \quad , & k = p+1, ..., n; \end{array}\right\} \tag{40}$$

Тогда, очевидно, уравнение (38) может быть переписано следующим образом (при этом мы заменим обозначение координат $x''_k$ на $x_k$):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2}{2} + ... + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2} + sgn\frac{\det B}{\det A} = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) называется *к а н о н и ч е с к и м   у р а в н е н и е м   центральной гиперповерхности второго порядка.*

Величины $a_k, k = 1, 2, ..., n$, *называются полуосями центральной гиперповерхности второго порядка.* Они могут быть вычислены по формулам (39) и (40).

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# А Л Г Е Б Р А   М А Т Р И Ц

САМАРА 2010

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# АЛГЕБРА МАТРИЦ

*Методические указания*

САМАРА 2010

Составители: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев.

УДК 512.8

**Алгебра матриц:** Метод.указания/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. Самара, 2010. 32 с.

Содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Матрицы и определители"курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены для студентов направлений 010501 - "Прикладная математика и информатика", 010600 - "Прикладные математика и физика"и 230102 - "Автоматизированные системы обработки информации"в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Выполнены на кафедре прикладной математики.

Методические указания подготовлены при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также программы "Фундаментальные исследования и высшее образование"(BRHE).

Библиограф.: 3назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент Дегтярев А.А.

**Содержание**

## 1. Понятие матрицы. Операции над матрицами
### 1.1. Теоретические сведения

**Терминология и обозначения.**

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность $mn$ чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из $m$ строк и $n$ столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы.

Матрицу обозначают прописными латинскими буквами, при этом саму таблицу заключают в скобки (либо круглые, либо квадратные, либо двойные вертикальные):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначают строчными латинскими буквами, снабженными двумя индексами: $a_{ij}$ – элемент матрицы, расположенный в $i$-й строке $j$-м столбце. В этих обозначениях матрица размера $m \times n$ в общем виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используются обозначения :

$A = (a_{ij})$ – матрица $A$ с элементами $a_{ij}$;

$\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$.

Матриц размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей $n$-го порядка.*

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее внедиагональные элементы $a_{ij}$, $i \neq j$ равны нулю.

*Обозначение*: $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной.*

Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной.* Отметим, что для каждого порядка $n$ существует своя единичная матрица.

*Обозначение*: $E$ или $I$.

Матрица $O$, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если $i$-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы $i$-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами $k_i$ и $k_{i+1}$, то $k_i < k_{i+1}$.

Эти свойства означают, что все нулевые строки являются последними и что все элементы, расположенные слева и под первым ненулевым элементом каждой строки, равны нулю.

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой)ступенчатой* матрицы.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной.*

**Операции над матрицами.** Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

.

*Обозначение*: $A = B$.

***Суммой*** матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

*Обозначение*: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

**Свойства операции сложения**:

$\forall\ A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + O = O + A = A$;
4. $A + (-A) = -A + A = O$.

*Разностью* матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

*Обозначение*: $X = A - B$.

Очевидно, что для $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

*Обозначение*: $C = \alpha A$.

**Свойства операции умножения матрицы на число**:

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
4. $1 \cdot A = A$;
5. $-A = (-1)A$.

***Произведением матриц*** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

*Обозначение*: $C = AB$.

**!***Произведение $AB$ определено лишь в том случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.*

**Свойства операции умножения матриц**:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$,

выполненные для любых матриц $A, B, C$, для которых левые части равенств имеют смысл.

*Целой положительной степенью $A^k$ $(k > 1)$ квадратной матрицы* называется произведение $k$ матриц, каждая из которых равна $A$.

*Нулевой степенью квадратной матрицы* $A$ называется единичная матрица $E$ того же порядка, что и $A$, т. е. $A^0 = E$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$называется ***транспонированной*** к матрице $A$, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Переход от матрицы $A$ к $A^T$ называется *транспонированием матрицы $A$*. При транспонировании матрицы $A$ ее строки становятся столбцами $A^T$с теми же номерами, а столбцы – строками.

**Свойства операции транспонирования матриц**:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$;
4. $(A^T)^T = A$,

выполненные для любых матриц $A, B$, для которых левые части равенств имеют смысл.

**П р и м е р 1.** *Найти произведение матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

*<u>Решение.</u>* $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\Rightarrow$ *произведение* $AB$ *определено (число столбцов матрицы* $A$ *равно числу строк матрицы* $B$ *и равно трем)* *и* $AB = C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

*По формуле (3) находим*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 0\cdot 1 & 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix},$$

т.е. $c_{ij}$ – элементы матрицы $C$, которые получаются перемножением $i$-й строки матрицы $A$ на $j$-й столбец матрицы $B$.

**П р и м е р 2.** *Найти значение многочлена* $f(C)$, *если* $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $C = AB$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

*<u>Решение.</u> По формуле (3)* $C = AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $C^2 = CC = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$;

*Используя формулы (1) и (3) вычисляем*

$$f(C) = C^2 - 2C + 5E = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.2. Задание

**1.** Найти произведения матриц $AB, BA, BC, CB, AC, CA$, если они определены.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$.

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

17. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$.

22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$.

23. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$.

24. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

26. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

27. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T$.

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

29. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T$.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}^T$.

**2.** Найти значение многочлена $f(C)$ от матрицы $C$, если $C = AB$.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $f(x) = 3x^3 - 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $f(x) = 2x^2 + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

5. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

6. $f(x) = -2x^2 + 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

7. $f(x) = x^2 - 5x + 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$

8. $f(x) = 2x^2 + 6x - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

9. $f(x) = x^2 - 4x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $f(x) = -3x^2 + 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

11. $f(x) = 3x^2 - x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

12. $f(x) = -5x^2 + 2x - 1,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $f(x) = 4x^2 - x - 2,\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $f(x) = -2x^2 + 5,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad B = E.$

15. $f(x) = -x^2 + 2x - 1,\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

16. $f(x) = 2x^2 + x + 1,\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $f(x) = 2x^3 - 1,\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

18. $f(x) = -3x^2 + x + 2,\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

19. $f(x) = 3x^2 - 4,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};\quad B = E.$

20. $f(x) = -x^2 + 2x - 3,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

21. $f(x) = 3x^3 - 5,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

22. $f(x) = 5x^2 - x + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

23. $f(x) = 3x^2 - 2x - 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

24. $f(x) = -3x^2 - 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

25. $f(x) = -x^2 + 2x - 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $f(x) = 2x^2 - x + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

27. $f(x) = 4x^2 + x - 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

28. $f(x) = 4x^2 - x - 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

29. $f(x) = 4x^2 - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

30. $f(x) = 4x^2 + 2x - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

## 2. Определители. Основные методы вычисления определителей.

### 2.1. Теоретические сведения

**Терминология и обозначения.**

Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, в которой
1) $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$;
2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$
называется *перестановкой* из чисел $i = 1, 2, \ldots, n$.

Говорят, что два числа $\alpha_i$ и $\alpha_j$ в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$ и порядок – в противном случае. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначается символами $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $N(\alpha)$.

***Определителем n-го порядка*** квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем, если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{N(\alpha)}$. Для обозначения определителя приняты символы $\Delta, |A|, \det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (4)$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Каждое произведение в сумме (4) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{N(\alpha)}$ – его *знаком*.

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя $n$-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Определение (4) для $n = 2$ и $n = 3$ приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array} \qquad (6)$$

**Свойства определителя.**

**1.** Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

**2.** Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании: $|A| = |A^T|$.

_Следствие_. В определении (4) определителя можно поменять ролями строки и столбцы:

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

т.к. эта сумма равна $|A^T|$.

**3.** Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.

**4.** При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

**5.** Если каждый элемент некоторой $i$-й строки матрицы представлен в виде суммы:

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей: $\Delta = \Delta' + \Delta''$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \ldots & a'_{in} + a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**6.** При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.

**7.** Определитель матрицы, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

**8.** Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.

**9.** Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.

Определитель $k$-го порядка, составленный из элементов матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***минором*** $k$-го порядка матрицы $A$ и обозначается

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Минор порядка $n - k$, оставшийся после вычеркивания в квадратной матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ строк и столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***дополнительным минором к минору*** $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

Число

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{\sum_{p=1}^{k} (i_p + j_p)} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

называется ***алгебраическим дополнением*** к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

**П р и м е р 3.** *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Найти алгебраическое дополнение к минору* $M^{13}_{34}$.

*Решение. Вычеркнем из данной матрицы 1-ю и 3-ю строки, 3-й и 4-й столбцы. Минор*

$$\overline{M}^{13}_{34} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

*является дополнительным к минору* $M^{13}_{34}$. *Алгебраическим дополнением к минору* $M^{13}_{34}$ *будет*

$$(-1)^{1+3+3+4} \overline{M}^{13}_{34} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

**Теорема Лапласа**. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n - 1$. *Пусть в матрице $A$ выбраны произвольные $k$ строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы $A$ равен сумме всевозможных произведений миноров $k$-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$ и строку (столбец) с номером $i$, то минорами первого порядка, расположенными в $i$-й строке (столбце), будут сами элементы $a_{ij}(a_{ji})$. Обозначив через $A_{ij}$ алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}$, получим из теоремы Лапласа, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}. \tag{7}$$

Представление определителя (7) называется ***разложением определителя по $i$-й строке (столбцу)***.

**П р и м е р 4.** *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Найти алгебраические дополнения элементов 2-го столбца.*

*Решение.*

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

**Теорема**.*Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей*:

$$\det AB = \det A \det B.$$

**Основные методы вычисления определителей.**

**1. Приведение к треугольному виду.** Этот метод заключается в преобразовании матрицы определителя к такому виду, когда элементы, стоящие по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю. Полученный определитель по свойству 1 равен произведению элементов главной диагонали (побочной диагонали, умноженной на $(-1)^{n(n-1)/2}$).

Для вычисления определителя таким способом используют ***метод Гаусса***, который приводит определитель $n$-го порядка матрицы $A = (a_{ij})$ к верхнему треугольному виду:

1. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки (столбцы) матрицы определителя так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

2. Умножаем 1-ю строку матрицы определителя последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{n1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots$ $n$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента $a_{11}$.

3. Повторяем процедуру п.1-2, применяя ее к измененной подматрице $(n-1)$-го порядка, у которой в верхнем левом углу стоит элемент $\tilde{a}_{22}$ и так далее.

Замечание. Преобразование определителя легче производить с целыми числами, поэтому диагональный элемент, если возможно, выбирают равным единице, меняя строки (столбцы) местами или вынося общий множитель строки (столбца) за знак определителя.

**П р и м е р 5.** *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 3 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

*приведением к треугольному виду.*

*Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 1-ой строки:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*В полученном определителе ко 2-ой строке прибавим 1-ю и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-2), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Прибавив к 3-й строке 2-ю, умноженную на (-2), и к 4-й строке – 2-ю, умноженную на (-1), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

*В полученном определителе к 4-ой строке прибавим 3-ю, умноженную на (-2), получим:*

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}.$$

*Таким образом, данный определитель приведен к треугольному виду, и, следовательно,*

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 15 = -180.$$

**2. Метод понижения порядка** основан на использовании формул (7). Формула разложения определителя по строке (столбцу) принимает особенно простой вид, когда в этой строке (столбце) все элементы равны нулю, кроме одного.

**П р и м е р 6.** *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

*методом понижения порядка.*

<u>*Решение.*</u> *Вычтем из 3-й строки 4-ю и получим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Полученный определитель разложим по 3-й строке:*

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Прибавив к 3-му столбцу 2-ой, умноженный на 6, получим:*

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 16 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix}.$$

*Полученный определитель разложим по 2-й строке:*

$$\Delta = -3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot 25 = 75.$$

### 2.2. Задание

Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду и методом понижения порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.   2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.   3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}$.   5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.   6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.   8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.   9. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.   11. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.   12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.   14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.   15. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.   17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.   18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.   20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.   21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

## 3. Обратная матрица.

### 3.1. Теоретические сведения

**Терминология и обозначения.**

Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной к матрице*** $A$, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрица $A$, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой.*

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц $A$ и $A^{-1}$ одинакового порядка.

Кваратная матрица $A$ называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из алгебраических дополнений $A_{ij}$ к элементам $a_{ij}$ матрицы $A$ называется *присоединенной* к матрице $A$.

**Теорема (критерий обратимости)**. *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}. \tag{8}$$

**Свойства обратной матрицы.**

1. $E^{-1} = E$, так как $E \cdot E = E$
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$.

**Вычисление обратной матрицы.**

Соотношение (8) дает явный вид обратной матрицы. Оно полезно в теоретических исследованиях и совершенно неэффективно для практического вычисления (разве что для матриц второго порядка) вследствие большого объема требуемых вычислений. Для получения обратной матрицы к матрице $n$-го порядка согласно (8) требуется вычислить $n^2$ определителей $(n-1)$-го порядка и один определитель $n$-го порядка. В вычислительной математике используются различные дополнительные приемы вычисления обратной матрицы, которые по объему вычислений равносильны вычислению всего лишь двух определителей $n$-го порядка. Рассмотрим один из таких методов, в основе которого лежит *метод Гаусса*:

1) формируем расширенную матрицу $(A|E)$ приписыванием к матрице $A$ справа матрицы $E$ того же порядка;

2) с помощью метода Гаусса, производя элементарные преобразования **только над строками**, приводим сформированную расширенную матрицу к виду $(E|B)$ , что всегда возможно, если $A$ не вырождена.

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующих типов:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

б) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

в) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Тогда $A^{-1} = B$.

**П р и м е р 7.** *Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

*и если существует, то найти ее.*

<u>*Решение.*</u> *Так как* $\det A = -6 \neq 0$, *то матрица $A$ невырожденная и $A^{-1}$ существует.*

*Способ 1. Найдем матрицу $A$ по формуле (8). Алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $A$:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

*Следовательно,*

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Способ 2. Найдем $A^{-1}$ с помощью расширенной матрицы и метода Гаусса. Составим расширенную матрицу*

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

*Прибавим к 3-й строке 1-ю, получим*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

*Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки, тогда*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Прибавив ко 2-й строке 3-ю, умноженную на (-1), получим*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Умножив 2-ю строку на* $1/3$, *а 3-ю-на* $1/2$, *имеем*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

*Вычтем из 1-й строки 3-ю, тогда*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

*и*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Задание

Найти матрицу, обратную данной, если она существует, двумя способами:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**4. Ранг матрицы.**

**4.1. Теоретические сведения**

**Терминология и обозначения.** *Рангом* ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю.

*Обозначение:* rg $A$, rang $A$ и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, то $\mathrm{rg} A \leq \min(m, n)$;

2) равенство $\mathrm{rg} A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:

   а) в матрице $A$ существует ненулевой минор $r$-го порядка,

   б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\mathrm{rg} A = r > 0$. Любой ненулевой минор $r$-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которым расположен базисный минор, – базисными строками и столбцами.

Разумеется, у матрицы может быть не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

**Метод Гаусса вычисление ранга матрицы.**

Теоретическую основу этого метода для решения данной задачи составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования не изменяют ее ранга;

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме.

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхне (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

**П р и м е р 8.** *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

*Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы на месте $a_{11}$ оказалась единица:*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

*Умножим 1-ю строку матрицы на -2, -5, -7 и прибавим соответственно ко 2-й, 3-й, 4-й строкам, получим*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

*Поменяем местами 3-ю и 4-ю строки и 3-й и 4-й столбцы, получим*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rgA = 3$, *так как трапециевидная матрица имеет три ненулевых строки.*

### 4.2. Задание

Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \\ 6 & -3 & 17 & -38 & 23 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 & -6 \\ 4 & 3 & -9 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & 8 & -7 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -10 & -15 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

29. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

30. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$

## Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.- 384.

Учебное издание

**Алгебра матриц**

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

САМАРА 2010

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Методические указания*

САМАРА 2010

Составители: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев.

УДК 512.8

**Системы линейных уравнений:** Метод.указания/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. Самара, 2010. 32 с.

Содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Системы линейных уравнений"курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены для студентов направлений 010501 - "Прикладная математика и информатика", 010600 - "Прикладные математика и физика"и 230102 - "Автоматизированные системы обработки информации"в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Выполнены на кафедре прикладной математики.

Методические указания подготовлены при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также программы "Фундаментальные исследования и высшее образование"(BRHE).

Библиограф.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент Дегтярев А.А.

**Содержание**

## 1. Условие совместности линейной системы

*Системой $m$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с $n$ неизвестными* называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = & b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}$ – коэффициенты системы, $b_i$ – свободные члены, $x_j$ – неизвестные величины, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Система (1) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется *неоднородной.*

*Решением системы* (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система уравнений вида (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система вида (1)называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Совместная система вида (1)называется *неопределенной*, если у нее существуют по крайней мере два различных решения.

В матричной форме система (1) может быть записана в виде

$$Ax = b \qquad (2),$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Исследовать и решить систему – это значит:

- установить, совместна она или несовместна;
- если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:
  - в случае определенной системы найти единственное ее решение;
  - в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Рассмотрим однородную СЛАУ

$$Ax = 0 \tag{3}$$

Однородная СЛАУ (3) всегда совместна, ибо она всегда обладает *тривиальным* (*нулевым*) решением $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

**Теорема**. *Однородная система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $rgA < n$ .

Составим расширенную матрицу $B$ системы (2), приписав к основной матрице $A$ системы (1) столбец свободных членов: $B = [A|b]$. Матрица $B$ называется *расширенной матрицей* системы (2).

**Теорема (Кронекера – Капелли)**. *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

**2. Нахождение решений систем линейных уравнений с квадратной матрицей**

**2.1. Теоретические сведения**

Прежде чем рассматривать системы общего вида, исследуем простейший класс систем (2),когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и $|A| \neq 0$.

**Теорема**. *СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу невырожденности матрицы $A$ для нее существует обратная матрица $A^{-1}$. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \tag{4}$$

является решением системы (2). Это решение единственно, так как если $y$ - другое решение системы (2), то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части этого тождества слева на $A^{-1}$, получим, что $x = y$. $\square$

**Правило Крамера.** Решение (4) может быть записано покомпонентно, если воспользоваться явным выражением для обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$.

Действительно, $x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b$ или, в соответствии с тем, что

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

компоненты вектора $x$ находятся как

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти соотношения при рассмотрении свойств определителя означают, что

$$x_i = |A_i|/|A|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4'}$$

где $A_i$ получается из матрицы $A$ заменой ее $i$-го столбца стол бцом свободных членов.

Формулы (4') называются *правилом Крамера.*

*Замечание.* Правило Крамера дает решение системы в явном виде и в некотором смысле носит алгоритмический характер. Однако правило Крамера полезно лишь в теоретических исследованиях и противопоказано для практического использования в приложениях. В самом деле, для решения систем $n$-го порядка по правилу Крамера требуется вычислить $(n+1)$ определителей $n$-го порядка, тогда как большинство современных методов решения систем по объему вычислений равносильны вычислению одного определителя.

**П р и м е р 1.** *Решить матричным способом (с помощью обратной матрицы)СЛАУ*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 & = & 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 & = & 2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 2. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Запишем систему в матричной форме $Ax = b$, где*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Так как $|A| = -3 \neq 0$, то для матрицы $A$ существует обратная матрица*

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

*и решение матричным способом находится по формуле (3). Итак*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**П р и м е р 2.** *Решить методом Крамера СЛАУ*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Так как определитель матрицы системы*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

*то можно применить формулы Крамера. Тогда*

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 14;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 21.$$

*По формулам (4’) находим решение СЛАУ:*

$$x_1 = |A_1|/|A| = -1; \quad x_2 = |A_2|/|A| = 2; \quad x_3 = |A_3|/|A| = 3.$$

### 2.2. Задание

Найти решение данной системы уравнений для двух различных столбцов свободных членов

а) матричным способом;

б) по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b_2, \\ 5x_1 + 3x_2 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0,$ б) $b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = 3.$

2. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = b_2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 2,\ b_2 = -2,\ b_3 = 1,$ б) $b_1 = 3,\ b_2 = 1,\ b_3 = 5.$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = b_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 3,$ б) $b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = -2.$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_1, \\ x_1 - 2x_2 = b_2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -3,\ b_2 = -2,\ b_3 = 4,$ б) $b_1 = -3,\ b_2 = 5,\ b_3 = 0.$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1, \\ 4x_1 - x_2 = b_2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -3,\ b_2 = 2,\ b_3 = 1,$ б) $b_1 = 7,\ b_2 = 3,\ b_3 = 0.$

6. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1, \\ -x_1 + 2x_2 = b_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -6,\ b_2 = -5,\ b_3 = 1,$ б) $b_1 = -11,\ b_2 = -2,\ b_3 = 11.$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b_2, \\ -x_2 + 2x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 7,\ b_2 = -6,\ b_3 = 5,$ б) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = -13.$

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = b_1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = b_2, \\ x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 8,\ b_2 = -8,\ b_3 = 4,$ б) $b_1 = -2,\ b_2 = 3,\ b_3 = -3.$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = b_1, \\ 4x_1 + 2x_2 = b_2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 9,\ b_2 = -4,\ b_3 = 2,$ б) $b_1 = 4,\ b_2 = 5,\ b_3 = 1.$

10. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ -2x_1 + 4x_3 = b_2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 11$, $b_2 = 5$, $b_3 = 4$, б) $b_1 = -3$, $b_2 = 2$, $b_3 = -2$.

11. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = b_1, \\ 2x_2 - x_3 = b_2, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 10$, $b_2 = -9$, $b_3 = -8$, б) $b_1 = -4$, $b_2 = 17$, $b_3 = 1$.

12. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = b_1, \\ 3x_1 + x_2 = b_2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 7$, $b_2 = 5$, $b_3 = -2$, б) $b_1 = -11$, $b_2 = -36$, $b_3 = 1$.

13. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = b_1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b_2, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 9$, $b_2 = -7$, $b_3 = 12$, б) $b_1 = -11$, $b_2 = 36$, $b_3 = 1$.

14. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ 2x_1 + 4x_2 = b_2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 23$, $b_2 = -5$, $b_3 = 21$, б) $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = 31$.

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = b_2, \\ -x_1 + 7x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 17$, $b_2 = -11$, $b_3 = 13$, б) $b_1 = 9$, $b_2 = 16$, $b_3 = -21$.

16. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b_1, \\ 9x_1 - 3x_2 = b_2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 14$, $b_2 = 14$, $b_3 = 14$, б) $b_1 = -6$, $b_2 = 13$, $b_3 = 1$.

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_1, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = b_2, \\ -x_1 - 2x_2 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 23$, $b_2 = -3$, $b_3 = -2$, б) $b_1 = 2$, $b_2 = -5$, $b_3 = 8$.

18. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = b_1, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 = b_2, \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -2$, $b_2 = 0$, $b_3 = -3$, б) $b_1 = -8$, $b_2 = 1$, $b_3 = 26$.

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1, \\ 2x_2 - 3x_3 = b_2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -4$, $b_2 = 1$, $b_3 = 15$, б) $b_1 = 0$, $b_2 = 7$, $b_3 = -10$.

$$20.\ \begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3 &= b_2, \\ 2x_1+7x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=30, \\ b_2=-9, \\ b_3=1, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-12, \\ b_2=-7, \\ b_3=0. \end{matrix}$$

$$21.\ \begin{cases} -x_1+2x_2 &= b_1, \\ -3x_1+2x_2+\ \ x_3 &= b_2, \\ x_1+2x_2+3x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=100, \\ b_2=-20, \\ b_3=5, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-1, \\ b_2=0, \\ b_3=41. \end{matrix}$$

$$22.\ \begin{cases} x_1+\ \ x_2-\ \ x_3 &= b_1, \\ 4x_1-3x_2+\ \ x_3 &= b_2, \\ 2x_2+\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=3, \\ b_2=-40, \\ b_3=5, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-70, \\ b_2=11, \\ b_3=1. \end{matrix}$$

$$23.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ x_1+\qquad\ \ x_3 &= b_2, \\ x_1-\ \ x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=27, \\ b_2=1, \\ b_3=-1, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-1, \\ b_2=19, \\ b_3=0. \end{matrix}$$

$$24.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ 3x_1-\ \ x_2 &= b_2, \\ x_1+2x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=37, \\ b_2=0, \\ b_3=2, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=3, \\ b_2=-5, \\ b_3=5. \end{matrix}$$

$$25.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ 3x_1-\ \ x_2 &= b_2, \\ x_1+2x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=37, \\ b_2=0, \\ b_3=2, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=3, \\ b_2=-5, \\ b_3=5. \end{matrix}$$

$$26.\ \begin{cases} 3x_1-4x_2+5x_3 &= b_1, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3 &= b_2, \\ 3x_1-5x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=-3, \\ b_2=-5, \\ b_3=2, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-10, \\ b_2=15, \\ b_3=10. \end{matrix}$$

$$27.\ \begin{cases} x_1+3x_2+3x_3 &= b_1, \\ 2x_1+\qquad\ \ x_3 &= b_2, \\ 2x_1+2x_2-3x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=4, \\ b_2=-12, \\ b_3=-4, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=1, \\ b_2=6, \\ b_3=5. \end{matrix}$$

$$28.\ \begin{cases} -x_1-\qquad 5x_3 &= b_1, \\ 5x_1+2x_2+2x_3 &= b_2, \\ 4x_1+2x_2 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=13, \\ b_2=-2, \\ b_3=-4, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-1, \\ b_2=6, \\ b_3=5. \end{matrix}$$

$$29.\ \begin{cases} 2x_1-2x_2 &= b_1, \\ x_1+5x_2+3x_3 &= b_2, \\ 5x_1+3x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=13, \\ b_2=9, \\ b_3=11, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-1, \\ b_2=0, \\ b_3=-3. \end{matrix}$$

$$30.\ \begin{cases} x_1+4x_2-2x_3 &= b_1, \\ 4x_1+2x_2+7x_3 &= b_2, \\ 3x_2-9x_3 &= b_3, \end{cases} \quad \text{а)}\ \begin{matrix} b_1=2, \\ b_2=-2, \\ b_3=9, \end{matrix} \quad \text{б)}\ \begin{matrix} b_1=-47, \\ b_2=1, \\ b_3=-12. \end{matrix}$$

### 3. Нахождение решений систем линейных уравнений общего вида

Пусть СЛАУ (1) совместна и $rgA = rgB = r$. Будем считать, что базисный минор матрицы $A$ находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

.

Рассмотрим укороченную систему из первых $r$ уравнений системы (1), т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = & b_r. \end{cases} \tag{5}$$

**Теорема**. *Укороченная система эквивалентна исходной системе.*

Если $r = n$, то система (5) имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей.

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называются *свободными*.

Запишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Решим систему (6) относительно главных неизвестных:

$$\begin{gathered} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2} \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{7}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_r$ – некоторые однозначно определенные из (6) функции.

Соотношения (7) при произвольных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы.* В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, где $c_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$ – известные числа, называется *частным решением.*

Для однородной системы линейных уравнений в случае, когда она имеет бесконечное множество решений, из всей их совокупности выделяют так называемую фундаментальную систему решений.

*Фундаментальной системой решений (ФСР)* называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

ФСР существует тогда и только тогда, когда $r < n$, и может быть найдена следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ следующие $n-r$ наборов решений: $(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения главных неизвестных. Тем самым найдем $n-r$ решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)^T, \\ e_2 & = & (c_{21}, c_{22}, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, 0, 0, \ldots, 1)^T. \end{array} \tag{8}$$

Совокупность решений (8) называется *нормальной фундаментальной системой решений*.

В общем случае свободным неизвестным придают $n-r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида $(c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}), \ldots, (c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,r+1} & \cdots & ca_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n-r$ линейно независимых решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n})^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})^T. \end{array}$$

Фундаментальная система решений $e_1, \ldots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Представление (9) решения называется *общим решением однородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений* (в отличие от общего решения (7) через свободные неизвестные).

**Связь между решениями однородной и неоднородной систем.**

Однородная система (3), полученная из системы (2) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (2).

Между решениями обеих систем существует тесная связь.

1. Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.

2. Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.

Найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (9) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$x = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $c$ – частное решение (2), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – ФСР (3). Представление (10) решения называется *общим решением неоднородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений.*

## 4. Метод Гаусса исследования и решения систем

### 4.1. Теоретические сведения

Для начала рассмотрим метод Гаусса приведения системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Мы не случайно выбрали это приведение. Для систем с верхней трапециевидной матрицей чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Пусть $B = [A|b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ – расширенная матрица системы (2).

Алгоритм этого метода заключается в следующем:

1. а) Элемент $a_{11}$ назовем *ведущим (главным)* элементом 1-го шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним ненулевые элементы 1-го столбца. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки матрицы $B$(столбцы матрицы $A$) так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

   б) Умножаем 1-ю строку матрицы $B$ последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots m$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента $a_{11}$.

   После выполнения 1-го шага матрица $B$ переходит в матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | \, b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & | \, \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | \ldots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & | \, \tilde{b}_m \end{pmatrix}.$$

   Если при этом все строки матрицы $A$, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, т.к. матрица уже приведена к верхней трапециевидной форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \neq O,$$

   то переходим ко 2-му шагу.

2. Этот шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & | \, \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & | \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & | \, \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

   описанного выше 1-го шага.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от 1-го шага ко 2-му. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большое через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат.

Итак, *исследование и решение систем линейных уравнений общего вида с использованием метода Гаусса проводится по следующей схеме:*

1. Система линейных уравнений (2) приводится к системе с верхней трапециевидной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right), \qquad (11)$$

   где $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$.

   При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы $A$, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

2. Устанавливается совместность системы с верхней трапециевидной матрицей (система с матрицей (11) совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$, т.е ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.).

3. Если $r = n$, то система система станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = & b_2, \\ \qquad\quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = & b_r \end{cases},$$

   которая имеет единственное решение. Найти его несложно: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (12)$$

   Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (12) с треугольной матрицей.

**П р и м е р 3.** *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 6. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

*и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Прибавив ко 2-й строке 1-ю, умноженную на (-2), и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-4), получим:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & -1 & 7 & -22 \end{array}\right).$$

*Из 3-й строки вычтем 2-ю:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

*Отсюда имеем $rgA = 2 \neq rgB = 3$ и согласно теореме Кронекера-Капелли система является несовместной.*

**П р и м е р 4.** *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= -6, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -3. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u> Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

*и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Чтобы не производить действий с дробями, вначале вычтем из 1-й строки 2-ю:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

*Умножим 1-ю строку на 3,7,5 и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & -3 & -18 & 21 & -12 & -27 \\ 0 & -2 & -12 & 14 & -8 & -18 \end{array}\right).$$

*Умножим 2-ю строку на (-3),(-2) и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Имеем* $rgA = rgB = 2$*, следовательно, система является совместной. Т.к.* $rgA = rgB = 2 <$ $n$*-числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.*

*Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных умножим 2-ю строку на (-1) и сложим с 1-й строкой:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Исходная система эквивалентна следующей:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x_1 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 & = & 6, \\ -x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5 & = & -9. \end{array}\right.$$

*В качестве главных неизвестных возьмем* $x_1,\ x_2$*, тогда свободными будут* $x_3, x_4, x_5$*. Выразим базисные переменные через свободные:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -6 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5, \\ x_2 & = & 9 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5. \end{array}\right.$$

*Следовательно, общее решение можно записать в виде*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+4c_1-5c_2+2c_3 \\ 9-6c_1+7c_2-4c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

*Если положить* $c_1 = -2, \ c_2 = -3, \ c_3 = 0$, *то получим частное решение*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**П р и м е р 5.** *Найти общее решение и ФСР для системы однородных линейных уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+\ \ x_3+2x_4+5x_5 &= 0, \\ 6x_1+5x_2+3x_3+4x_4+7x_5 &= 0, \\ 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+\qquad\ \ 2x_4+8x_5 &= 0. \end{cases}$$

*Решение.* *Выпишем матрицу системы (расширенную матрицу не имеет смысла выписывать, т.к. система однородная)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

*и с помощью метод Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Умножим 1-ю строку на (-2),(-3), (-1) и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Умножим 2-ю строку на (-2),1 и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Имеем* $rgA = 2 <$ $n$*-числа неизвестных, то система имеет нетривиальное решение.*

*Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных вычтем из 1-й строки 2-ю:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Исходная система эквивалентна следующей:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 8x_5 & = & 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 - 3x_5 & = & 0. \end{cases}$$

*В качестве главных неизвестных возьмем* $x_1,\ x_3$*, тогда свободными будут* $x_2, x_4, x_5$*. Выразим базисные переменные через свободные:*

$$\begin{cases} x_1 & = & -(4x_2 + 2x_4 + 8x_5)/3, \\ x_3 & = & x_2 + 3x_5. \end{cases}$$

*Следовательно, общее решение можно записать в виде*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4c_1 + 2c_2 + 8c_3)/3 \\ c_1 \\ c_1 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

*Найдем ФСР, которая состоит из трех векторов* $e_1, e_2, e_3$*, т.к.* $n - rgA = 5 - 2 = 3$*. Придадим свободным неизвестным значения* $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$*, получим*

$$e_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Полагая* $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0$*, получим*

$$e_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*И, наконец, считая* $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,$ *имеем*

$$e_3 = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Общее решение через ФСР можно записать теперь следующим образом*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

*В качестве частного решения можно взять один из векторов ФСР. Полученное частное решение можно использовать для проверки правильности решения. Подставив в каждое из уравнений исходной системы значения частного решения, убеждаемся, что они обращаются в верные равенства.*

### 4.2. Задание

**1.** Иследовать и решить систему с помощью метода Гаусса:

1) выяснить совместность системы;

2) указать ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы;

3) в случае совместной системы найти общее решение системы и, если множество решений бесконечно, то указать одно частное решение.

$$1.\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

$$6.\ \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$7.\ \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

8. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 4x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + \ \ 5x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1, \\ x_1 - \ \ 7x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 &= 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8, \\ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ x_5 &= 2, \\ 18x_1 + 20x_2 - 24x_3 + 29x_4 + 39x_5 &= 12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 &= 29, \\ 27x_1 + 24x_2 - 39x_3 + 47x_4 &= 55, \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 &= 115, \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 &= 50. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + \ \ 41x_5 &= 28, \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + \ \ 62x_5 &= 43, \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + \ \ 83x_5 &= 58, \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \ \ 4x_4 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \ \ 7x_4 &= 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - \ \ x_3 - \ \ 5x_4 &= 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + \ \ 4x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ \ 8x_4 &= 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 &= -11, \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + \ \ \ \ x_4 &= 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ 4x_4 &= 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ \ 6x_4 &= 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \ \ 8x_4 &= 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 4x_1 + \ \ 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 6x_1 + \ \ 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1, \\ 17x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15, \\ 6x_1 - \ \ 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 &= 10, \\ 12x_1 - 10x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 &= 6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ 4x_3 - \ \ 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 - \ \ 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \qquad \ \ 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5, \\ -x_1 + \ \ x_2 &= -2, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ -x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ \qquad - \ \ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 16x_1 + \ \ 6x_2 + 22x_3 - 10x_4 &= 14, \\ 56x_1 + 21x_2 + 77x_3 - 35x_4 + 195x_5 &= 49, \\ 40x_1 + 15x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 &= 35, \\ 8x_1 + \ \ 3x_2 + 11x_3 - \ \ 5x_4 &= 7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 &= 7, \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -4, \\ -x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 &= 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &= -3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 9x_1 + \ \ 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 18x_1 + 19x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 4, \\ 27x_1 + 29x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= 7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 17x_1 - 29x_2 - 36x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 22, \\ 34x_1 - 58x_2 - 72x_3 + 4x_4 - 6x_5 &= 44, \\ x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 &= -1, \\ 4x_1 + \ \ 5x_2 + \ \ 6x_3 &= -2, \\ 7x_1 + \ \ 8x_2 + \ \ 9x_3 &= -3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4-5x_5 &= 1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4+2x_5 &= -1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 2, \\ x_1-2x_2-6x_4 &= 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5 &= 5, \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5 &= 8, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+6x_4+10x_5 &= 7, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5 &= 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 9x_1+6x_2+11x_3+3x_4+5x_5 &= 4, \\ 6x_1+4x_2+2x_3+2x_4+5x_5 &= -4, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 &= -7, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5 &= 2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+8x_3-6x_4+4x_5 &= 9, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5 &= 4, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5 &= 11, \\ 3x_1+6x_2+9x_3-7x_4+4x_5 &= 17. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x_1+9x_2+4x_3+6x_4 &= 8, \\ 10x_1+15x_2+8x_3+10x_4 &= 12, \\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4 &= 6, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4 &= 5. \end{cases}$

**2.** Найти общее решение и ФСР для системы однородных линейных уравнений.

1. $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0.$

2. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5 &= 0, \\ 3x_1+13x_2+7x_3+2x_4+4x_5 &= 0, \\ 3x_1+9x_2+6x_3-8x_5 &= 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+7x_3+3x_4-x_5 &= 0, \\ 3x_1-10x_2-14x_3-5x_4-6x_5 &= 0, \\ 3x_1-2x_2-2x_3+6x_4+2x_5 &= 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5 &= 0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3+3x_4-2x_5 &= 0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3-x_4+2x_5 &= 0, \\ 2x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5 &= 0, \\ -x_1+2x_2+2x_3-x_4-x_5 &= 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + \quad + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 11x_2 - \quad 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + \quad 4x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + \quad x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -8x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 55x_1 + 33x_2 - 22x_3 + 11x_4 - 22x_5 = 0, \\ 65x_1 + 39x_2 - 26x_3 + 13x_4 - 26x_5 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + \quad 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 - \quad 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+3x_3+4x_4-x_5 = 0, \\ 2x_1+4x_2+x_3+2x_4-3x_5 = 0, \\ -2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4-5x_5 = 0, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4+x_5 = 0, \\ 4x_1+3x_2-9x_3-7x_4-9x_5 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ 5x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5 = 0, \\ -x_1+5x_2+x_3-3x_4-x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-4x_4+2x_5 = 0, \\ -6x_1+12x_2-3x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ -4x_1+8x_2-2x_3-2x_4+x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+5x_4+x_5 = 0, \\ -2x_1+3x_2+2x_3-x_4-5x_5 = 0, \\ -x_1+x_2+x_3+4x_4-4x_5 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5 = 0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5 = 0, \\ 2x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4+5x_5 = 0, \\ -x_1+x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_2+2x_3-5x_4+7x_5 = 0, \\ x_1+x_2+2x_3-2x_4+4x_5 = 0, \\ 3x_1+3x_2+2x_3-5x_4+7x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ -x_1-x_3+x_4+3x_5 = 0, \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4-x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5 = 0, \\ 2x_1+6x_2-5x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ 4x_1+9x_2-13x_3+4x_4-3x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ 6x_1-3x_2+3x_3+4x_4-x_5 = 0, \\ 4x_1-2x_2+3x_4-3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 = 0, \\ -3x_1+3x_2-4x_3+5x_4-x_5 = 0, \\ -2x_1+2x_2-3x_3+4x_4 = 0. \end{cases}$

30. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 14x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 28x_4 - 14x_5 = 0, \\ 22x_1 - 11x_2 + 11x_3 - 44x_4 - 22x_5 = 0. \end{cases}$$

**Список литературы**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.- 384.

Учебное издание

**Системы линейных уравнений**

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

САМАРА 2009

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

*Методические указания*

САМАРА 2009

Составители: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев.

УДК 512.8

**Линейные пространства:** Метод.указания/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. Самара, 2009. 52 с.

Содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделам "Линейные пространства"и "Евклидовы и унитарные пространства"курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены для студентов направлений 010500 - "Прикладная математика и информатика"и 010600 - "Прикладные математика и физика"в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Выполнены на кафедре прикладной математики.

Методические указания подготовлены при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также программы "Фундаментальные исследования и высшее образование"(BRHE).

Библиограф.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент Дегтярев А.А.

**Содержание**

## Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории линейных пространств. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных пространств.

Автор благодарит студентов факультета информатики Стрилец Т.С. и Силакову М.В. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

## 1. Линейные пространства
### 1.1 Понятие линейного пространства

Рассмотрим множества объектов любой природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определены операция сложения двух элементов и операция умножения на число элемента этого множества. Такие множества, называемые линейными пространствами, обладают целом рядом общих свойств, которые и будут установлены ниже.

Множество $\mathcal{L}$ элементов любой природы будем называть *линейным пространством*, если выполнены следующие требования.

I. Имеется правило, посредством которого $\forall x, y \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $z \in \mathcal{L}$, называемый *суммой* и обозначаемый $z = x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого $\forall x \in \mathcal{L}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ставится в соответствие элемент $u \in \mathcal{L}$, называемый *произведением элемента* $x$ *на число* $\lambda$ и обозначаемый $u = \lambda x$.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам: $\forall x, y, z \in \mathcal{L}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\exists \theta \in \mathcal{L} : x + \theta = x$;
4) $\forall x \ \exists x' \in \mathcal{L}$(противоположный элемент): $x + x' = \theta$;
5) $1 \cdot x = x$;
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Если число $\lambda \in \mathbb{R}$, то множество $\mathcal{L}$ называется вещественным линейным пространством. Если число $\lambda \in \mathbb{C}$, то множество $\mathcal{L}$ называется комплексным линейным пространством.

**Примеры линейных пространств.**

1. Множество функций $C_{[a,b]}$, определенных и непрерывных на $[a, b]$. Операции сложения таких функций и умножения их на вещественные числа определены обычными правилами математического анализа. Элементарно проверяется справедливость восьми аксиом, в частности, нулевым элементом является функция, тождественно равная нулю на отрезке $[a, b]$. Это позволяет заключить, что $C_{[a,b]}$ является линейным пространством.

2. Множество $P_n(x)$ алгебраических многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, с операциями, опеределенными так же, как в предыдущем примере. Заметим, что множество $P_n(x)$, если его рассматривать на отрезке $[a, b]$, является подмножеством линейного пространства $C_{[a,b]}$, рассмотренного в предыдущем примере.

**П р и м е р 1.** *Определить, является ли множество матриц* $M^{2\times 2}$ *вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, *где* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *линейным пространством?*

<u>*Решение.*</u>

*Пусть* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}$, *тогда*

$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 2 \end{pmatrix}$.

$C \notin M^{2\times 2}$, *следовательно, множество не является ни вещественным, ни комплексным линейным пространством.*

**П р и м е р 2.** *Определить, является ли множество матриц* $S^{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, *вещественным линейным пространством*?

<u>*Решение.*</u>

*Пусть* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$, *тогда*

$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times 2}$,

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times 2}$, *где* $\lambda \in \mathbb{R}$, *все 8 аксиом выполняются тоже, следовательно, множество матриц является вещественным линейным пространством.*

**Свойства линейного пространства**.

1. Любое линейное пространство имеет только один нулевой элемент.

2. Каждый элемент линейного пространства имеет только один противоположный элемент.

3. Если элемент $(-x)$ противоположен элементу $x$, то элемент $x$ является противоположным для $(-x)$.

4. Для любых двух элементов $a$ и $b$ уравнение $a + x = b$ относительно $x$ имеет решение, и притом единственное.
   *Разностью* двух элементов $b - a$ называется такой элемент $x$, который является решением уравнения $a + x = b$;

5. Произведение произвольного элемента линейного пространства на число 0 равно нулевому элементу: $0 \cdot x = \theta$.

6. Элемент, противоположный данному элементу $x$, равен произведению $x$ на число $-1$: $(-x) = (-1)x$.

7. Произведение нулевого элемента на любое число есть нулевой элемент: $\lambda\theta = \theta$.

### 1.2 Базис и размерность линейного пространства

**Линейно независимые и линейно зависимые системы элементов**. Рассмотрим произвольное линейное пространство $\mathcal{L}$ с элементами $x, y, \ldots, z$.

*Линейной комбинацией* элементов $x, y, \ldots, z$ пространства $\mathcal{L}$ мы будем называть сумму произведений этих элементов на произвольные числа, т.е. выражения вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, в зависимости от того, вещественное или комплексное пространство $\mathcal{L}$.

Элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация элементов $x, y, \ldots, z$ с указанными числами является нулевым элементом пространства $\mathcal{L}$, т.е. имеет место равенство

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z = \theta. \tag{1}$$

Элементы $x, y, \ldots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются *линейно независимыми*, если равенство (1) выполняется только при условии $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.*

**П р и м е р 3.** *Выяснить, является ли линейно независимой каждая из следующих систем элементов*:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*вещественнозначных матриц* ;

2) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$ *в пространстве* $C_{(-\infty,+\infty)}$ *вещественнозначных функций, непрерывных на* $[a, b]$?

*Решение.*

*1) Составим линейнейную комбинацию данных матриц*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

*Она равна нулевой матрице* $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *только в том случае, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *а это означает, что данная система матриц является линейно независимой.*

*2) Составим линейную комбинацию данных функций и приравняем ее к нулевому элементу (функции, тождественно равной нулю):*

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos 2x = \theta.$$

*Это равенство справедливо, например, при* $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = -1$, *следовательно, данная система элементов является линейно зависимой.*

**Свойства систем элементов**.

1. Если в системе элементов есть нулевой элемент, то эта система будет линейно зависимой.

2. Если подсистема элементов линейно зависимая, то вся система будет линейно зависимой.

3. Любая подсистема линейно независимой системы элементов линейно независимая.

4. Если система элементов $x, y, \ldots, z$ линейно независимая, а система элементов $x, y, \ldots, z, z'$ линейно зависимая, то $z'$ представляется в виде линейной комбинации элементов $x, y, \ldots, z$.

Система линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ называется *базисом пространства* $\mathcal{L}$, если для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ найдутся числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \tag{2}$$

При этом равенство (2) называется *разложением элемента $x$ по базису* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *координатами* элемента $x$ (относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Любой элемент $x \in \mathcal{L}$ может быть разложен по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ единственным образом, т.е. координаты любого элемента $x$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяются однозначно.

Значение базиса заключается также и в том, что операции сложения элементов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами – координатами этих элементов.

**Теорема 2.** *При сложении любых двух элементов линейного пространства $\mathcal{L}$ (относительно любого базиса пространства $\mathcal{L}$ ) их координаты складываются, а при умножении произвольного элемента на любое число $\lambda$ соответствующие координаты этого элемента умножаются на число $\lambda$.*

**Примеры базисов различных пространств**.

1. Для линейного пространства матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ базисом является, например, система элементов $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Для линейного пространства многочленов степени не выше двух базисом является, например, система элементов $1, x, x^2$. Координатами элемента $5 - x - x^2$ данного пространства в этом базисе будут $(x_1, x_2, x_3)^T = (5, -1, 1)^T$.

**П р и м е р 4.** *Определить, какая из следующих систем элементов является базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ векторов с вещественными коэффициентами:*

*1.* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

*2.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

*3.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

*4.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

*Решение.*

*Системы элементов 2, 4 являются базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$, т.к. эти системы линено независимые и любой элемент этого пространства представляется в виде линейной комбинации элементов одной из этих систем.*

*Системы элементов 1, 3 не являются базисом линейного пространства* $\mathbb{R}^3$*, т.к. система 3 является линейно зависимой, а через систему 1 нельзя представить в виде линейной комбинации любой элемент этого пространства.*

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *$n$-мерным*, если в нем существует линейно независимая система из $n$ элементов, а любая система из $n+1$ элементов линейно зависимая. При этом число $n$ называется *размерностью* пространства $\mathcal{L}$.

*Обозначение*: $\dim(\mathcal{L})$.

Линейное пространство $L$ называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

*Обозначение*: $\dim(L) = \infty$.

**Примеры размерностей линейных пространств.**

1. $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.
2. $\dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$.
3. $\dim(P_n(x)) = n + 1$.

**Теорема 3.** *Если $\mathcal{L}$ – линейное пространство размерности $n$, то в нём любая линейно независимая система из $n$ элементов образует базис.*

**Теорема 4.** *Если в пространстве $\mathcal{L}$ существует базис из $n$ элементов, то это пространство размерности $n$.*

### 1.3 Подпространства линейных пространств

Подмножество $\mathcal{L}'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется *линейным подпространством*, если выполняются для этого подмножества следующие требования:

I. Если $x, y \in \mathcal{L}'$, то $x + y \in \mathcal{L}'$.

II. Если $x \in \mathcal{L}', \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\lambda x \in \mathcal{L}'$.

**Теорема 5**. *Линейное подпространство само является линейным пространством.*

Рассмотрим для линейного пространства $\mathcal{L}$ линейные подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство $\{\theta\}$. Эти два подпространства называются *несобственными*, а все остальные *собственными*.

**Примеры линейных подпространств.**

1. В линейном пространствеа $V_3$ свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют:

   а) все векторы, параллельные данной плоскости;

   б) все векторы, параллельные данной прямой.

2. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений от $n$ переменных можно рассматривать как вектор в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Множествотаких векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

**Понятие линейной оболочки**.

Рассмотрим элементы $x, y, \dots, z \in \mathcal{L}$. *Линейной оболочкой* элементов $x, y, \dots, z$ будем называть совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество элементов вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

*Обозначение*: $L(x, y, \dots, z)$.

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой элементов своего базиса.

Например, линейное подпространство, заданное однородной системой уравнений, является линейной оболочкой фундаментальной системы решений (ФСР).

Линейная оболочка произвольных элементов $x, y, \dots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$, очевидно, является подпространством основного линейного пространства $\mathcal{L}$.

**П р и м е р 5.** *Являются ли каждое подмножество линейного пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ линейным подпространством:*

*а) множество симметричных матриц;*

*б) множество вырожденных матриц?*

*Решение.*

*а) сумма симметричных матриц есть симметричная матрица; при умножении симметричной матрицы на число получаем также симметричную матрицу, следовательно, множество симметричных матриц является линейным подпространством.*

*б) рассмотрим сумму вырожденных матриц:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

*полученная матрица невырожденная (*$\det \neq 0$*). Следовательно, множество вырожденных матриц не является линейным подпространством.*

**Теорема 6 (о монотонности размерности)**. *Размерность любого подпространства $\mathcal{L}'$ $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ не превосходит размерности $n$ пространства $\mathcal{L}$. Если размерности линейного пространства и линейного подпространства совпадают, то подпространство совпадает с пространством.*

**Теорема 7**. *Если система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является базисом $k$-мерного подпространства $\mathcal{L}'$ $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$, то этот базис можно дополнить элементами $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ так, что система $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ будет являться базисом всего пространства $\mathcal{L}$.*

**Теорема 8 (о размерности линейной оболочки)**. *Размерность линейной оболочки $\dim(L(x, y, \ldots, z))$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе $x, y, \ldots, z$. В частности, если система $x, y, \ldots, z$- линейно независимая, то размерность линейной оболочки системы $x, y, \ldots, z$ равна числу элементов в этой системе, а сами элементы $x, y, \ldots, z$ образуют базис линейной оболочки.*

*Рангом системы элементов* в линейном пространстве называют размерность линейной оболочки этой системы элементов.

Если в качестве системы элементов рассматривать строки (столбцы) матрицы, то получим следующее определение ранга матрицы: *ранг матрицы*- максимальное число линейно независимых строк(столбцов) матрицы.

**Сумма и пересечение подпространств**.

Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ – линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. *Суммой подпространств* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество всевозможных элементов $x$, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \tag{3}$$

где $x_i \in \mathcal{L}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$.

*Обозначение*: $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_k$.

Представление (3) элемента $x$ называется *разложением элемента $x$ по подпространствам* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$.

*Пересечением подпространств* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in \mathcal{L} | x_i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

*Замечание*. Пересечение подпространств не может быть пустым множеством, т.к. всегда содержит нулевой элемент $\theta$ пространства.

**Примеры суммы и пересечения линейных подпространств.**

Пусть $V_3$ – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXY$.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXZ$.

$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ – все пространство $V_3$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ – множество векторов, параллельных оси OX.

**Теорема 9**. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ являются линейными подпространствами пространства $\mathcal{L}$.*

**Теорема 10**. *Для любых линейных подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство:*

$$\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2).$$

**Прямая сумма подпространств**.

Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение в ней по слагаемым подпространства единственно.

*Обозначение*: $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_k$.

**Пример прямой суммы линейных подпространств.**

Пусть $V_3$ – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных оси $OY$.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости $OXZ$.

$L_1 \oplus L_2 = V_3$.

**Теорема 11**. *Для того чтобы n-мерное пространство $\mathcal{L}$ представляло собой прямую сумму подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ достаточно, чтобы пересечение $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$ и чтобы* $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(L_2)$.

### 1.4 Преобразование координат при преобразовании базиса

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $\dim \mathcal{L} = n$.

Выясним, как меняются координаты элемента при переходе от базиса $e$ к $e'$. Так как элементы базиса $e'$ являются элементами линейного пространства $\mathcal{L}$, то каждый из них можно разложить по базису $e$.

$$\begin{array}{c} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array} \tag{4}$$

Коэффициенты $a_{ij}$ в равенстве (4) образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\,n\times n}$, которая называется *матрицей перехода* от базиса $e$ к $e'$.

*Обозначение*: $P_{e\to e'}$.

Равенства (4) в матричном виде могут быть записаны : $e' = eP_{e\to e'}$.

**Теорема 12**. *Матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.*

**Теорема 13**. *Координаты элемента $x$ в базисах $e$ и $e'$ связаны между собой следующим образом:*

$$x_e = P_{e\to e'}x_{e'}.$$

**П р и м е р 6.** *В линейном пространстве многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами заданы два базиса:*
$e: e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2;$
$e': e'_1 = 1, \quad e'_2 = x - 1, \quad e'_3 = (x-1)^2$. *Найти* $P_{e\to e'}$.

<u>*Решение.*</u>
$1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$
$x - 1 = -1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$
$(x-1)^2 = 1\cdot e_1 - 2\cdot e_2 + 1\cdot e_3. \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**П р и м е р 7.** *Найти координаты элемента $x$ в базисе $e'$, если* $x_e = 3e_1 - 2e_2; \quad e'_1 = 5e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = e_1 + e_2.$

<u>*Решение.*</u>
$x_{e'} = P^{-1}_{e\to e'}x_e; \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \; P^{-1}_{e\to e'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$
$x_{e'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \end{pmatrix}.$

## 2. Евклидовы пространства

### 2.1 Понятие вещественного евклидова пространства

Вещественное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *вещественным евклидовым пространством*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства $\forall x, y \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом $(x, y)$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{E}$ и $\forall \in \mathbb{R}$

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

**Пример вещественного евклидова пространства.**

Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C_{[a,b]}$, где скалярное произведение задано:

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**П р и м е р 8.** *Является ли вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ вещественным евклидовым пространством, если паре векторов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ поставлено в соответствие число:*
$(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2$.

*Решение.* *Проверяем выполнение четырех аксиом:*

*1.* $(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2 = y_1 y_2 x_1 x_2 = (y, x)$;

*2.* $(x + y, z) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)z_1 z_2 \neq (x, z) + (y, z)$.

*вторая аксиома не выполняестся, следовательно, данное вещественное пространство не является вещественным евклидовым пространством.*

**Свойства скалярного произведения**.

1) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
2) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x, \theta) = 0$;
4) $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y),\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$;
5) если $x, y \in \mathcal{E}$ такие, что $\forall z \in \mathcal{E}$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

**Теорема 14. (Неравенство Коши-Буняковского)**. $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

**Основные метрические понятия**.
*Длиной* элемента $x$ евклидова пространства, будем называть арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого элемента.
*Обозначение*: $|x|$.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из аксиом скалярного произведения вытекают следующие факты:

- Любой элемент $x \in \mathcal{E}$ имеет длину, при этом
  $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad$ и $\quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|\,, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

В новой терминологии неравенство Коши-Буняковского может быть записано следующим образом:

$$|(x, y)| \leq |x||y|.$$

Элемент, длина которого равна единице, называется *нормированным.*
Любой ненулевой элемент можно нормировать, поделив его на длину.

**Теорема 15**. В евклидовом пространстве $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливы следующие неравенства (неравенства треугольника)*

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

*Углом* в вещественном евклидовом пространстве будем называть угол $\varphi \in (0; \pi]$, который определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}} = \frac{(x, y)}{|x|\,|y|}. \tag{5}$$

Корректность определения следует из неравенства Коши-Буняковского.

**П р и м е р 9.** *Найти в евклидовом пространстве непрерывных на [0;1] вещественно-значных функций $C_{[0,1]}$:*

*1) длину элемента $f(x) = x$;*

*2) скалярное произведение $f(x) = x$; $g(x) = e^x$;*

*3) угол между элементами $g(x) = x$ и $f(x) = 1$,*

*если скалярное произведение задано следующим образом: $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.*

*Решение.*

1. $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$, $\quad |f(x)| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{cc} e^x dx = dv & v = e^x \\ u = x & du = dx \end{array} \right\} = xe^x|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = (xe^x - e^x)|_0^1 = e^x(x-1)|_0^1 = 1.$

3. *Воспользуемся формулой (5).*

- $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$;
- $(g(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$; $\quad \sqrt{(g(x), g(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 dx = x|_0^1 = 1$; $\quad \sqrt{(f(x), f(x))} = 1$;

$$\cos\varphi = \frac{(f(x), g(x))}{\sqrt{(f(x), f(x))}\sqrt{(g(x), g(x))}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = 30^\circ.$$

### 2.2 Ортогональные и ортонормированные базисы

Элементы $x, y \in \mathcal{E}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю $(x, y) = 0$.

Согласно свойству скалярного умножения нулевой элемент ортогонален любому элементу.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортогональной*, если выполняется $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Систему, состоящую из одного элемента, будем считать ортогональной.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = 0,\ \ i \neq j;$$
$$(e_i, e_j) = 1,\ \ i = j.$$

**Теорема 16**. *Ортогональная система ненулевых элементов является линейно независимой.*

**Следствие**. Ортонормированная система элементов является линейно независимой.

Так как евклидово пространство является линейным пространством, то правомерно говорить о размерности и базисах этого пространства. Евклидово пространство может быть конечномерным и бесконечномерным.

Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему элементов, то этот *базис* называют *ортогональным.*

Если в линейном пространстве все базисы равноправны, то в евклидовом пространстве наличие скалярного произведения позволяет выделить ортогональный и ортонормированный базисы, которые более удобны и играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли декартовой прямоугольной системы координат в аналитической геометрии.

**Теорема 17**. *Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $\mathcal{E}_n$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Рассматриваемое доказательство носит название *ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – произвольный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_n$.

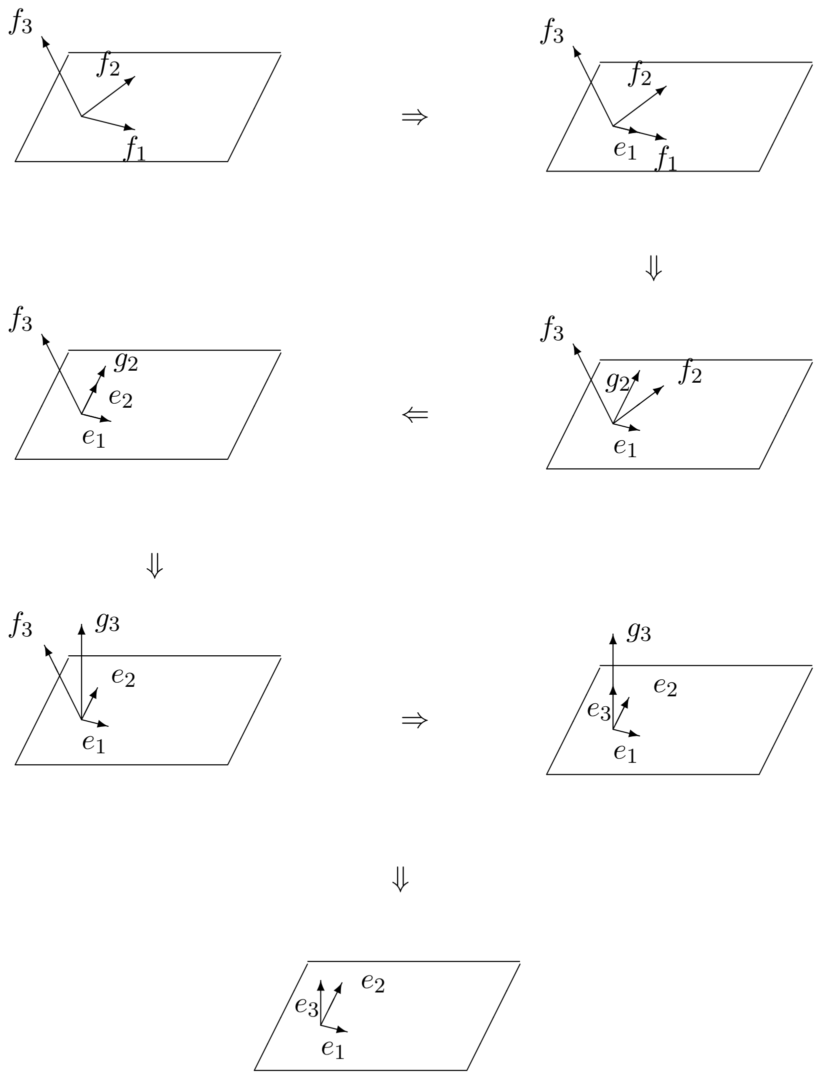
Модифицируя этот базис, мы будем строить новый $e_1, e_2, \ldots, e_n$, который будет ортонормированным.

Введем дополнительно систему элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1, \quad \ldots, \quad g_n = f_n - (f_n, e_1)e_1 - \ldots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}, \ldots\ , e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

Рассмотрим пример при $n = 3$.




Для обоснования алгоритма нужно показать, что ни один из последовательно вычисленных элементов $g_i$ не является нулевым (иначе процесс оборвался бы преждевременно) и что все элементы $g_i$ попарно отогональны.

Тогда и элементы $e_i$ образуют ортогональную систему, но при этом длина каждого из них равна единице.

Ортогональная система из $n$ ненулевых элементов согласно теореме 14 линейно независимая и поэтому в $n$-мерном евклидовом пространстве является базисом.

Докажем по методу математической индукции.

1. Докажем для $n = 1$.

   $g_1 \neq 0$, т.к. $g_1 = f_1$, то систему, состоящую из одного элемента, считают ортогональной.

2. Пусть выполняется при $n = k$.

3. Докажем для $n = k + 1$.

Вычислим новый элемент $g_{k+1}$ по формуле

$$g_{k+1} = f_{k+1} - (f_{k+1}, e_1)e_1 - \ldots - (f_{k+1}, e_k)e_k. \qquad (*)$$

Предположив, что $g_{k+1} = \theta$, получим, что

$$f_{k+1} = (f_{k+1}, e_1)e_1 + \ldots + (f_{k+1}, e_k)e_k,$$

т.е. элемент $f_{k+1}$ является линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, которые выражаются через $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Следовательно, $f_{k+1}$ является линейной комбинацией $f_1, f_2, \ldots, f_k$, а следовательно, система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ линейно зависимая. Но это противоречит условию линейной независимости системы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Итак, предположение о том, что $g_{k+1} = \theta$, привело к противоречию.

Покажем, что элемент $g_{k+1}$ ортогонален каждому из элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Умножим скалярно (*) на $e_i$, где $i \leq k$. Учитывая, что элементы $e_1, e_2 \ldots e_k$ образуют ортонормированную систему, получим:

$$(g_{k+1}, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i)(e_i, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i) = 0,$$

Следовательно, элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_{k+1}$, где $e_{k+1} = \frac{g_{k+1}}{|g_{k+1}|}$, образуют ортонормированную систему. □

В вычислениях удобны формулы, где сначала последовательно вычисляются элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$, а затем проводится их нормировка, приводящая к элементам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ :

$$g_1 = f_1; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)g_1}{(g_1, g_1)}; \quad \ldots \quad ; g_n = f_n - \frac{(f_n, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} - \ldots - \frac{(f_n, g_{n-1})g_{n-1}}{(g_{n-1}, g_{n-1})};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}; \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}; \quad \ldots \quad ; e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

**П р и м е р 10.** *В евклидовом пространстве дан базис:*

$$f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad f_2 = (1, 1, 1)^T; \quad f_3 = (0, 2, 3)^T.$$

*По этому базису построить ортонормированный базис. Скалярное произведение задано стандартным образом*

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

*Решение.*

$$g_1 = f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1) g_1}{(g_1, g_1)} = \frac{1}{7}(-2, 4, 1)^T;$$

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1) g_1}{(g_1, g_1)} - \frac{(f_3, g_2) g_2}{(g_2, g_2)} = \frac{1}{3}(-2, -2, 4)^T;$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, 2)^T; \quad e_2 = \frac{7}{\sqrt{21}}(-2, 4, 1)^T; \quad e_3 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(-2, -2, 4)^T.$$

### 2.3 Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей

Пусть $x, y \in \mathcal{E}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис этого пространства, $x, y$ в этом базисе представляются:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n,$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j). \tag{6}$$

В матричном виде (6) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, \Gamma_e \, [y]_e \,, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \text{ – матрица Грама.}$$

Матрица Грама является симметричной: $\Gamma_e = \Gamma_e^T$.

Если базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный, то $\Gamma_e = E$, а (7) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, [y]_e$$

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $P_{e \to e'} = (a_{ij})$ – матрица перехода, $\Gamma_{e'} = (g'_{ij})$ – матрица Грама.

Согласно определению матрицы перехода:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k.$$

Тогда элемент матрицы *Грама* представим в виде:

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} (e_k, e_l).$$

В матричной записи это эквивалентно:

$$\Gamma_{e'} = P^T_{e \to e'} \Gamma_e P_{e \to e'}.$$

**Теорема 18**. *Система элементов* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{E}$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы* Грама *этой системы равен нулю:*

$$det \Gamma_a = 0.$$

**Теорема 19**. *Определитель матрицы* Грама *любого базиса положителен.*

**П р и м е р 11.** *Дано вещественное евклидово пространство, где скалярное произведение задано следующим образом:*

$$(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

*Вычислить матрицу Грама* $\Gamma_e$ *стандартного базиса*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*и матрицу Грама* $\Gamma_f$, *базиса* $f$:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

1. *Вычислим матрицу Грама, воспользовавшись формулой:*

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

*2. Найдем $\Gamma_f$ двумя способами:*

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = P_{e\to f}^T \Gamma_e P_{e\to f}$$

*$P_{e\to f}$ – это координаты базиса $f$ в базисе е выписанные по столбцам:*

$$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

### 2.4 Ортогональная матрица

Квадратная матрица $Q$ называется *ортогональной*, если она удовлетворяет условию

$$Q^T Q = E.$$

**Примеры ортогональных матриц.**

1. Единичная матрица $E$.
2. Матрица Гивенса (вращения) $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

**Свойства ортогональной матрицы**.

- $\det Q = \pm 1$.
- $Q^{-1} = Q^T$.
- Если $Q$ – ортогональная, то $Q^T$ – тоже ортогональная матрица.
- $QQ^T = E$.
- Пусть $Q_1, Q_2$ – ортогональные матрицы одного порядка, тогда $Q_1 Q_2$ – ортогональная матрица.
- Пусть $Q$ – ортогональная, тогда $Q^{-1}$ – тоже ортогональная матрица.

Если матрица ортогональная, то удобно находить к ней обратную, например

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

### 2.5 Ортогональное дополнение

Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$. Элемент $x \in \mathcal{E}$ *ортогонален к линейному подпространству* $\mathcal{H}$, если $x$ ортогонален любому элементу $y \in \mathcal{H}$.

Множество элементов из вещественного линейного евклидова пространства ортогональных линейному подпространству $\mathcal{H}$ называется *ортогональным дополнением* $\mathcal{H}^{\perp}$.

**Теорема 20**. *Ортогональное дополнение $\mathcal{H}^{\perp}$ является линейным подпространством.*

**Теорема 21**. *Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, тогда*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{E}.$$

**Следствие.** Если $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, то для любого $f \in \mathcal{E}$ существует и при том единственное разложение

$$f = g + h. \tag{8}$$

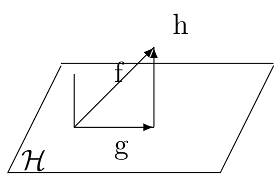
где $g \in \mathcal{H}, \quad h \in \mathcal{H}^{\perp}$.

В разложении (8)

$g$ – ортогональная проекция элемента $f$ на подпространство $\mathcal{H}$;

$h$ – ортогональная составляющая элемента $f$.

Нахождение разложения (8) называется *задачей о перпендикуляре*. Этот термин заимствован из геометрии. Чтобы получить разложение геометрического вектора, достаточно опустить перпендикуляр из конца вектора $f$ на плоскость.



Имея ввиду эту аналогию, называют

$f$ – наклонной к подпространству $\mathcal{H}$;

$h$ – перпендикуляром, опущенным на подпространство $\mathcal{H}$.

Аналогия с геометрическими векторами состоит не только в названии. Отметим несколько тех свойств $g$ и $h$ в разложении (8), которые имеют место и в геометрии т.к.

$$(f,f) = (g+h, g+h) = (g,g) + (h,h),$$

то

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2\,. \tag{9}$$

$$|h| \le |f|.$$

Последнее неравенство свидетельствует о том, что длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной. Равенство (9) называется *теоремой Пифагора в евклидовом пространстве*

**П р и м е р 12.** *В евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением построить $L^\perp$ для подпространства $L(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $\ a_2 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T$.*

*Решение.*

*Пусть $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$ – элемент ортогонального дополнения.*

*Система линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

*определяет ортогональное дополнение.*

*Найдем ФСР данной системы:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4; \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

$$X^* = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad c_1^2 + c_2^2 \ne 0.$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \ L^\perp: \ L(e_1, e_2).$$

**П р и м е р 13.** *Найти ортогональную проекцию* $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ *на подпространство* $L(b_1, b_2)$, *где* $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Решение.*

$$f = g + h; \quad g = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2;$$
$$f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + h.$$

*Умножаем последнее равенство скалярно, сначала на* $b_1$, *затем на* $b_2$. *Учитывая, что* $(b_1, h) = 0, \quad (b_2, h) = 0$ *, так как они ортогональны, получаем*

$$\begin{cases} (b_1, f) = \alpha_1(b_1, b_1) + \alpha_2(b_1, b_2), \\ (b_2, f) = \alpha_1(b_2, b_1) + \alpha_2(b_2, b_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2, \\ 9 = -3\alpha_1 + 6\alpha_2; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3.$$

$$g = 3b_1 + 3b_2; \quad g = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### 2.6 Понятие унитарного пространства

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого двум элементам $x, y \in \mathcal{U}$ ставится в соответствие комплексное число называемое скалярным произведением и обозначаемое символом $(x, y)$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{U}, \quad \forall \lambda \in$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ .

**Примеры комплексных евклидовых пространств.**

1. Множество комплексно-значных функций $C^*_{[a,b]} : z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t),\ \ y(t)$ – вещественно-значные функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$.

   Операции сложения этих функций и умножения их на комплексные числа заимствуем из анализа. Скалярное произведение двух любых таких функций определим соотношением
$$(z_1(t), z_2(t)) = \int_a^b z_1(t)\overline{z_2(t)}dt.$$

2. Множество вектор-столбцов с комплексными координатами
$$x, y \in \mathbb{C}^n,\ \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

   Скалярное произведение введено следующим образом
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

**П р и м е р 14.** *Можно ли в унитарном пространстве квадратных матриц 2-ого порядка ввести скалярное произведение по формуле* $(A, B) = a_1\overline{a_2} - b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} - d_1\overline{d_2}$, *где* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$?

*<u>Решение.</u> Проверим четвертую аксиому.* $(A, A) = a_1\overline{a_1} - b_1\overline{b_1} + c_1\overline{c_1} - d_1\overline{d_1}$. *Неравенство* $(A, A) \geq 0$ *выполняется только тогда, когда* $|a_1|^2 + |c_1|^2 \geq |b_1|^2 + |d_1|^2$. *Следовательно, ввести скалярное произведение по данной формуле нельзя.*

**Свойства скалярного произведения**.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
2. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.
3. $(x, \theta) = 0$.
4. $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y),\ \ \alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n.$
5. Если $x, y \in \mathcal{U} : \forall z \in \mathcal{U}$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

**Теорема 22 (Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве)**. *Для* $\forall x, y \in \mathcal{U}$ *справедливо следующее неравенство*
$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Длина в унитарном пространстве вводится таким же образом как в вещественном евклидовом пространстве: $|x| = \sqrt{(x,x)}$. Понятие угла в унитарном пространстве вводить не имеет смысла, т.к. $(x,y) \in \mathbb{C}$.

Понятие ортогонального и ортонормированного базиса, процесс ортогонализации системы элементов, понятие ортогонального дополнения, ортогональной проекции элемента на подпространство без изменения определений и общих схем рассуждений переносится на унитарное пространство.

### 2.7 Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей в унитарном пространстве

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ задан некоторый базис $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Рассмотрим $x, y \in \mathcal{U}$, $\quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$,

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j(e_i,e_j). \tag{10}$$

Формула (10) в матричном виде запишется следующим образом:

$$(x,y) = [x]_e^T \Gamma_e [\bar{y}]_e,$$

где $\Gamma_e$ – матрица Грама

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \ldots & (e_1,e_n) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \ldots & (e_2,e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & \ldots & (e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_e = E$ и

$$(x,y) = [x]_e^T [\bar{y}]_e.$$

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ даны два базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, тогда справедлива формула:

$$\Gamma_{e'} = P^T_{e\to e'} \Gamma_e \bar{P}_{e\to e'}.$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_{e'} = P^T_{e\to e'} \bar{P}_{e\to e'}$.

**П р и м е р 15.** *Векторы $x, y \in \mathcal{U}$, унитарного пространства заданы в базисе $e_1, e_2$ координатными столбцами $[x]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$, $[y]_e = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}^T$, соответственно, и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $f_1 = e_1 + ie_2$, $\quad f_2 = -3ie_1 + 4e_2$. Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $e_1, e_2$ и скалярное произведение $(x,y)$.*

Решение.

$$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & 4 \end{pmatrix}; \quad P_{f\to e} = P^{-1}_{e\to f} = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ -i & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_e = P^T_{f\to e}\Gamma_f \bar{P}_{f\to e};$$

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} 4 & -i \\ 3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(x, y) = [x]^T_e \Gamma_e [\bar{y}]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 3i.$$

### 2.8 Унитарная матрица

Матрица $R$ называется *унитарной*, если выполняется равенство

$$\bar{R}^T R = E.$$

**Свойства унитарной матрицы**:

1. $\det R = \pm 1$.

2. $\bar{R}^T = R^{-1}$.

3. Если $R$ – унитарная матрица, то $\bar{R}^T$ – тоже унитарная матрица.

4. $R\bar{R}^T = E$.

5. Если $R_1$ и $R_2$ – унитарные матрицы, то $R_1 R_2$ – унитарная матрица.

6. Если $R$ – унитарная матрица, то $R^{-1}$ – тоже унитарная матрица.

**Варианты индивидуальных заданий**

**Вариант 1**

1. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество $\mathbb{C}^{2\times 2}$ всех комплексных матриц второго порядка.

2. Образуют ли базис в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матвиц второго порядка элементы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и если образуют, то найти в указанном базисе координаты элемента

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \mathrm{tr} XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису $\mathbf{e_1} = (1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{e_2} = (0,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{e_3} = (2,\ -1,\ 0)$ построить ортонормированный базис.

6. Найти длину вектора $\mathbf{x} = (1,\ i)$ с заданным скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (1,\ -i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (1,\ -1)$.

**Вариант 2**

1. Является ли множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов $1 + 3x + 5x^2,\ 2x + 6x^2,\ 1 + x + x^2$, и если образует, то найти в указанном базисе координаты элемента $1 + x + 3x^2$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1 x_2 y_1 y_2$;

б) $3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2$?

5. Является ли ортогональным базисом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

а) $(0,\ 1,\ 0),\ (-6,\ 0,\ 4)$;

б) $(2,\ 1, 4),\ (3,\ 0,\ 5)$;

в) $(-1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 5,\ 0),\ (0,\ 0,\ 9)$;

г) $(1,\ 1,\ 3),\ (-1,\ -2,\ 1),\ (7,\ -4,\ -1)$.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1,\ i),\ (2i,\ 1),\ \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ i)$.

**Вариант 3**

1. Является ли множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3) | a_i \in \mathbb{R})\}$ данная система векторов:

а) $(1,\ 2, 7),\ (0,\ 3,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)$;

б) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0)$;

в) $(3,\ 0,\ 5),\ (1,\ 2, 1)$;

г) $(1,\ 2, 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (-1,\ 7,\ 2),\ (3,\ 4,\ 6)$.

3. В пространстве $V_3$ найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к базису:

а) $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ -\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{j},\ \mathbf{i},\ \mathbf{k}$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x = \alpha_1 + \beta_1 i;\ y = \alpha_2 + \beta_2 i$ поставлено в соответствие число $\beta_1 \cdot \beta_2$?

5. Установить, образуют ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(-1,\ 3),\ (6,\ 2),\ n=2$;

б) $(5,\ 1),\ (3,\ -1),\ n=2$;

в) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 7,\ 0),\ (0,\ 0,\ 2),\ n=3$;

г) $(0,\ 0,\ 0,\ 5),\ (0,\ 0{,}1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 0),\ n=4$;

д) $(-2,\ 3,\ 0,\ 0),\ (3,\ 2,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 2{,}5,\ 0),\ n=4$.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1+i,\ i),\ (1,\ 1-i),\ \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$.

7. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ 3,\ -1,\ 1)$.

**Вариант 4**

1. Является ли множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A=(a_{ij})(a_{ij}\in\mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ к базису $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x=\alpha_1+\beta_1 i;\ y=\alpha_2+\beta_2 i$ поставлено в соответствие число $(\alpha_1+\beta_1 i)(\overline{\alpha_2+\beta_2 i})=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1=(1,\ -1,\ 2,\ 0)$, $\mathbf{g}_2=(-1,\ 1,\ 1,\ 3)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1+i,\ 3),\ (1+2i,\ 6+2i),\ \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - \qquad 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 5**

1. Является ли множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij}), (a_{ij} \in \mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. В пространстве $P_2(x)$ найти матрицу перехода от базиса $x^2,\ x,\ 1,$ к базису $(x+1)^2,\ (x+1),\ 1.$

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{g}_2 = (1,\ 1,\ -1,\ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(i,\ 2),\ (1+i,\ 3),\ \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (2+i,\ 0,\ 2-i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (-1,\ i,\ 1+i)$.

**Вариант 6**

1. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

а) множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$;

б) множество функций, неотрицательных на $[a, b]$.

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов:

а) $1,\ x,\ x^2$; б) $3,\ x-2,\ x+1$; в) $1,\ (x-2),\ (x-2)^2$;

г) $3x+3,\ x^2-1,\ x^2+3x+2$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a},\mathbf{b}$ к базису $\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$; $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ поставлено в соответствие число:

а) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n)$; б) $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$?

5. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-1,1]$ ( операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$:

а) $1,\ x^2$; б) $x^2,\ x^3$; в) $1,\ \sin\pi x,\ \cos\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x,\ldots,\ \sin n\pi x,\ \cos n\pi x$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1,x_2$ и $y_1,y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y)=2x_1\bar{y}_1+(1+i)x_1\bar{y}_2+(1-i)x_2\bar{y}_1+3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1=(1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2=(1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(i,\ 1,\ 1+i)$.

**Вариант 7**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами:

а) степени не выше $n$; б) степени $n$; в) степени выше $n$?

2. Выяснить, является ли базисом система элементов в линейном пространстве $P_n(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше $n$:

а) $2x+3,\ x-1,\ n=1$; б) $x^3-2x^2+2,\ x^2+5,\ 5,\ n=3$?

3. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$. Найти координаты вектора:
а) $\mathbf{e}_2'$ в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$; б) $\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$.

4. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k\cos kx+b_k\sin kx$, где $k\in\mathbb{N}$, $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, если каждой паре функций $a_n\cos nx+b_n\sin nx,\ a_m\cos mx+b_m\sin mx$ поставлено в соответствие число

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)(a_m\cos mx+b_m\sin mx)dx?$$

5. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n=5$;

б) $(1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n=5$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-1,\ 1+i)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ i,\ 1)$, $(i,\ 1,\ 0)$.

**Вариант 8**

1. Является ли множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц размеров $m\times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ -1)^T$, $\mathbf{b} = (1\ -1)^T$, $\mathbf{c} = (1\ -1)^T$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Пусть $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – базис $n$-мерного линейного комплексного пространства. Является ли данное пространство унитарным, если каждой паре векторов $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n$ этого пространства поставлено в соответствие число $\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3)$; $\mathbf{g_2} = (0,\ 3,\ -2)$; $\mathbf{g_3} = (0,\ 1,\ -1)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти:

а) длину вектора $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$;

б) скалярное произведение векторов $(i,\ i,\ i, \ldots,\ i)$ и $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 \qquad\quad = 0, \\ x_1 - 3x_2 - \qquad\ \ 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 9**

1. Пусть $\mathbb{R}^{1\times 2}$- множество всех вещественных матриц вида $(a_1\ a_2)$. Является ли это множество вещественным линейным пространством, если операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством: $\alpha(a_1\ , a_2) = (a_1\ \alpha a_2)$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов $(1-t)^3,\ t^3,\ 1,\ t+t^2$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_2,\ \mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;

б) $9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{g_2} = (0,\ 2,\ 0),\ \mathbf{g_3} = (0,\ 0,\ 3)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением выяснить, являются ли ортогональными векторы:

а) $(i,\ 2,\ i),\ (i,\ -1,\ i)$;

б) $(1-i,\ 2,\ i),\ (3,\ 2-i,\ i)$;

в) $(3+i,\ 2,\ i),\ (-3+5i,\ 18,\ 11)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора
$\mathbf{x} = (2+i,\ i,\ 2-i)$ на линейную оболочку векторов
$\mathbf{a}_1 = (1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (i,\ 0,\ -i)$.

**Вариант 10**

1. Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество положительных чисел, в котором операция сложения определена равенством $x + y = xy$, а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством $\alpha x = x^\alpha$. Является ли множество $\mathbb{R}^+$ с указанными операциями вещественным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ \ -1)^T,\ \mathbf{b} = (-1\ 1)^T,\ \mathbf{c} = (2\ \ -2)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\ \mathbf{x} = \mathbf{e}'_1 - 3\mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $2x_1y_1 + 3x_2y_2$, а)$n = 2$, б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{g}_2 = (0,\ 1,\ -1)$, $\mathbf{g}_3 = (1,\ 1,\ 1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = i\mathbf{e}_1 + (i-1)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (3+i)\mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (1+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов $\mathbf{a}_1 = (-1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (1+i,\ 1-i,\ 0)$.

**Вариант 11**

1. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

а) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

б) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой.

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (-3\ \ 2\ \ 0)^T,\ \mathbf{b} = (-3\ \ 6\ \ -15)^T,\ \mathbf{c} = (0\ \ -4\ \ 15)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{x} = 2\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i)$, $(1,\ 1)$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти:

а) длину элемента $\cos x + \sin x$;

б) скалярное произведение элементов $\sin 2x,\ \sin 3x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (-2+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов $\mathbf{a}_1 = (1,\ -2,\ i),\ \mathbf{a}_2 = (1,\ 0,\ 3i)$.

**Вариант 12**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество:

а) геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}| > a$, где $a$ – фиксированное число;

б) векторов трехмерного пространства,перпендикулярных данной прямой?

2. Выяснить, является ли базисом данная система векторов в пространстве $V_3$:

а) $\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{k}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,1,0,0), \ \mathbf{g}_2 = (0,0,1,1), \ \mathbf{g}_3 = (1,0,1,1), \ \mathbf{g}_4 = (0,1,0,-1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \ |\mathbf{a}|, \ |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4+i)\mathbf{e}_2, \ \mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3-i)\mathbf{e}_2, \ |\mathbf{e}_1| = 2, \ |\mathbf{e}_2| = 3$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений: $x_1 + ix_2 = 0$.

**Вариант 13**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество решений системы линейных однородных уравнений?

2. Доказать, что многочлены $2t + t^5, \ t^3 - t^5, \ t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше пятой, и найти координатный столбец многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный:

$\mathbf{g}_1 = (1,0,1,2), \ \mathbf{g}_2 = (-1,0,-1,0), \ \mathbf{g}_3 = (0,0,2,1), \ \mathbf{g}_4 = (0,1,1,1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2,\ |\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2},\ |\mathbf{e}_2| = 1.$

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \phantom{2x_2 -{}} x_3 + \phantom{8}x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 14**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$;

б) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$?

2. Найти координаты каждого из указанных элементов пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в базисе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:
а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:
а) $x_1\bar{y}_2$;
б) $(3+i)x_1\bar{y}_2 + (3-i)x_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$ $\left((f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\right)$, по данному базису $g_1 = 1$, $g_2 = x$ построить ортонормированный.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 - (3+4i)\mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = 3i\mathbf{e}_1 + (i-2)\mathbf{e}_2$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (1,\ -2,\ 3,\ -4)$.

**Вариант 15**

1. Является ли комплексным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами:

а) степени не выше $n$;  б) степени $n$;  в) степени выше $n$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ 2\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (1\ 0\ 1\ 3)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,  $\mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$,  $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ поставлено в соответствие число $3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$,  а)$n = 2$,  б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве $V_3$ даны два ортогональных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ такой, при котором векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют ортогональный базис, если: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти угол между элементами $\sin x$ и $\cos x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ -ix_1 + (2+i)x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 16**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных функций, непрерывных во всех точках [a,b] числовой оси, кроме $x_0 \in [a, b]$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ 1\ 1\ 1)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (3\ -5\ 7\ 2)^T,\ \mathbf{d} = (1\ -7\ 5\ -2)^T$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным расположениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$,  $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$,  $\mathbf{b}_1 = 7\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$,  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$;

б) $x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметическо-

го пространства со стандартным скалярным произведением: $(2-i,\ i)$, $(4-i,\ 2-3i)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\ |\mathbf{a}|,\ |\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1| = 3,\ |\mathbf{e}_2| = 2,\ |\mathbf{e}_3| = 4$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (8,\ -2,\ 8,\ 3)$.

**Вариант 17**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $$L = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{array} \right) \middle| d_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{n \times n};$$

б) $$L = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{array} \right) \middle| d_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}?$$

2. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис, найти координаты вектора $\mathbf{c} = \mathbf{2e_1} - \mathbf{4e_2}$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$;

б) $5x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i,\ 1)$, $(2-i,\ i-1,\ 2)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $|\mathbf{e}_3| = 3$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (2,\ 3,\ -1,\ -2)$.

**Вариант 18**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество

а) всех сходящихся последовательностей;

б) всех расходящихся последовательностей?

2. Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $b = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{d} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$;

б) $x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ 2,\ 0)$,
$\mathbf{g}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), |\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4+i)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3-i)\mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ -2,\ 3)$.

**Вариант 19**

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 1$; б) $2f(0) - 3f(1) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства вещественных матриц $\mathbb{R}^{3\times 2}$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$
$\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}_3 = 4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $(1,\ i,\ 1,\ i)$, $(1,\ i,\ 1,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2,\ |\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2},\ |\mathbf{e}_2| = 1.$

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (10\ \ -20\ \ 10)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(0\ 1\ 0)^T$.

**Вариант 20**

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 0$; б)$f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства многочленов степени не выше четвертой $P_4(x)$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ к базису $(x-1)^2,\ x-1,\ 1$ в пространстве многочленов $P_2(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \det XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а

в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В унитарном пространстве $\mathbb{C}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ i),\ \mathbf{g}_2 = (i,\ 1,\ 1),\ \mathbf{g}_3 = (1,\ i,\ 1)$.

6. Обозначим через $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ и $a_{22}$, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $F(x, y) = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + a_{21}x_2\bar{y}_1 + a_{22}x_2\bar{y}_2$ задавала унитарное скалярное произведение.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой вектора, заданного в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (4\ 3\ 2\ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)^T$.

**Вариант 21**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством: $L = \{f(x) \mid\ |f(x)| \leq 3\} \subset F_{[a,b]}$,
где $F_{[a,b]}$ – множество всех вещественных функций, область определения которых – отрезок $[a, b]$.

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 1)$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ 2x - 3$ к базису $x + 1,\ x$ в пространстве многочленов $P_1(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T DY$ ($D$ – диагональная матрица порядка $n$ с положительными элементами на главной диагонали). Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1 + i,\ 2 + i,\ 1 - i),\ (-2,\ 4 + i,\ 1 - i),\ (1,\ 2 + i,\ 2 - i)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0),\ \mathbf{f}_2 = (1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпростран-

ства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 & = & 0, \\ (1+i)x_1 + \quad 3x_2 + ix_3 & = & 0, \\ -ix_2 + \ x_3 & = & 0. \end{cases}$$

**Вариант 22**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{\alpha + \ln(x^2+1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$;

б) $L = \{\ln(x^2+1)^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$?

2. Систему многочленов $t^5+t^4,\ t^5-3t^3,\ t^5+2t^2,\ t^5-t$ дополнить до базиса пространства $P_5(t)$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и координаты $\mathbf{e}_1$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X,Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1,\ i,\ 1),\ (i,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1/2,\ 1/2),\ \mathbf{f}_2 = (-1/2,\ 1/2)$.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 0)^T,\ \mathbf{a}_2 = (2\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ 0\ \ 2\ \ -2)^T$.

**Вариант 23**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ |a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. Проверить, образуют ли элементы $\mathbf{e}_1 = (2, 2, -1), \mathbf{e}_2 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, 2)$ базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, и если образуют, найти координаты элемента $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2.$

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ ($n \geq 2$) задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X\bar{Y}^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/\sqrt{3}\,(1,\ -1,\ 0,\ 1),\ 1/\sqrt{3}\,(1,\ 1,\ -1,\ 0)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T,\ \mathbf{y}_e = (0\ 1)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ . Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2ix_2 + \quad (1-i)x_3 & = & 0, \\ -ix_1 + \ 2x_2 + (-1-i)x_3 & = & 0, \\ 3x_1 + 6ix_2 + \ (3-3i)x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

**Вариант 24**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_i > 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_1 + a_2 + a_3 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 2, 1)$.

3. Какая из данных матриц может быть матрицей перехода от одного базиса к другому и объяснить почему: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ ($n \geq 2$) задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} \bar{X}Y^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/2\,(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $1/2\,(1,\ -1,\ 1,\ -1)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T$, $\mathbf{y}_e = (1\ 3)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ -i,\ 3)$, $(2i,\ 2,\ 6i)$, $(1-i,\ -1-i,\ 3-3i)$.

**Вариант 25**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

б) $L = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

в) $L = \{a \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$?

2. Определить является ли система элементов $1,\ t + 1,\ t^2 + 1,\ t^3 + 1,\ t^4 + 1,\ t^5 + 1$ базисом в пространстве $P_5(t)$, и если является, то найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = -4\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

4. Пусть $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе вещественного линейного двумерного пространства. Найти условия на вещественные коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ и $a_{22}$, необходимые и достаточные для

того, чтобы функция $F(x,y)=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2$ задавала евклидово скалярное произведение.

5. Ортогональную систему векторов $(1,\ 1,\ i,\ i)$, $(1,\ -1,\ i,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортогонального базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e=(1\ \ i)^T,\ \ \mathbf{y}_e=(1+i\ \ 2)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f=\begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$ . Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_2,\ \ \mathbf{f}_2=-3i\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2$.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1=(1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T,\ \ \mathbf{a}_2=(1\ 4\ \ -1\ 0)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(2\ 1\ 1\ 0)^T$.

**Список литературы**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*М.: Высшая школа, 1998.- 320.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 496 с.

5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* Мн.: Выш. школа, 1980.-192 с.

Учебное издание

**Линейные пространства**

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# **Л И Н Е Й Н Ы Е О П Е Р А Т О Р Ы**

САМАРА 2009

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

*Методические указания*

САМАРА 2009

Составители: С.Ю. Гоголева., Л.Н. Прокофьев

УДК 512.8

**Линейные операторы:** Метод.указания/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. С.Ю. Гоголева, Л.Н.Прокофьев. Самара, 2009. 42 с.

Содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделам "Линейные операторы"и "Линейные операторы в евклидовых (унитарных) пространствах"курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены для студентов направлений 010501 - "Прикладная математика и информатика"и 010600 - "Прикладные математика и физика"в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Выполнены на кафедре прикладной математики.

Методические указания подготовлены при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также программы "Фундаментальные исследования и высшее образование"(BRHE).

Библиограф.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент Дегтярев А.А.

**Содержание**

## Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории линейных отображений. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных операторов.

Авторы благодарят студентов факультета информатики Бороданова М.С. и Силакову М.В. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

## 1. Линейные операторы в линейных пространствах
### 1.1 Определение и простейшие свойства

Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ линейные пространства размерности $m$ и $n$ соответственно.

*Оператором*, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, называется отображение вида $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, которое каждому элементу $x \in \mathcal{L}_n$ ставит в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}_m$.

*Обозначения:* $\varphi(x) = y, \quad \varphi x = y$,
где $y$ – образ элемента $x$, а $x$ – прообраз элемента $y$.

*Оператор* называется *линейным*, если $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняются соотношения:

1) $\quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$

2) $\quad \varphi(\lambda(x_1)) = \lambda\varphi(x_1).$

Если $\mathcal{L}_m$ представляет собой множество $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то линейный оператор называют *линейным функционалом* или *линейной формой.*

*Обозначение:* $f(x)$.

Линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, иногда называют *линейным отображением.*

Если пространство $\mathcal{L}_m$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_n$, то линейный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называют *линейным преобразованием* пространства $\mathcal{L}_n$.

Два оператора $\varphi$ и $\psi$ называются *равными*, если

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Примеры линейных операторов.**

1. Оператор (преобразование) $\varepsilon : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в $x$, является линейным и называется *тождественным оператором.*

2. Оператор $\Theta : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в нулевой элемент $\theta \in \mathcal{L}_m$, является линейным и называется *нулевым оператором.*

3. Пусть $P_n$ – пространство вещественных многочленов степени не выше $n$. Оператор $\varphi : P_n \to P_{n-1}$, определенный правилом $\varphi(p(x)) = p'(x)$, где $p(x) \in P_n$, является линейным и называется *оператором дифференцирования.*

4. Изоморфизм $\varphi$ линейных пространств $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}'_n$ является линейным оператором, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}'_n$.

5. Растяжение (сжатие) элементов пространства $\mathcal{L}_n$ в одно и то же число $\alpha$ раз является оператором в пространстве $\mathcal{L}_n$. Такой оператор называется *оператором подобия*: $\psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n,\ \psi x = \alpha x,\ x \in \mathcal{L}_n$.

**Простейшие свойства линейного оператора.**

Из определения вытекают следующие свойства линейных операторов.

1. Линейный оператор переводит нулевой элемент в нулевой элемент: $\varphi(\theta_1) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = \theta_2;\ \theta_1 \in \mathcal{L}_n,\quad \theta_2 \in \mathcal{L}_m$.

2. Линейный оператор сохраняет линейную комбинацию, т.е. переводит линейную комбинацию элементов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi x_i.$$

3. Линейный оператор переводит линейно зависимую систему элементов в линейно зависимую.

**Задание линейного оператора.**

Свойство 2° говорит о том, что для задания линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ достаточно определить его только на элементах $e_1, e_2, \cdots, e_n$ некоторого базиса пространства $\mathcal{L}_n$. Зная элементы $\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n$ можно однозначно найти образ любого элемена $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$:

$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in \mathcal{L}_m.$$

**Теорема 1.** *Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$, а $g_1, g_2, \cdots, g_n$ – произвольные элемены линейного пространства $\mathcal{L}_m$. Тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который переводит элементы $e_1, e_2, \cdots, e_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_n$ в элементы $g_1, g_2, \cdots, g_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_m$ соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим искомый оператор, положив для каждого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$

$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i. \tag{1}$$

Из единственности разложения элемента $x$ по базису следует, что правило (1) однозначно оределяет образ элемента $x$, при этом, как легко проверить,

$$\varphi e_i = g_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор $\varphi$ единственный, так как если $\psi$ любой другой линейный оператор, переводящий элемены $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в $g_1, g_2, \ldots, g_n$, то
$\psi x = \psi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \psi e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i g_i = \varphi x,\ \forall x \in \mathcal{L}_n \Rightarrow \varphi = \psi.$ □

**Следствие.** Два оператора $\varphi,\ \ \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ равны тогда и только тогда, когда они одинаково определены на элементах базиса $\mathcal{L}_n$.

### 1.2 Матрица линейного оператора

Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.
По теореме из предыдущего параграфа оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ однозначно определяется заданием элементов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)$, которые однозначно определяются своими координатами в базисе $f$, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m, \\ \varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m. \end{cases} \tag{2}$$

Матрица

$$[\varphi]_{fe} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* $\varphi$ в паре базисов $e$ и $f$.

**Координаты элемента и его образа.**

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.

**Теорема 2.** *Если $y = \varphi x$, то справедливо равенство*

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$ и $[\varphi]_{fe} = A = (a_{ij})$.
Утверждение (3) равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Докажем их. Имеем $y = \varphi x = \varphi(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \varphi e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i$.

Из единственности разложения элемента $y$ по базису $f$ следует (3).

**П р и м е р 1.** *Пусть* $\varphi : P_1 \to P_2$;
$\varphi(p(x)) = (x+1)p(x)$;
$e_1 = 1,\ e_2 = x; \quad f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$.
*Найти:*

1. *Матрицу линейного оператора.*
2. *Проверить* $[\varphi]_{fe} y_e = [\varphi(y)]_f, \quad \forall y = p(x) \in P_1$.

*Решение.*

1. $\varphi e_1 = (x+1) \cdot 1 = x+1, \quad [\varphi e_1]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi e_2 = (x+1) \cdot x = x^2 + x, \quad [\varphi e_2]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi e]_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $y = a + bx, \quad y_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;

$\varphi(y) = (x+1)(a+bx) = ax + a + bx^2 + bx = bx^2 + (a+b)x + a$;

$[\varphi(y)]_f = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$.

$[\varphi]_{fe} y_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = [\varphi(y)]_f$.

**Матрицы оператора в различных базисах.**

Пусть $e$ и $e' = e \cdot P_{e \to e'}$ – два базиса в пространстве $\mathcal{L}_n$ с матрицей перехода $P_{e \to e'}$, а $f$ и $f' = f \cdot P_{f \to f'}$ – два базиса пространства $\mathcal{L}_m$ с матрицей перехода $P_{f \to f'}$.

Одному и тому же оператору $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ в паре базисов $e$ и $f$ соответствует матрица $[\varphi]_{fe}$, а в паре базисов $e'$ и $f'$ соответствует матрица $[\varphi]_{f'e'}$.

**Теорема 3.** *Матрицы линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$[\varphi]_{f'e'} = P^{-1}_{f \to f'} [\varphi]_{fe} P_{e \to e'}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного элемента $x \in \mathcal{L}_n$ и его образа $y = \varphi x$ в силу $y_f = [\varphi]_{fe} x_e$ имеем

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e, \ y_{f'} = [\varphi]_{f'e'} x_{e'}. \tag{5}$$

В свою очередь,

$$x_e = P_{e \to e'} x_{e'}, \ y_f = P_{f \to f'} y_{f'}.$$

Подставив эти соотношения в (5), получим, что

$$P_{f \to f'} y_{f'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}$$

или

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} x_{e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}.$$

Так как это соотношение имеет место для любого $x_{e'}$, то

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'}.$$

В силу невырожденности матрицы перехода отсюда следует (4). □

Две прямоугольные одного размера матрицы $A$ и $B$ называются *эквивалентными*, если существуют такие две невырожденные матрицы $Q$ и $P$, что

$$B = Q^{-1} A P.$$

**Следствие 1.** Матрицы линейного операторав в различных парах базисов являются эквивалентными.

**Следствие 2.** Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

**Следствие 3.** Если оператор действует в одном пространстве (является преобразованием), то формула (4) будет иметь вид

$$[\varphi]_{e'} = P^{-1}_{e \to e'} [\varphi]_e P_{e \to e'}.$$

Две квадратные матрицы $A$ и $B$ одинаковых размеров называются *подобными*, если существует невырожденная матрица $P$, такая что справедливо равенство

$$B = P^{-1} A P.$$

**Теорема 5.** *Определители подобных матриц равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если матрицы $A$ и $B$ подобны, то согласно определению существует такая невырожденная матрица $P$, что $B = P^{-1}AP$.

Учитывая свойства определителя, получаем $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}P)\det(A) = \det(A)$. □

**Следствие 4.** Матрицы линейного преобразования в различных базисах имеют равные определители.

### 1.3 Линейное пространство линейных операторов

Обозначим $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ множество линейных операторов, действующих из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$.

*Суммой* линейных операторов $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ будем называть оператор $\varphi + \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, определяемый формулой

$$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n. \tag{6}$$

*Произведением* линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ будем называть оператор $\alpha\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, такой что

$$(\alpha\varphi)x = \alpha\varphi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Теорема 6.** *Для любых операторов* $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m), \quad \alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n$ согласно (6) Имеем

$$(\varphi + \psi)(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y).$$

В силу линейности $\varphi, \psi$ и аксиом линейного пространства

$$(\varphi+\psi)(x+y) = (\varphi x+\varphi y)+(\psi x+\psi y) = (\varphi x+\psi x)+(\varphi y+\psi y) = (\varphi+\psi)x+(\varphi+\psi)y.$$

Для $\forall x \in \mathcal{L}_n,\ \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\varphi + \psi)(\lambda x) = \lambda((\varphi + \psi)x) \Rightarrow \varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$.

Аналогично доказывается, что $\alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$. $\square$

**Теорема 7.** *Множество линейных операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *является линейным пространством относительно введенных выше операций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить аксиомы линейного пространства, взяв в качестве нулевого элемента нулевое отображение $O \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, а в качестве противоположного к оператору $\varphi$ отображение $-\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, выполняемое по правилу

$$(-\varphi)x = -\varphi x, \ \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Все аксиомы вытекают из соответствующих аксиом линейного пространства, примененных к $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ и проверяются по единой схеме.

Проверим, например, коммутативность. Для $\forall \varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ и $\forall x \in \mathcal{L}_n$
$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x = \psi x + \varphi x$;
$(\psi + \varphi)x = \psi x + \varphi x$.

Таким образом, $\psi + \varphi = \varphi + \psi$. $\square$

**Теорема 8.** *Если* $\dim(\mathcal{L}_n) = n$*, а* $\dim(\mathcal{L}_m) = m$*, то линейное пространство операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *изоморфно пространству матриц* $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$*.*

**Следствие.** $\dim L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m) = \dim(\mathcal{L}_n) \cdot \dim(\mathcal{L}_m)$.

**Замечание.** Так как линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ изоморфно пространству матриц $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$, то при сложении линейных операторов их матрицы складываются, а при умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это же число.

### 1.4 Умножение линейных операторов

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $\psi : \mathcal{L}_m \to L_k$.

*Произведением* линейных операторов $\varphi, \psi$ будем называть оператор $\psi\varphi : \mathcal{L}_n \to L_k$, действующий по следующему правилу

$$(\psi\varphi)x = \psi(\varphi(x)), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

**Теорема 9.** *Если* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и* $\psi \in L(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_k)$*, то* $\psi\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_k)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n,\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\psi\varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi x) + \psi(\varphi y) = (\psi\varphi)x + (\psi\varphi)y$;
$(\psi\varphi)(\alpha x) = \psi(\varphi(\alpha x)) = \psi(\alpha(\varphi x) = \alpha\psi(\varphi x) = \alpha(\psi\varphi)x$. $\square$

**Свойства произведения линейных операторов.**

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако, если это произведение имеет смысл, то:

1. $\alpha(\varphi\psi) = (\alpha\varphi)\psi = \varphi(\alpha\psi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
2. $(\varphi + \psi)\xi = \varphi\xi + \psi\xi$.
   $\varphi(\psi + \xi) = \varphi\psi + \varphi\xi$.
3. $(\varphi\psi)\xi = \varphi(\psi\xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Следует из определения линейного оператора на скаляр и определения произведения операторов.
2. $((\varphi + \psi)\xi)x = (\varphi + \psi)(\xi x) = \varphi(\xi x) + \psi(\xi x) = (\varphi\xi)x + (\psi\xi)x = (\varphi\xi + \psi\xi)x$.
3. Согласно определению произведение линейных операторов заключается в их последовательном действии, и поэтому операторы $(\varphi\psi)\xi$ и $\varphi(\psi\xi)$ совпадают и, следовательно, тождественны.

Умножение линейных операторов не обладает свойством коммутативности. В самом деле, о коммутативности можно говорить лишь для линейных преобразований. Но и в этом случае умножение не коммутативно.

**Теорема 10.** *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т. е. если $e, f, g$ – базисы пространств $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_m$, $L_k$ соответственно и $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, $\psi : \mathcal{L}_m \to L_k$, то*

$$[\psi\varphi]_{ge} = [\psi]_{gf}[\varphi]_{fe}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $[\varphi]_{fe} = (a_{ij})$, $[\psi]_{gf} = (b_{ij})$, $[\psi\varphi]_{ge} = (c_{ij})$, $\dim \mathcal{L}_n = n$, $\dim \mathcal{L}_m = m$, $\dim \mathcal{L}_k = k$.

Тогда

$$\psi\varphi e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} g_i. \tag{8}$$

$\psi\varphi e_j = \psi(\varphi e_j) = \psi(\sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} f_s) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj}(\psi f_s) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} \sum\limits_{i=1}^{k} b_{is} g_i =$
$= \sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{sj} b_{is} g_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (\sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}) g_i.$

Сравнение этого разложения с (8) приводит к равенству $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$, которое означает (7). $\square$

### 1.5 Обратный оператор

Пусть $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Отображение $\varphi^{-1} : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *обратным оператором* к оператору $\varphi$, если

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon, \tag{9}$$

где $\varepsilon$ – тождественный оператор.

Из определения обратного оператора $\varphi^{-1}$ следует, что для $\forall x \in \mathcal{L}_n$ справедливо соотношение

$$\varphi^{-1}\varphi x = x.$$

Таким образом, если $\varphi^{-1}\varphi x = \theta$, то $x = \theta$, т.е., если оператор имеет обратный, то из условия $\varphi x = \theta$ следует, что $x = \theta$.

**Теорема 11.** *Для того, чтобы линейный оператор $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\varphi$ имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Это означает, что некоторым различным элементам $x_1$ и $x_2$, $x_2 - x_1 \neq \theta \in \mathcal{L}_n$ отвечает один и тот же элемент $y = \varphi x_1 = \varphi x_2$. Но тогда $\varphi(x_2 - x_1) = \theta$ и поскольку $\varphi$ имеет обратный, $x_2 - x_1 = \theta$. Но выше было отмечено, что $x_2 - x_1 \neq \theta$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия утверждения.
*Достаточность.* Допустим $\varphi$ действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Тогда

каждому элементу $y \in \mathcal{L}_n$ отвечает элемент $x \in \mathcal{L}_n : y = \varphi x$.
Поэтому имеется оператор $\varphi^{-1}$, обладающий тем свойством, что
$\varphi^{-1} y = \varphi^{-1}(\varphi x) = x$.

Легко убедиться, что $\varphi^{-1}$ линейный. Пусть $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{L}_n,\ \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n :$ $y_1 = \varphi x_1$, $y_2 = \varphi x_2$, при этом $x_1 = \varphi^{-1} y_1$, $x_2 = \varphi^{-1} y_2$.

Отсюда получим, что $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(\varphi x_1 + \varphi x_2) = \varphi^{-1}\varphi(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \varphi^{-1} y_1 + \varphi^{-1} y_2$.

Аналогично $\varphi^{-1}(\alpha y_1) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi x_1) = \varphi^{-1}\varphi(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha \varphi^{-1} y_1$,
$\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\square$

**Теорема 12.** *Матрица обратного оператора $\varphi^{-1}$ в произвольном базисе является обратной к матрице оператора $\varphi$ в этом же базисе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e$ – произвольный базис пространства $\mathcal{L}_n$ и для оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ существует обратный оператор $\varphi^{-1}$. Перейдем в равенствах (9) к матрицам операторов в базисе $e$. Согласно теореме 10, получим, что $[\varphi]_e[\varphi^{-1}]_e = [\varphi^{-1}]_e[\varphi]_e = E$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для $[\varphi]_e$. $\square$

### 1.6 Образ и ядро линейного оператора

*Образом линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $y \in \mathcal{L}_m$, представляемых в виде $y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{L}_n$.

*Обозначение:* $\operatorname{im} \varphi$.

*Ядром линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $x \in \mathcal{L}_n$, для которых $\varphi(x) = \theta, \quad \theta \in \mathcal{L}_m$.

*Обозначение:* $\ker \varphi$.

**Теорема 13.** Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то $\operatorname{im} \varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$; $\ker \varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Докажем, что $\operatorname{im} \varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$. Так как
$y_1 \in \operatorname{im} \varphi,\ y_2 \in \operatorname{im} \varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n$, что $y_1 = \varphi x_1,\ y_2 = \varphi x_2$,

$$y_1 + y_2 = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \varphi(x_1 + x_2);$$

$$\lambda y_1 = \lambda(\varphi x_1) = \varphi(\lambda x_1).$$

2. Докажем, что $\ker \varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.
$x_1 \in \ker \varphi,\ \varphi x_1 = \theta$; $x_2 \in \ker \varphi,\ \varphi x_2 = \theta$.

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \theta + \theta = \theta;$$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda \varphi(x_1) = \lambda \theta = \theta. \ \square$$

Число $\dim(\operatorname{im} \varphi) = \operatorname{rg} \varphi$ называется *рангом линейного оператора*, а $\dim(\ker \varphi) = \operatorname{defekt} \varphi$ называется *дефектом линейного оператора.*

Нулевой оператор $\Theta x = \theta$ и тождественный оператор $\varepsilon x = x$ являются предельными с точки зрения дефекта и ранга. Нулевой оператор имеет максимальный дефект равный размерности пространства, в котором этот оператор действует и минимальный ранг. Тождественный оператор имеет минимальный дефект (нулевой) и максимальный ранг равный размерности пространства, в котором этот оператор действует.

Оператор максимального дефекта определен однозначно, а операторов минимального дефекта и максимального ранга бесконечно много.

**Теорема 14.** *Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$. Если $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис в $\mathcal{L}_n$, то*

$$\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для множеств (10) имеет место двусторонние вложение:

с одной стороны, если $y \in \operatorname{im}\varphi$, то $y = \varphi x$ для некоторого элемента $x \in \mathcal{L}_n$, т.е. $y = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$;

с другой стороны, если $y \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi x$, где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, т.е. $y \in \operatorname{im}\varphi$. $\square$

**Теорема 15.** *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 14 и $\dim L(x, y, \dots, z) = \operatorname{rg}(x, y, \dots, z)$ следует, что $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi = \dim L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n) = \operatorname{rg}(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$. Ранг системы элементов $\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n$ совпадает с рангом системы элементов, состоящих из координат этих элементов в базисе $f$ пространства $\mathcal{L}_m$, т.е. с рангом системы столбцов матрицы $[\varphi]_{fe}$. $\square$

**Теорема 16.** *Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то*

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim(\mathcal{L}_n). \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ – базис $\ker\varphi$. Дополним его до базиса $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства $\mathcal{L}_n$. Согласно теореме 14 $\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_k) = L(\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n)$.

Докажем, что элементы $\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих элементов имеет место соотношение

$$\alpha_{k+1}\varphi e_{k+1} + \ldots + \alpha_n \varphi e_n = \theta;$$

$$\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = \theta.$$

Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\alpha_n e_n \in \ker\varphi$. Это означает, что элемент $\alpha_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$.

Таким образом, $\dim \operatorname{im}\varphi = n-k$, $\dim\ker\varphi = k$. Отсюда следует (11). □

**П р и м е р 2.** *Для линейного преобразования*

$$\varphi x = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ x_1 + 3x_3)^T, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

*Найти:*

*1)* $[\varphi]_e,\ e_1 = (1\ 0\ 0)^T,\ e_2 = (0\ 1\ 0)^T,\ e_3 = (0\ 0\ 1)^T$;

*2)* $\operatorname{defekt}\varphi, \quad \operatorname{rg}\varphi$;

*3)* $\ker\varphi, \quad \operatorname{im}\varphi$;

*4) базисы ядра и образа.*

*Решение.* *По условию* $\quad \varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}.$

1. $[\varphi(e_1)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1$, $[\varphi(e_2)]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2$, $[\varphi(e_3)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_3$,
   $[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2. $\operatorname{defekt}\varphi + \operatorname{rg}\varphi = 3$;
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\varphi = 2 \Rightarrow \operatorname{defekt}\varphi = 3 - 2 = 1.$

3. Согласно теореме 14 $\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3)$. Это означает, что $\operatorname{im}\varphi$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$ и, следовательно, за базис $\operatorname{im}\varphi$ можно взять любой из базисов системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$, например, $a_1, a_2$, получим, что $\operatorname{im}\varphi = L(a_1, a_2)$.

   Аналогично, $x \in \ker\varphi$ в том и только в том случае, когда $\varphi(x) = \theta$ или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $\ker\varphi$ совпадает с подпространством решений однородной системы (12), и в качестве базиса в $\ker\varphi$ может быть выбрана фундаментальная система решений уравнений (12). Найдем решение. Преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, если $\alpha = 1$, то получим

$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ker\varphi = L(b_1)$, $b_1$ – базисный вектор ядра.

### 1.7 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

**Характеристический многочлен.**

Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ рассмотрим

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

где $E$ – единичная матрица и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Относительно переменной $\lambda$ этот определитель является многочленом степени $n$ и может быть записан в виде

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i. \tag{13}$$

Многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом матрицы* $A$, а уравнение $f(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением матрицы* $A$,

$$\alpha_0 = f(0) = \det A,$$

$$\alpha_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr} A.$$

**Теорема 17.** *Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A$ и $B$ подобные матрицы, т. е. $B = P^{-1}AP$, тогда в силу свойств определителей имеем

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) =$$

$$= \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \det(A - \lambda E) = f_A(\lambda). \quad \square$$

Рассмотрим линейный оператор (преобразование) $\varphi \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$ и тождественный оператор $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$.

*Характеристическим многочленом оператора* называется функция

$$f(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\varepsilon),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как $\det\varphi = \det[\varphi]_e$, где $e$ – базис в $\mathcal{L}_n$, то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе. При этом коэффициенты $\alpha_k$ характеристического многочлена, представляемого в виде (13), также не связаны с использованным базисом, т.е. являются *инвариантами* относительно выбора базиса.

Уравнение $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ называется *характеристическим уравнением оператора* $\varphi$.

Пусть $\mathcal{L}'$ – подпространство $n$-мерного линейного пространства $\mathcal{L}_n$ и $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Линейное подпространство $\mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}_n$ называется *инвариантным подпространством относительно оператора* $\varphi$, если для $\forall x \in \mathcal{L}'$ его образ $\varphi x \in L^{'}$.

**Примеры инвариантных подпространств**.

1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и $\mathcal{L}_n$ инвариантны относительно любого оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

2. Для любого линейного оператора $\varphi$ инвариантными подпространствами будут $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$, так как если $\varphi x = \theta$, то $\varphi(\varphi x) = \varphi\theta = \theta$ и если $y = \varphi x$, то $\varphi y = \varphi(\varphi x) = \varphi x_1$, где $x_1 = \varphi x$.

Число $\lambda$ называется *собственным значением линейного оператора* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$, если $\exists x \neq \theta$:

$$\varphi x = \lambda x. \tag{14}$$

При этом элемент $x$ называется *собственным вектором оператора* $\varphi$.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется *спектром линейного оператора.*

1. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением.

   Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x$ одновременно удовлетворяет двум равенствам $\varphi x = \lambda x$ и $\varphi x = \mu x$, то

   $$\lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu)x = \theta \Rightarrow x = \theta,$$

   что противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой. $\square$

2. Каждому собственному значению соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

   Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $x$ – собственный вектор линейного оператора $\varphi$ с собственным значением $\lambda$, т.е. $\varphi x = \lambda x$, то для $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеем $\alpha x \neq \theta$ и

$$\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x).$$

   Значит, и вектор $\alpha x$ является для линейного оператора собственным. $\square$

**Теорема 18.** *Число $\lambda$ является собственным значением линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ тогда и только тогда, когда оно является корнем его характеристического уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $\lambda$ – собственное значение оператора $\varphi$,
$x$ – собственный вектор, отвечающий этому $\lambda(x \neq \theta)$. Перепишем соотношение (14) в следующем виде

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta,$$

где $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ – тождественный оператор.

Так как $x \neq \theta \Rightarrow \ker(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq \theta$, т.е. $\dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) \geq 1$, а так как

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi - \lambda\varepsilon)) + \dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) = n,$$

$$\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) + \mathrm{def}(\varphi - \lambda\varepsilon) = n,$$

то $\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) < n$, т.е. $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ и $\Rightarrow \lambda$ – корень характеристического уравнения.

*Достаточность.* Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. $\square$

**Следствие.** Каждые линейный оператор имеет собственное значение. Действительно, характеристическое уравнение всегда имеет корень (в силу основной теоремы алгебры).

*Алгебраической кратностью* собственного значения оператора будем называть кратность соответствующего корня характеристического уравнения этого оператора.

**Собственное подпространство линейного оператора.**

Не следует путать два термина: собственное подпространство и собственное подпространство линейного оператора.

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является линейным подпространством, так как это множество не содержит $\theta$ вектора, который по определению не может быть собственным. Это формальное и легко устранимое препятствие является единственным.

Пусть $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ – множество всех собственных векторов линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n)$, соответствующих значению $\lambda$ с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

**Теорема 19.** *Множество* $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ *линейное подпространство в* $\mathcal{L}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, y \in \mathrm{V}(\varphi, \lambda)$.

$\varphi(x+y) = \varphi x + \varphi y = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$;

$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x$. □

Множество $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ называется *собственным подпространством линейного оператора.*

Собственное подпространство является инвариантным относительно оператора $\varphi$.

*Геометрическая кратность собственного значения* $\lambda$ – это $\dim(\mathrm{V}(\varphi, \lambda))$.

**Теорема 20.** *Для того, чтобы матрица* $[\varphi]_e$ *линейного оператора* $\varphi$ *в данном базисе e была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы* $e_k$ *были собственными векторами этого оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть базисные векторы $e_k$ являются собственными векторами оператора $\varphi$. Тогда

$$\varphi e_k = \lambda_k e_k, \tag{15}$$

и поэтому матрица $[\varphi]_e$ имеет вид (согласно равенствам (2))

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

т.е. является диагональной.

Пусть матрица $[\varphi]_e$ диагональна, т.е. имеет вид (16). Тогда соотношения (2) примут вид (15), а это означает, что $e_k$ – собственные векторы оператора $\varphi$. □

**Теорема 21.** *Пусть собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *линейного оператора* $\varphi$ *различны, тогда отвечающие им собственные векторы* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию. Так как $e_1$ – ненулевой вектор, то для одного вектора ($p = 1$) утверждение справедливо (один ненулевой вектор является линейно независимым).

Пусть утверждение теоремы доказано для $m$ векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Присоединим к этим векторам $e_{m+1}$ и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0. \tag{17}$$

Тогда, используя свойства линейного оператора, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \varphi e_k = 0. \tag{18}$$

Так как $e_k$ – собственные векторы, то $\varphi e_k = \lambda_k e_k$, и поэтому равенство (18) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{19}$$

Согласно (17) $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k e_k = 0$. Вычитая это равенство из равенства (19), найдем

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k e_k = 0. \tag{20}$$

По условию все $\lambda_k$ различны, т.е. $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$. Поэтому из (20) и предположения о линейной независимости векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Отсюда и из (17), а также из условия, что $e_{m+1}$ – собственный вектор ($e_{m+1} \neq \theta$), вытекает, что $\alpha_{m+1} = 0$. Таким образом из равенства (17) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m+1} = 0$. Это означает, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ линейно независимы. $\square$

**Алгоритм нахождения собственных значений и векторов линейного оператора.**

Чтобы вычислить собственные значения линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, действующего в вещественном линейном пространстве, нужно выполнить следующие операции:

1. Выбрать в линейном пространстве базис $e$ и сопоставить линейному оператору $\varphi$ матрицу $[\varphi]_e$ в выбранном базисе $e$.

2. Составить характеристическое уравнение $\det([\varphi]_e - \lambda E)$ и найти всего корни.

3. Выделить только вещественные корни $\lambda_k$, так как пространство вещественное. Если действительных корней нет, то нет и собственных векторов.

4. Для каждого собственного значения $\lambda_k$ найти ФСР для однорордной системы уравнений $(A-\lambda_k E)x=\theta$. Столбцы ФСР представляют собой координаты векторов некоторого базиса в собственном подпространстве $\mathrm{V}(\varphi,\lambda_k)$ линейного оператора $\varphi$. Каждому собственному вектору соответствует собственное значение $\lambda_k \in \mathrm{V}(\varphi,\lambda_k)$ и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с с собственным значением $\lambda_k$.

**П р и м е р 3.** *Найти собственные векторы линейного преобразования* $\varphi : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$*, заданного матрицей* $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

*Если*

а) $\mathcal{L}_2$ - *вещественное линейное пространство;*

б) $\mathcal{L}_2$ - *комплексное линейное пространство.*

*Решение.*

$$\det(A-\lambda E)=0;\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$-(1-\lambda)(1+\lambda)=0;$$
$$\lambda^2=-1;$$
$$\lambda=\pm i.$$

а) так как $\lambda$ - комплексное, то собственных значений нет.

б) $\lambda=i:$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix};$$

$$x_1=(-1-i)x_2,\quad x_2=1 \quad \Rightarrow \quad X^*=\alpha\begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix},\qquad \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$\lambda=-i:$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix};$$

$$x_1=(-1+i)x_2,\ x_2=1 \Rightarrow\ X^*=\alpha\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

### 1.8 Операторы простой структуры

Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *оператором простой структуры*, если в $\mathcal{L}_n$ существует базис из собственных векторов этого линейного оператора.

В базисе из собственных векторов матрица оператора простой структуры имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора.

Если в исходном базисе $[\varphi]_e = A,\ \ [\varphi]_{e'} = \Lambda,$ и $P_{e\to e'}$ – матрица перехода, то

$$\Lambda = P^{-1}_{e\to e'} A P_{e\to e'}, \tag{21}$$

$$A = P_{e\to e'} \Lambda P^{-1}_{e\to e'}. \tag{22}$$

На матричном языке соотношение (21) означает, что матрица $A$ приводится матрицей $P_{e\to e'}$ к диагональному виду и оператор простой структуры называется также *диагонализируемым оператором.*

Соотношение (22) называется *каноническим разложением матрицы* $A$, а $P_{e\to e'}$ – трансформирующей матрицей.

**Теорема 22.** *Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда алгебраическая и геометрическая кратности его собственных значений совпадают.*

*Замечание*. Эта теорема в вещественном пространсте верна только для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Приведение матрицы к диагональному виду и каноническое разложение матриц используется в теории и вычислительной практике. Например, если известно каноническое разложение (22), то, если $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$A^m = P_{e\to e'} \Lambda^m P^{-1}_{e\to e'}.$$

**Алгоритм нахождения трансформирующей матрицы.**

1. Находим все собственные значения матрицы $A$.

2. При каждом собственном значении $\lambda_k$ строим ФСР однородной системы уравнения $(A - \lambda_k E)x = \theta$.

3. Из решений всех построенных ФСР, как из столбцов, составляем матрицу $P_{e\to e'}$, причем в матрицу $P_{e\to e'}$ столбцами записываются решения по каждому $\lambda_k$ в порядке нумерации собственных значений.

Матрица $P_{e\to e'}$ должна быть квадратной. Это будет выполняться только тогда, когда каждый корень характеристического уравнения $\lambda_k$ матрицы $A$ является ее собственным значением и для каждого $\lambda_k$ его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Лишь в этом случае матрица $A$ приводится к диагональному виду.

**П р и м е р 4.** *Привести, если возможно, следующую матрицу к диагональному виду и найти ее трансформирующую матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2;$ $\qquad \overbrace{s = 2;}^{\text{алгебраическая кратность}}$

$\lambda_3 = 1;$ $\qquad s = 1.$

*Найдем геометрическую кратность:*

*При* $\lambda_{1,2} = 2:$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda_{1,2}E) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 \quad\Rightarrow\quad \overbrace{k = n - \operatorname{rg}(A-\lambda_{1,2}E) = 2}^{\text{геометрическая кратность}}.$$

*При* $\lambda_3 = 1:$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda_3E) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad\Rightarrow\quad k = n - \operatorname{rg}(A-\lambda_3E) = 1.$$

*Найдем собственные векторы.*

*При* $\lambda_{1,2} = 2:$

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 3x_2 - 3x_1.$$

$$X^* = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{\textit{где}} \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R} \quad \text{и} \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0.$$

*При* $\lambda_3 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow X^* = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

*В итоге:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.9 Жорданова нормальная форма

Итак, самый простой формой матрицы обладают только операторы простой структуры, т.е. операторы, имеющие полный набор линейно независимых собственных векторов. Как мы уже отмечали в вещественном пространстве существуют операторы, которые не имеют ни одного собственного вектора. И в комплексном пространстве не каждый линейный оператор обладает необходимым для базиса числом линейно независимых векторов.

Приведение матрицы линейного оператора к простому виду связано со структурой его собственных подпространств.

**Теорема 23**. *Пусть* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ *– инвариантные пространства линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$*, причем* $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s = \mathcal{L}$*, тогда в некотором базисе* $f$ *матрица оператора* $\varphi$ *имеет блочно-диагональный вид:*

$$[\varphi]_f = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

*где квадратный блок* $A_i$ *имеет порядок* $\dim \mathcal{L}_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, s$*, а остальные блоки являются нулевыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в линейных подпространствах $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ базисы
$e^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)})$,
$e^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)})$,
$\ldots$
$e^{(s)} = (e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \ldots, e_{n_s}^{(s)})$.

В совокупности эти базисы дают базис $f$ всего пространства $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}_1$ – инвариантное подпространство линейного оператора $\varphi$, элемент $\varphi e_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, попадет в $\mathcal{L}_1$ и поэтому является линейной комбинацией системы элементов $e^{(1)}$. Другими словами, координаты элементов $\varphi e_i^{(1)}$ в базисе $f$, соответствующие $e_i^{(2)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, равны нулю. Аналогично координаты элементов $\varphi e_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_2$ в базисе $f$, соответствующие $e_i^{(1)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, также равны нулю.

Остановимся на случае, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет лишь простые корни, среди которых, вообще говоря, есть и комплексные. Так как характеристическое уравнение линейного оператора имеет действительные коэффициенты, каждому комплексному корню $\alpha + i\beta$ этого уравнения соответствует комплексно сопряженный корень $\alpha - i\beta$ той же кратности.

**Теорема 24**. *Каждой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линейного оператора соответствует двумерное инвариантное подпространство этого оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый базис $e$ и рассмотрим матрицу $A$ линейного оператора $\varphi$ в этом базисе.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора $\varphi$.

Тогда $\det(A - \lambda E) = 0$ и система линейных уравнений $(A - \lambda E)x = \theta$ с комплексными коэффициентами имеет ненулевое решение $x$, которое можно записать в виде $x = u + iv$, разделив действительные и мнимые части у элементов столбца $x$.

Столбец $v$ не является нулевым, так как в противном случае $x = u$, $Au = \lambda x$. Мы видим, что действительные элементы столбца $Au$ получаются из действительных элементов столбца $u$ умножением на комплексное число $\lambda$, а это возможно лишь в случае, когда $u = \theta$. Но это заключение противоречит выбору столбца $x$.

Столбцы $u$ и $v$ линейно независимы. Действительно, если они линейно зависимы, то $\mu u + \nu v = 0$, где одно из чисел $\mu$ и $\nu \neq 0$. Мы можем утверждать, что $\mu \neq 0$, так как в противном случае $\nu v = \theta$. Но $v \neq \theta$, значит $\nu = 0$.

Пусть $\mu \neq 0$ и поэтому $u = kv$, где $k = -\frac{\nu}{\mu} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = u + iv = (k + i)v$.

Так как $Ax = \lambda x$, то

$$A(k + i)v = \lambda(k + i)v,$$

$$Av = \lambda v.$$

Как мы уже знаем, для комплексных $\lambda$ такое равенство невозможно.

В равенстве $Ax = \lambda x$ сделаем замены $\lambda = \alpha + i\beta,\ x = u + iv$:

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Разделив действительные и мнимые части, получим два матричных уравнения

$$Au = \alpha u - \beta v,\ Av = \beta u + \alpha v.$$

Рассмотрим векторы $x$ и $y$, которые в базисе $e$ имеют координатные столбцы $x_e = u,\ y_e = v$, тогда

$$\varphi x = \alpha x - \beta y, \quad \varphi y = \beta x + \alpha y.$$

Векторы $x$ и $y$ линейно независимы, так как независимы их столбцы $u$ и $v$. Полученные соотношения означают, что двумерное линейное подпространство $\mathcal{L}' = L\{x, y\}$ является инвариантным подпространством линейного оператора $\varphi$. $\square$

Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

**Теорема 25**. *Если характеристическое уравнение линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ имеет $p$ различных пар комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, где $j = 1, 2, \cdots, p$, и $q$ различных действительных корней $\mu_j$ где $j = 1, 2, \cdots, q$, причем $2p + q = n$, где $\dim(\mathcal{L}_n) = n$, тогда матрица линейного оператора в некотором базисе будет иметь вид:*

$$A = \begin{pmatrix} C(\alpha_1, \beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha_2, \beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C(\alpha_p, \beta_p) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \mu_q \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ характеристического уравнения соответствует двумерное инвариантное подпространство $P_j$ оператора $\varphi$ с базисом $u_j, v_j$ (см. доказательство т. 24). Каждому собственному значению $\mu_j$ соответствует одномерное собственное подпространство $Q_j$ линейного оператора $\varphi$. Можно показать, что все эти подпространства образуют прямую сумму, так как пересечение любой пары таких подпространств содержит лишь $\theta$. Учитывая, что сумма размерностей этих подпространств $2p + q = n = \dim(\mathcal{L}_n)$, заключаем, что

$P_1 \oplus P_2 + \ldots + P_p \oplus Q_1 \oplus Q_2 \ldots \oplus Q_q = \mathcal{L}$. Согласно теореме 23 в некотором базисе матрица $A$ оператора $\varphi$ имеет блочно-диагональный вид, причем каждый диагональный блок представляет собой ограничения оператора $\varphi$ на соответствующее инвариантное подпространство. В случае двумерного подпространства $P_j$ в базисе $u_j, v_j$ эта матрица равна $C(\alpha_j, \beta_j)$, а в случае одномерного инвариантного подпространства $Q_j$ такой блок есть простое число, представляющее собой собственное значение $\mu_j$. $\square$

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные корни, действительные или комплексные, то инвариантные подпространства такого оператора имеют более сложную структуру.

Рассмотрим два типа специальных матриц. Для произвольного числа $\mu \in \mathbb{R}$ введем обозначение матрицы порядка $s$:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы все диагональные элементы равны $\mu$, над главной диагональю расположены единицы, а все остальные равны нулю. В случае $s = 1$ рассматриваемая матрица сводится к единственному числу $\mu$.

Для любого комплексного числа $\alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$:

$$C_r(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C(\alpha,\beta) & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где $C_1(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Все остальные блоки также являются матрицами второго порядка. $E$ обозначим единичную матрицу, а $O$ – нулевую.

Блочно-диагональную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_{r_2}(\alpha_2,\beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C_{r_l}(\alpha_l,\beta_l) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{s_1}(\mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s_2}(\mu_2) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k$ называют *жордановой*. Ее диагональные блоки – *жордановыми клетками*.

**2. Линейные операторы в евклидовых (унитарных) пространствах**

**2.1 Сопряженный оператор**

Линейный оператор $\varphi^* : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *сопряженным* данному оператору $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_m)$, если для $\forall x \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$,
$\forall y \in \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_m),\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y). \tag{23}$$

Из определения сопряженного оператора вытекают следующие его **свойства**:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
4. $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;
5. $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ (если $\varphi$ является преобразованием).

Все свойства доказываются однотипно.

Докажем, например, свойство 3: согласно определению произведения операторов и определения сопряженного оператора получаем

$$((\varphi\psi)x, y) = ((\varphi(\psi x), y) = (\psi x, \varphi^* y) = (x, (\psi^*\varphi^*)y).$$

Выясним, как связаны матрицы операторов $\varphi$ и $\varphi^*$ в базисе $e$ в вещественном евклидовом пространстве.

Обозначим соответственно матрицы этих операторов $[\varphi]_e = A$ и $[\varphi^*]_e = A^*$ и пусть для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ $\quad x_e,\ y_e$ – координатные столбцы векторов $x, y$ в базисе $e$, тогда равенство (23) можно переписать с учетом, что $(x, y) = x_e^T \Gamma y_e$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_1, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ в виде

$$(Ax_e)^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e.$$

Далее $\quad x_e^T A^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e; \quad x_e^T (A^T \Gamma - \Gamma A^*) y_e = 0.$

Так как $x_e,\ y_e$ – произвольные столбцы, отсюда можно заключить, что

$$A^T \Gamma - \Gamma A^* = O,$$

где $O$ – нулевая матрица.

Итак, матрицы операторов $\varphi$ и $\varphi^*$ в базисе $e$ связаны соотношением

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma. \tag{24}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $\Gamma = E$ и

$$A^* = A^T. \tag{25}$$

В унитарном пространстве, где $(x, y) = x_e^T \Gamma \bar{y}_e$, формулы (25) и (26) соответственно примут вид

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma};$$

$$A^* = \bar{A^T}.$$

**Теорема 26.** *Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве имеет сопряженный оператор, и притом только один.*

**П р и м е р 5.** *Линейный оператор $\varphi$ в базисе $e_1' = (1\ 1\ 1)^T$, $e_2' = (1\ 0\ 1\ 1)^T$, $e_3' = (0\ 0\ 1)^T$ имеет матрицу $[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $[\varphi^*]_{e'}$, если векторы $e_1', e_2', e_3'$ заданы координатами в ортонормированном базисе $e_1, e_2, e_3$.*

Решение. *Найдем матрицу*

$$\Gamma_{e'} = \begin{pmatrix} (e_1', e_1') & (e_1', e_2') & (e_1', e_3') \\ (e_2', e_1') & (e_2', e_2') & (e_2', e_3') \\ (e_3', e_1') & (e_3', e_2') & (e_3', e_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[\varphi]_e' = \Gamma_{e'}^{-1} [\varphi]_{e'}^T \Gamma_{e'}$.

$$\Gamma_{e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*В результате перемножения матриц получим*

$$[\varphi]_e' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**П р и м е р 6.** *В трёхмерном евклидовом $\mathcal{E}_3$ пространстве выбран ортонормированный базис $e_1, e_2, e_3$. Найти преобразование $\varphi^*$, сопряжённое преобразованию $\varphi$ пространства $\mathcal{E}_3$, если преобразование $\varphi$, задано формулой*

$$\varphi(x) = [a, x],$$

*где $a$ - фиксированный вектор из $\mathcal{E}_3$, $[a, x]$ - векторное произведение векторов $a$ и $x$.*

Решение. *По определению сопряженного оператора*

$(\varphi x, y) = ([a, x], y) = axy = xya = (x, -[a, y]) = (x, \varphi^* y) \Rightarrow \varphi^* = -\varphi$.

Областью значений $\varphi^*$ является подпространство, ортогональное к ядру оператора $\varphi$. Это следует из того, что $\forall x \in \ker\varphi,\ \forall y \in \mathrm{im}\varphi$

$$(x, \varphi^* y) = (\varphi x, y) = (0, y) = 0,$$

т.е. $\varphi^* y \perp x$.

**Основное свойство сопряженного оператора**.

*Если некоторое подпространство $\mathcal{H}$ инвариантно относительно оператора $\varphi$, то ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ этого подпространства инвариантно относительно сопряженного оператора $\varphi^*$.*

**Свойства собственных значений и собственных векторов сопряженного оператора**.

1. Характеристические многочлены, а, следовательно, и собственные значения сопряженных операторов в вещественном евклидовом пространстве одинаковы. В комплексном пространстве собственные значения сопряженных операторов являются комплексно сопряженными числами.

2. Каждый собственный вектор сопряженного оператора $\varphi^*$ ортогонален ко всем собственным векторам оператора $\varphi$, принадлежащим другим собственным значениям.

### 2.2 Нормальный оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n (\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным оператором $\varphi^*$, т.е. если

$$\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*. \tag{26}$$

Квадратная матрица $A$ называется *нормальной матрицей*, если $A^* A = AA^*$.

Из определения и связи матриц операторов $\varphi$ и $\varphi^*$, рассмотренных в пункте 2.1, следует

**Теорема 27.** *Оператор нормален тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица нормальна.*

**Теорема 28.** *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению $\lambda$, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\varphi - \lambda\varepsilon$ также нормален.

Пусть теперь $x$ – собственный вектор оператора $\varphi$, отвечающий собственному значению $\lambda$, тогда $(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta$ и $((\varphi - \lambda\varepsilon)x, (\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$.

Согласно определению сопряженного оператора можем записать, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)^*(\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$$

или, с учетом нормальности оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0,$$

т.е.

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x, ((\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0$$

и $(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x = \theta$.

Отсюда в силу свойств сопряженного оператора следует, что

$$(\varphi^* - \bar{\lambda}\varepsilon) = \theta,$$

т.е. $\varphi^*x = \bar{\lambda}x$. □

**Следствие 1**. Если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \ker\varphi^*$, так как нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими нулевому собственному значению.

**Следствие 2**. Если $\varphi$ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \mathrm{im}^{\perp}\varphi$. Это следует из $\ker\varphi = \mathrm{im}^{\perp}\varphi^*$ и предыдущего следствия.

**Теорема 29.** *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

### 2.3 Ортогональный (унитарный) оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *ортогональным (унитарным)*, если он сохраняет скалярное произведение в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y).$$

Полагая в этом равенстве $x = y$, получаем $|\varphi x|^2 = |x|^2$. Это означает, что ортогональный (унитарный) оператор сохраняет длины векторов.

**Теорема 30.** *Ортогональный (унитарный) оператор $\varphi$ переводит любой ортонормированный базис $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ в ортонормированный базис.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$. В силу ортогональности оператора $\varphi$ имеем

$$(\varphi e_i, \varphi e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Видим, что различные векторы $\varphi e_i$ и $\varphi e_j$ ортогональны, а длина каждого из них равна единице. Поэтому система векторов $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n)$ состоит из ненулевых векторов и ортогональна. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Количество векторов в линейно независимой системе $\varphi e$ равно размерности пространства $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. $\dim\mathcal{E}_n = n \Rightarrow$ эта система является базисом, притом ортонормированным. □

**Теорема 31.** *Если линейный оператор* $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ *переводит какой-либо ортонормированный базис* $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *в ортонормированный базис* $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$, то этот оператор ортогональный (унитарный).

**Теорема 32.** *Оператор ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет ортогональную (унитарную) матрицу.*

**Теорема 33.** *Собственные значения ортогонального (унитарного) оператора по абсолютной величине равны единице.*

Доказательство. Докажем для унитарного оператора. По определению можем записать $(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$. Пусть $x$ – собственный вектор оператора $\varphi$ и $\lambda$ – отвечающее ему собственное значение, $\varphi x = \lambda x$. Тогда $(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2(x, x)$;

$|\lambda|^2(x, x) = (x, x)$;

$|\lambda|^2 = 1$. □

**Теорема 34.** *Собственные векторы ортогонального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

### 2.4 Самосопряженный оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *самосопряженным*, если для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi y),$$

т.е. $\varphi = \varphi^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называют *эрмитовым*, а в евклидовом пространстве – *симметрическим*.

**Примеры самосопряженного оператора.**

1. Тождественный: $(\varepsilon x, y) = (x, y) = (x, \varepsilon y)$.

2. Нулевой: $(\theta x, y) = (0, y) = 0 = (x, 0) = (x, \theta y)$.

Квадратная матрица называется *самосопряженной*, если $A = A^*$.

Из определения вытекает, что самосопряженный оператор нормален.

**Теорема 35.** *Оператор самосопряженный тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет самосопряженную матрицу.*

**Теорема 36.** *Если подпространство* $\mathcal{H}$ *инвариантно относительно самосопряженного оператора* $\varphi$, *то ортогональное дополнение* $\mathcal{H}^\perp$ *этого подпространства также инвариантно относительно оператора* $\varphi$.

**Теорема 37 (спектральная характеристика самосопряженного оператора)**. *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В унитарном пространстве это утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из равенств $\varphi x = \lambda x$ и, с учетом теоремы 28, $\varphi x = \bar{\lambda} x$. Докажем утверждение для евклидова пространства . Пусть $e$ - ортонормированный базис , тогда $[\varphi]_e$ - самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим произвольное унитарное пространство $\mathcal{U}$ той же размерности, что и пространство $\mathcal{E}$, и в нем произвольный ортонормированный базис $f$. Тогда матрице $[\varphi]_e$ отвечает самосопряженный оператор $\psi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$, для которого матрица $[\varphi]_e$ является матрицей в базисе $f : [\varphi]_e = [\psi]_f$. Следовательно, характеристические многочлены операторов $\varphi$ и $\psi$ совпадают и по доказанному выше (применительно к оператору $\psi$) все корни характеристического многочлена оператора $\varphi$ вещественны.

Достаточность. Пусть $\varphi$ - нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны. Тогда как в евклидовом, так и в унитарном пространстве существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\varphi$. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ – любой вектор пространства, то $\varphi x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ и $\varphi^* x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{\lambda}_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$, так как $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi x = \varphi^* x, \ \forall x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, откуда следует, что $\varphi = \varphi^*$. $\square$

**Теорема 38.** *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Основным свойством самосопряженного оператора является то, что в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что самосопряженный оператор является оператором простой структуры, а матрица $P_{e \to e'}$ приводит матрицу $A$ самосопряженного оператора к диагональному виду, т.е. удовлетворяет соотношению (21)

$$\Lambda = P^{-1}_{e \to e'} A P_{e \to e'}.$$

Правило построения такой матрицы остается таким же, как и в случае любых операторов простой структуры с той лишь разницей, что базис из собственных векторов матрицы $A$ здесь еще и ортонормируют.

**Задание**

**1.** Выяснить, какие из преобразований трехмерного арифметического пространства $\mathbb{R}_3$ являются линейными. Для линейных преобразований найти:

а) матрицу в каноническом базисе;

б) дефект;

в) образ, ядро, а также построить базисы образа и ядра.

Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$; при этом компоненты векторов $\varphi(x), f(x)$ заданы как функции компонент вектора $x$.

1. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + x_1,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.
2. $f(x) = (x_1 - x_2 + 1,\ 3x_1 + x_2,\ x_3)$,
   $\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ x_3 - x_1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.
3. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.
4. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.
5. $f(x) = (x_1 - x_2,\ x_3 - x_2,\ 2x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.
6. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.
7. $f(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3^2,\ x_3 - x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_2,\ -x_1 + x_3, -3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
8. $f(x) = (x_2 - x_3,\ x_3 - x_1,\ -x_3 + 2x_2 + x_1)$,
   $\varphi(x) = (x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 3,\ x_1 + x_2)$.
9. $f(x) = (2x_1 - 1,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (-x_1,\ 3x_1 + x_2 + x_3,\ x_3 + x_2)$.
10. $f(x) = (3x_1 - 3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$,
    $\varphi(x) = (2x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_2 - x_3)$.
11. $f(x) = (2x_1 - x_2,\ x_3 - x_1,\ -x_2 + 2x_3)$,
    $\varphi(x) = (3x_1 + x_2,\ x_2^2 + x_3,\ x_3 - x_1)$.

12. $f(x) = ((x_2 - x_1)^2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_1)$,
$\varphi(x) = (5x_1 - x_2,\ -x_2 + x_3,\ 5x_1 + x_2 - 2x_3)$.

13. $f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3 + x_1,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.

14. $f(x) = (x_1 - 2x_2,\ x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 - 3x_3,\ x_2 - x_3\ x_3 - 2)$.

15. $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.

16. $f(x) = (x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2,\ 3x_2 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.

17. $f(x) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1)$,
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

18. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3,\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3)$,
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

19. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - x_3,\ -x_1 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.

20. $f(x) = (-2x_1 - 3x_3,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1 + x_2)$,
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 + 1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

21. $f(x) = (2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3 - 1,\ x_1 + 2x_2)$.

22. $f(x) = (-x_1 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.

23. $f(x) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2)$.

24. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3 - 1,\ x_1 - x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$.

25. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2,\ x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3)$.

26. $f(x) = (2x_1 - x_3,\ 2x_2 - x_1,\ 4x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 - 3,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

27. $f(x) = (4x_1 - x_2,\ 4x_2 - x_3,\ 4x_1 + 3x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.

28. $f(x) = (3x_1 - x_3,\ 3x_2 - x_1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_3 - x_1,\ x_2 - 1,\ x_1 - 5)$.

29. $f(x) = (x_3 - 2x_1,\ x_2 - 2x_3,\ x_2 - 4x_1)$,
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

30. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

**2.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 2 & 11 & 8 \\ -10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 8 & 11 & 2 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 \\ -8 & -5 & -8 \\ 16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -4 \\ -4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

**3.** Для заданной эрмитово-симметричной матрицы $A$ найти такие унитарную матрицу $U$ и диагональную вещественную матрицу $\Lambda$, чтобы $\Lambda = \overline{U}^T AU$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Список литературы**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*М.: Высшая школа, 1998.- 320.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 496 с.

5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* Мн.: Выш. школа, 1980.-192 с.

Учебное издание

**Линейные операторы**

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# Б И Л И Н Е Й Н Ы Е   И   К В А Д Р А Т И Ч Н Ы Е

# Ф О Р М Ы

САМАРА 2007

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

# БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

*Методические указания*

САМАРА 2007

Составители: С.Ю. Гоголева., Л.Н. Прокофьев

УДК 512.8

**Билинейные и квадратичные формы:** Метод.указания/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. С.Ю. Гоголева. Самара, 2007. 30 с.

Содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделам "Билинейные формы и квадратичные формы"и "Билинейные формы и квадратичные формы в евклидовых (унитарных) пространствах"курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены для студентов направлений 010501 - "Прикладная математика и информатика"и 010600 - "Прикладные математика и физика"в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Выполнены на кафедре прикладной математики.

Методические указания подготовлены при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также программы "Фундаментальные исследования и высшее образование"(BRHE).

Библиограф.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент Дегтярев А.А.

**Содержание**

## Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории билинейных и квадратичных форм. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных операторов.

Автор благодарит студентов факультета информатики Горецкую Т.А., Кузянина М.С. и Комарову М.С. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

## 1 Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах

### 1.1 Билинейные формы

Будем рассматривать формы в вещественном линейном пространстве.

Пусть $\mathcal{L}-$ вещественное линейное пространство.

Числовая функция $f(x, y)$, аргументами которой являются всевозможные векторы $x, y \in \mathcal{L}$, называется *билинейной формой (билинейным функционалом)*, если $\forall\, x, y, z \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

- $f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y)$;
- $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$;
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;
- $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Билинейная форма называется *симметричной (кососимметричной)*, если

$$f(x, y) = f(y, x) \quad (f(x, y) = -f(y, x)).$$

**Примеры билинейных форм**.

1. Скалярное произведение $(x, y)$ в вещественном евклидовом пространстве является симметричной билинейной формой.
2. Если $f(x), g(y)$ – линейные формы, $x, y \in \mathcal{L}$, то $f(x)g(y)$ – симметричная билинейная форма.

**Теорема 1**. *Билинейная форма f(x,y) при заданном в n-мерном линейном пространстве базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ может быть однозначно представлена в следующем виде*

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{1}$$

*где*

$$a_{ij} = f(e_i, e_j), \tag{2}$$

*а $x_i, y_i$ – координаты в базисе e векторов x и y соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ – разложение векторов $x$ и $y$ по базису $e$.

Так как форма $f(x, y)$ линейна по каждому из аргументов $x$ и $y$ согласно (1), то

$$f(x,y)=f(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}f(e_i,e_j)x_iy_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

Чтобы доказать однозначность этого представления, предположим, что для $f(x,y)$ справедливо представление (1) с некоторыми коэффициентами $a_{ij}$. Беря в (1) $x=e_i, y=e_j$ мы сразу же получим выражения (2) для коэффициентов $a_{ij}$. $\square$

Представление (1) называется *общим видом билинейной формы в произвольном базисе.*

Пусть $A_e=(a_{ij}), i,j=1,2,...,n$ – матрица билинейной формы в базисе $e$.

$$f(x,y)=x_e^TA_ey_e,\quad f(x,y)=y_e^TA_ex_e. \tag{3}$$

Представления (3) называются *компактными представлениями билинейной формы в базисе $e$.* Первое из равенств (3) проверяется непосредственно, второе равенство можно получить транспонированием обеих частей первого.

**Теорема 2**. *Билинейная форма является симметричной тогда и только тогда, когда ее матрица в произвольном базисе $e$ является симметричной.*

$$f(x,y)=f(y,x)\Leftrightarrow A_e=A_e^T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

**Необходимость.**

$f(x,y)=f(y,x)$,

$f(e_i,e_j)=f(e_j,e_i)$, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$.

**Достаточность.**

$A_e=A_e^T$,

$f(x,y)=y_e^TA_e^Tx_e=y_e^TA_ex_e=f(y,x)$. $\square$

**Теорема 3**. *Матрицы билинейной формы в базисах $e$ и $f=eP_{e\to f}$ связаны соотношением*

$$A_f=P_{e\to f}^TA_eP_{e\to f},$$

*где $A_e, A_f$– соответственно матрицы в базисах $e$ и $f$ , а $P_{e\to f}$– матрица перехода.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3), с одной стороны,

$$f(x,y)=x_e^TA_ey_e=(\quad x_e=P_{e\to f}x_f,\quad y_e=P_{e\to f}x_fy_f\quad)=$$

$$=x_f^TP_{e\to f}^TA_eP_{e\to f}y_f.$$

С другой стороны $f(x,y)=x_f^TA_fy_f$. Отсюда, с учетом произвольности $x,y$ следует утверждение теоремы. $\square$

**Следствие**. $rgA_e=rgA_f$, так как матрица $P_{e\to f}$– невырожденная, а умножение справа и слева на невырожденную матрицу говорит о том, что мы производим элементарные преобразования, неизменяющие ранга матрицы.

*Рангом билинейной формы* будем называть ранг ее матрицы в произвольном базисе.

Билинейная форма называется *вырожденной*, если ее ранг меньше размерности пространства, в котором она определена.

**П р и м е р 1**. *Составить матрицу билинейной формы*:
1. $x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$.
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$.

<u>*Решение*</u>.
1.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

### 1.2 Квадратичные формы.

Рассмотрим симметричную билинейную форму $f(x, y)$ в вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$.

*Квадратичной формой (функцией , функционалом)* будем называть вещественнозначную функцию $f(x, x)$, полученную из симметричной билинейной формы путем замены $y$ на $x$, где $x \in \mathcal{L}$.

Соответствующую билинейную форму называют *полярной к квадратичной форме* $f(x, x)$.

Связь между квадратичной и полярной формой:
$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y, x + y) - f(y, y) - f(x, x))$.

В базисе $e$ квадратичная форма $f(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в следующем общем виде:
$f(x, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$,
$a_{ij} = a_{ji}$,
или в компактной форме $f(x, x) = x_e^T A_e x_e$.

*Рангом квадратичной формы* будем называть ранг ее матрицы в произвольном базисе.

Квадратичная форма *вырожденная*, если ранг формы меньше размерности пространства, в котором она определена.

**П р и м е р 2**. *Составить матрицу билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в двумерном пространстве, если билинейная форма:* $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_1y_2$.

<u>*Решение*</u>. Матрица билинейной формы будет иметь вид
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая квадратичная форма:
$f(x,x) = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - 5x_2^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$.

**Виды квадратичных форм**.

1. Квадратичная форма $f(x,x)$ называется *положительно ( отрицательно ) определенной*, если $\forall x \neq \theta$ $f(x,x) > 0$ ( $f(x,x) < 0$).

2. Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если $\exists x, y \in \mathcal{L}$, такие, что одновременно выполняются $f(x,x) > 0$ и $f(y,y) < 0$.

3. Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной)*, если $\forall x \quad f(x,x) \geq 0$ $(f(x,x) \leq 0)$ и $\exists x \neq \theta$, при котором $f(x,x) = 0$.

**Теорема 4**. *Пусть $f(x,y)-$ симметричная билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме $f(x,x)$, тогда форма $f(x,y)$ определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если число, называемое скалярным произведением векторов $x$ и $y$, обозначить символом $f(x,y)$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

1) $f(x,y) = f(y,x)$;
2) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$;
3) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$;
4) $f(x,x) \geq 0,\ f(x,x) > 0, x \neq \theta$.

Так как билинейная форма $f(x,y)$ полярная квадратичной форме $f(x,x)$ симметрична, то аксиома 1) выполняется. аксиомы 2) и 3) в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы. Аксиома 4) выполняется, так как квадратичная форма $f(x,x)$ положительно определена. Значит билинейная форма определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве. □

### 1.3 Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Рассмотрим различные меоды приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т. е. рассмотрим методы выбора такого базиса $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, по отношению к которому квадратичная форма представляется в следующем *каноническом виде*:

$$f(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2, \tag{4}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты $x$ в базисе $f$.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в выражении (4) называются *каноническими коэффициентами.*

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

**Метод Лагранжа**.

**Теорема 5**. *Любая квадратичная форма $f(x, x)$, заданная в $n$-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство теоремы *методом Лагранжа*. Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $f(x, x) \neq 0$ (если форма $f(x, x) \equiv 0$, то ее матрица в любом базисе состоит из нулевых элементов, и поэтому такая форма по определению имеет канонический вид в любом базисе) и в данном базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ имеет вид

$$f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $f(x, x)$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора $x$ будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. (Напомним, что $f(x, x) \neq 0$ и поэтому хотя бы один коэффициент $a_{ij}$ отличен от нуля). Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат (определитель матрицы этого преобразования равен 2, и поэтому это преобразование невырожденное):

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_1 - x_2, \\ &x'_2 = x_1 + x_2, \\ &x'_i = x_i, \ i = 3, \ 4, \ \ldots, \ n. \end{aligned}$$

После этого преобразования коэффициент при $x_i^2$ будет равен $2a_{12}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (5) $a_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (5) ту группу слагаемых, которые содержат $x_1$. Получим

$$f(x,x) = a_{11}x_1^2 \ + \ 2a_{12}x_1x_2 \ + \ \ldots \ + \ 2a_{1n}x_1x_n \ + \sum_{i,j\ =\ 2}^{n} a_{ij}x_ix_j. \qquad (6)$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + x_2\frac{a_{12}}{a_{11}} + \ldots + x_n\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2 -$$

$$-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - \ldots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n.$$

Очевидно, выражение (6) можно теперь переписать так:

$$f(x,x) \ = \ a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 \ + \ \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_ix_j, \qquad (7)$$

где $a_{ij}^{*}$–коэффициенты при $x_ix_j$, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$\begin{aligned} x_1' \ &= \ x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2' \ &= \ x_2, \\ &\ldots \\ x_n' \ &= \ x_n. \end{aligned}$$

С помощью этого преобразования и представления (7) для $f(x,x)$ получим

$$f(x,x) \ = \ a_{11}(x_1')^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_i'x_j'. \qquad (8)$$

Итак, если форма $f(x,x) \ \neq \ 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (8).

Обратимся теперь к квадратичнй форме $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_i'x_j'$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $f(x,x)$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_ix_j \ \neq \ 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразования координат $x_2', \ \ldots, x_n'$, аналогичные описанным выше, и не меняя при этом координату $x_1'$. Очевидно, такого типа преобразования координат $x_1', \ x_2', \ \ldots, \ x_n'$ будут невырожденными.

Ясно что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $f(x,x)$ к каноническому виду (4).

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. $\square$

**Замечание 1.** Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим*. Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

**Замечание 2.** Если форма $f(x,x)$ приведена к каноническому виду (4), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты $\lambda_i$ отличны от нуля. Оставляя в (4) лишь отличные от нуля $\lambda_i$ и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $f(x,x)$:

$$f(x,x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2. \tag{9}$$

Ясно, что $r \leq n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (9) и условия $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$ вытекает, что ранг формы равен $r$. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

**Метод Якоби.**

При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $f(x,x)$ можно указать явные формулы перехода от данного $e = (e_1,\ e_2, ..., e_n)$ базиса к каноническому $e' = (e'_1,\ e'_2, ..., e'_n)$ и указать явные формулы канонических коэффициентов $\lambda_i$.

Введем понятие треугольного преобразования базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $e = (e_1,\ e_2, ..., e_n)$ называется *треугольным*, если оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&e'_1 = e_1, \\
&e'_2 = \alpha_{21} e_1 + e_2, \\
&e'_3 = \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + e_3, \\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&e'_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \ldots + e_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $f(x,x)-$ квадратичная форма. И пусть $A-$ матрица квадратичной формы в базисе $e$.

Пусть $\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots\ ,\ \Delta_n = |A|$ – угловые миноры матрицы $A$.

**Теорема 6**. *Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы $f(x,x)$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $e_1,\ e_2, ..., e_n$ , которое приводит эту квадратичную форму к каноническому виду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коэффициенты $b_{ij}$ квадратичной формы $f(x,x)$ в базисе $e'$ вычисляются по формулам

$$b_{ij} = f(e'_i, e'_j). \tag{11}$$

Используя равенства (10) и линейное свойство квадратичной формы $f(x,x)$ по каждому аргументу, легко заметить, что соотношения (11) будут выполнены, если будут выполнены соотношения:

$$f(e_1, e'_j) = 0, \quad f(e_2, e'_j) = 0 \quad ... \quad f(e_{j-1}, e'_j) = 0, \quad j = 2, 3, ..., n. \tag{12}$$

Запишем формулы (12) в развернутом виде. Для этого подставим в левые части этих формул выражение

$$e'_j = \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j \tag{13}$$

из соотношений (10). Используя далее свойство линейности $f(x,x)$ по каждому аргументу и обозначение $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, получим в результате следующую систему уравнений для неизвестных коэффициентов $\alpha_{jk}$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{1j-1} + a_{1j} & = 0, \\ \alpha_{j1}a_{21} + \alpha_{j2}a_{22} + ... + \alpha_{jj-1}a_{2j-1} + a_{2j} & = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ \alpha_{j1}a_{j-11} + \alpha_{j2}a_{j-12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{j-1j-1} + a_{j-1j} & = 0, \end{array} \right. \tag{14}$$

Определитель этой системы равен $\Delta_{j-1}$. По условию $\Delta_{j-1} \neq 0$. Следовательно, система (14) имеет единственное решение. Таким образом, можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого квадратичная форма $f(x,x)$ приводится к каноническому виду. $\square$

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты $\alpha_{ji}$ искомого треугольного преобразования и формулы для канонических коэффициентов $\lambda_j$. Используя формулу Крамера находим выражение для коэффициентов:

$$\alpha_{ji} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}, \tag{15}$$

где $\Delta_{j-1,i}$ минор матрицы $A$, расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, ...j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., j$. Так как $j$-й столбец должен стоять на $i$-ом месте, а мы приписываем его справа, то необходимо домножить на знак перестановки $j$-го столбца на $i$-е место.

Вычислим канонические коэффициенты $\lambda_j$.

$\lambda_{ij} = b_{jj} = f(e'_j, e'_j) = f(e_j, e'_j) = f(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j) =$
$= \alpha_{ij}a_{j1} + \alpha_{j2}a_{j2} + ... + \alpha_{jj-1}a_{jj-1} + a_{jj}.$

Подставляя выражение (15) для $\alpha_{ji}, \quad i = 1, 2, ..., j-1$ в правую часть последнего соотношения, найдем

$\lambda_j =$

$$= \frac{(-1)^{j+1}\Delta_{j-1,1}a_{j1} + (-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2}a_{j2} + ... + (-1)^{i+j-1}\Delta_{j-1,j-1}a_{jj-1} + a_{jj}\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1}}.$$

Числитель представляет собой $\Delta_j$. Поэтому

$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, ..., n,$

$\lambda_1 = f(e'_1, e'_1) = f(e_1, e_1) = a_{11}.$

**П р и м е р 3**. *С помощью метода Якоби вычислить коэффициенты треугольного преобразования и канонические коэффициенты, если квадратичная форма имеет вид:*

$f(x, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

*Решение*.

Так как форма квадратичная, то матрица ее будет симметричной:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = 2; \quad \Delta_2 = 2; \quad \Delta_3 = 1.$

$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{1}{2}.$

$\alpha_{21} = -\frac{2}{2} = -1; \quad \alpha_{31} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_{32} = 0.$

### 1.4 Закон инерции квадратичных форм.

Мы уже отмечали, что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразованияа, с помощью которого форма приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции квадратичных форм.*

**Теорема 7. (Закон инерции квадратичных форм) .** Число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e$ и $f$ – канонические базисы квадратичной формы $f(x, x)$ ранга $r$ и для $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$

$$f(x, x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_px_p^2 - a_{p+1}x_{p+1}^2 - ... - a_rx_r^2,$$

$$f(x,x) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_{p'} y_{p'}^2 - b_{p'+1} y_{p'+1}^2 - ... - b_r y_r^2,$$

где $a_i > 0,\ b_i > 0, i = 1, 2, ..., r$. Необходимо доказать, что $p = p'$.

1) Докажем, что $p \le p'$. Предположим,что это не выполняется, т.е. $p > p'$. Рассмотрим два подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_p)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(f_{p'+1}, f_{p'+2}, ..., f_n)$,

$\dim(\mathcal{L}1 \bigcap \mathcal{L}_2) = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 - \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = p + (n - p') - \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$.

Так как $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \le n,\ p > p'$, то $\dim(\mathcal{L}_1 \bigcap \mathcal{L}_2) > 0$.

Следовательно, существует $x_0 \ne \theta$ и $x_0 \in \dim(\mathcal{L}_1 \bigcap \mathcal{L}_2)$.

Пусть $x_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... \alpha_p e_p = \beta_{p'+1} f_{p'+1} + ... + \beta_n f_n$.

Тогда

$$f(x_0, x_0) = a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2 + ... + a_p \alpha_p^2 = -b_{p'+1} \beta_{p'+1}^2 - ... - b_r \beta_r^2. \qquad (16)$$

Так как $x_0 \ne \theta$, то $a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2 + ... + a_p \alpha_p^2 > 0,\ -b_{p'+1} \beta_{p'+1}^2 - ... - b_r \beta_r^2 < 0$. Это противоречит (16), и значит, $p \le p'$.

2) $p \ge p'$ доказывается аналогично. $\square$

Введем обозначения:

$i_+ = p$ – положительный индекс инерции − число положительных коэффициентов в каноническом разложении квадратичной формы.

$i_- = q$ – отрицательный индекс инерции − число отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

$r$ – ранг квадратичной формы.

$s = p - q$ – сигнатура квадратичной формы.

Вид квадратичной формы

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \qquad (17)$$

называется *нормальным.*

**Теорема 8. (Критерий знакоопределенности квадратичной формы).** *Для того чтобы квадратичная форма, заданная в $n$-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы в случае положительной определенности $p = n$, а в случае отрицательной определенности $q = n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.**

Пусть форма $f(x,x)$ положительно определена. Тогда выражение (17) примет вид $f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2$.

Если при этом $p < n$, то из последнего выражения следует, что для $x \ne \theta$ с координатами

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_p = 0,\ x_{p+1} \ne 0, \dots, x_n \ne 0$$

форма $f(x,x)$ обращается в нуль, а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы, поэтому $p=n$.

**Достаточность.** Пусть $p=n$. Тогда соотношение (17) имеет вид
$f(x,x)=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$.

Ясно, что $f(x,x)\geq 0$, причем, если $f(x,x)=0$, то $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, т.е. $x=\theta$. Следовательно, $f(x,x)$ – положительно определенная форма.$\Box$

**Замечание.** Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

**Теорема 9. (Критерий знакопеременности квадратичной формы).** *Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы $p\neq 0$ и $q\neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ее представление (17) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные слагаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от нуля.

**Достаточность**. Пусть $p\neq 0$ и $q\neq 0$.
Тогда для вектора $x'=(0,\ 0\ldots 0,\ x_{p+1},\ldots,x_n)$ имеем $f(x',x')<0$, а для вектора $x''=(x_1,x_2,\ldots,x_p,0,\ 0,\ldots,0)$ имеем $f(x'',x'')>0$. Следовательно, форма $f(x,x)$ является знакопеременной. $\Box$

**Теорема 10. (Критерий полуопределённости квадратичной формы).** *Для того, чтобы квадратичная форма $f(x,x)$ была полуопределённой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

*для положительной полуопределённости: $p<n$, $q=0$;*

*для отрицательной полуопределённости: $q<n$, $p=0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай положительно полуопределённой квадратичной формы. Случай отрицательной полуопределенности рассматривается аналогично.

**Необходимость**. Пусть форма $f(x,x)$ положительно полуопределенная. Тогда, очевидно, $p<n$ и $q=0$ ( если бы $p=n$, то форма была бы положительно определённой).

**Достаточность.** Если $p<n$, $q=0$, то $f(x,x)\geq 0$ и для
$x=(0,\ 0,\ldots,x_{p+1},\ldots,x_n)$ имеем $f(x,x)$=0, т.е. $f(x,x)$ – положительно полуопределенная форма. $\Box$

**П р и м е р 4.**
*Дана квадратичная форма* $f(x,x) = {x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2$, $(n = 2)$. *Определить вид формы.*
<u>*Решение*</u>.
${x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2 = ({x_1}^2 + 4x_1x_3 + 4{x_3}^2) + ({x_2}^2 + 2x_2x_3 + {x_3}^2) -$
$- x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - {x_3}^2$.

Произведём замену:
$y_1 = x_1 + 2x_3$;
$y_2 = x_2 + x_3$;
$y_3 = x_3$.
Получим: ${y_1}^2 + {y_2}^2 - {y_3}^2$.
Следовательно, форма является знакопеременной $(p = 2,\ q = 1)$.

<u>**Критерий Сильвестра**</u>.

Пусть форма $f(x,x)$ в базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ определяется матрицей $A_e = (a_{ij})$:

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

и пусть

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n = |A|.$$

**Теорема 11. (Критерий Сильвестра)**.
*Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определённой необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

*Для того, чтобы квадратичноая форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причём* $\Delta_1 < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Докажем сначала, что из условия знакоопределенности квадратичной формы $f(x,x)$ следует $\Delta_i \neq 0$.

Убедимся, что предположение $\Delta_k = 0$ ведет к противоречию – при этом предположении $\exists x \neq \theta$, при котором квадратичная форма обращается в ноль, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, пусть $\Delta_k = 0$. Рассмотрим следующую квадратную однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = & 0, \end{cases}$$

По предположению $\Delta_k = 0$, следовательно, однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение. Далее умножим последовательно первое уравнение на $x_1$, второе – на $x_2$, последнее уравнение – на $x_k$ и сложим все $k$ уравнений. В результате получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы для $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ...0) \neq 0$. Это значение равно нулю, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому мы можем применить метод Якоби приведения формы к сумме квадратов и воспользоваться формулами для вычисления канонических коэффициентов:
$\lambda_1 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ..., $\lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
Т. к. квадратичная форма положительно определённая, то $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$, следовательно, все $\Delta_i > 0$.

Если же $f(x, x)$ – отрицательно определенная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны и знаки угловых миноров будут чередоваться, причем $\Delta_1 < 0$.

**Достаточность.** Пусть все $\Delta_i > 0$, где $i = 1, 2, ..., n$, т.е. угловые миноры отличны от нуля, поэтому мы снова можем использовать метод Якоби.

$\Delta_i > 0$, следовательно, все $\lambda_i > 0$, отсюда по определению следует, что квадратичная форма будет положительно определённой.

Если же знаки $\Delta_i$ чередуются и $\Delta_1 < 0$, то все канонические коэффициенты $\lambda_i < 0$, т.е форма будет отрицательно определенной.$\square$

**П р и м е р 5.** *Дана квадратичная форма:*
$f(x, x) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,\ (n = 3)$.
*Определить, является ли эта форма знакоопределённой.*

*Решение*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0,\ \Delta_3 = |A| = 1 > 0.$$

Все $\Delta_i > 0$, следовательно, квадратичная форма положительно определённая.

**2. Билинейные и квадратичные формы в комплексном линейном пространстве**

Пусть $\mathcal{V}_n$ – комплексное линейное пространство. Комплекснозначную функцию двух аргументов $f(x,y)$, где $x, y \in \mathcal{V}$, будем называть *полуторалинейной формой*, если $\forall\ x, y, z \in \mathcal{V}_n,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения:
1) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$;
2) $f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$;
3) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$;
4) $f(x,\lambda y) = \overline{\lambda} f(x,y)$.

Полуторалинейную форму называют *эрмитовой*, если

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)}\ \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис в комплексном линейном пространстве. Рассмотрим следующее выражение:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_i \tag{18}$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Матрица $A_e = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ называется *матрицей полуторалинейной формы*, а вид (18) называется *общим видом полуторалинейной формы.*

*Компактное представление полуторалинейной формы* имеет вид

$$f(x,y) = [x]_e{}^T A_e \overline{[y]}_e = \overline{[y]}_e A^T [x]_e. \tag{19}$$

*Ранг полуторалинейной формы* – это ранг её матрицы.

Полуторалинейная форма называется *вырожденной*,
если $\mathrm{rg} f(x,y) < \dim(\mathcal{V}_n)$.

**Теорема 12.** *Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда её матрица в любом базисе является эрмитовой.*

**Теорема 13.** *Матрицы полуторалинейной формы $f(x,y)$ в базисах e и f $A_e$ и $A_f$ связаны соотношением*

$$A_f = P^T{}_{e\to f} A_e \bar{P}_{e\to f}$$

Пусть $\mathcal{V}_n$ - комплексное линейное пространство, а $f(x,y)$ – эрмитовая полуторалинейная форма. Числовая вещественнозначная функция $f(x,x)$, которая получается из эрмитовой полуторалинейной формы заменой $y$ на $x$, $x \in \mathcal{V}_n$, называется *эрмитовой квадратичной формой.* Соответственно $f(x,y)$ называется полярной полуторалинейной формой к эрмитовой форме.

Эрмитова форма может быть представлена в виде

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j},$$

$a_{ij} = \overline{a}_{ij}$.

Запись в компактном виде:

$$f(x,x) = [x]_e^T \cdot A_e \cdot \overline{[x]}_e = \overline{[x]}_e \cdot {A_e}^T \cdot [x]_e.$$

**Канонический вид квадратичной формы в комплексном линейном пространстве.**

$$f(x,x) = \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + ... + \lambda_r |x_r|^2,$$

где $r$ - ранг квадратичной формы, $\dim(\mathcal{V}_n) = n$.

В отличие от вещественного случая мы выделяем полный квадрат модуля.

Остаются справедливыми и метод Якоби, закон инерции квадратичных форм и критерий Сильвестра.

**П р и м е р 6.** *Составить матрицу данной эрмитовой полулинейной формы в двумерном пространстве и записать соответствующую квадратичную форму. Определить по критерию Сильвестра вид формы.*

$f(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} - 5x_2\overline{y_2}$.

*Решение*.

$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$.

$f(x,x) = 2|x_1|^2 + (1+i)x_1\overline{x_2} + (1-i)x_2\overline{x_1} - 5|x_2|^2$,

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = -12 < 0$, форма является знакопеременной.

**3. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве**

Пусть билинейная форма задана в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$.

**Лемма.** *Пусть $f(x)$ – линейная форма, рассматриваемая в вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$. Тогда существует единственный элемент $h \in \mathcal{E}_n$, такой, что выполняется:*

$$f(x) = (x, h), \qquad \forall x \in \mathcal{E}_n. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Рассмотрим произвольный ортонормированный базис (ОНБ) $e_1, e_2, ..., e_n$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Возьмем $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ и определим компоненты $h_k = f(e_k)$.

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i,$$

$h$ - элемент пространства, следовательно, он может быть разложен по базису:

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \Rightarrow f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = (x, h).$$

2) Допустим, $h$ не единственное, т.е. существуют $h_1$ и $h_2$, такие, что $\forall x \in \mathcal{E}_n$
$(x_1, h_1) = (x_1, h_2)$,
$(x_1, h_1) - (x_1, h_2) = 0$,
$(x_1, h_1 - h_2) = 0$,
т. к. $x$ - произвольный, предположим, что он равен $h_1 - h_2$. Получаем: $(h_1 - h_2, h_1 - h_2) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $h_1 - h_2 = \theta$, следовательно, $h_1 = h_2$. $\square$

**Теорема 14.** *Пусть $f(x, y)$ - билинейная квадратичная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, такой, что справедливо равенство:*

$$f(x, y) = (x, \varphi y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Зафиксируем элемент $y$ и применим лемму, рассмотренную выше. Существует $h$, для которого выполняется равенство

$h = \varphi y$. Из свойств билинейной формы и скалярного произведения следует данное равенство.
2) Пусть существует два таких $\varphi_1, \varphi_2, : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$.
$\forall x, y \ (x, \varphi_1 y) = (x, \varphi_2 y)$,
$(x, \varphi_1 y) - (x, \varphi_2 y) = 0$,
$(x, (\varphi_1 - \varphi_2) y) = 0$.
Т. к. $x$ – любой, предположим, что $x = \varphi_1 y - \varphi_2 y$.
$\varphi_1 y - \varphi_2 y, (\varphi_1 - \varphi_2) y) = 0$ справедливо при $\varphi_1 y - \varphi_2 y = 0$,
$\varphi_1 y = \varphi_2 y$ (равенство двух операторов),
$\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

**Следствие.** Наряду с равенством (16) справедливо

$$f(x, y) = (\varphi x, y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{17}$$

**Теорема 15.** *Пусть $f(x, y)$ – билинейная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ и пусть $[f]_e = B$ – матрица линейного оператора, фигурирующего в равенстве (17), причем $e$ – ортонормированный базис. Тогда*

$$a_{ij} = b_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n,$$

*где $a_{ij}$ – элементы матрицы билинейной формы в этом базисе.*

# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ
# С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## Часть I. ***Аналитическая геометрия***

Для самостоятельной работы студентов
физического и математического факультетов

УДК 514.072
ББК 22.151 р 30

*Автор*: доцент кафедры геометрии и математического анализа
УО «ВГУ им. П.М.Машерова», кандидат физико-математических
наук ***М.Н.Подоксенов***

*Рецензент*: доцент кафедры прикладкой математики УО «ВГУ им. П.М.Машерова,
кандидат физико-математических наук Л.В.Командина

Данное учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Геометрия» для студентов физического факультета обучающихся по специальности «физика и математика». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

Рекомендуется также для студентов очного и заочного отделений математического факультета, обучающихся по специальности «Математики и информатика».

**УДК 514.072**
**ББК 22.151 р 30**

# *СОДЕРЖАНИЕ.*

# ВВЕДЕНИЕ

Данный курс лекций рассчитан на студентов физического факультета, обучающихся по специальности «физика и математика» и написан в соответствии с учебной программой по данной специальности. Он также будет полезен студентам заочного отделения математического факультета, обучающимся по специальности «математика и информатика».

Курс лекций сопровождается примерами решения задач. Это будет очень полезно студентам заочного отделения при решении контрольных работ и студентам очного отделения при решении индивидуальных практических заданий. Это особенно актуально в связи с тем, что большое количество часов в учебной программе отводится на самостоятельную работу студентов.

Основное внимание уделяется изложению фактического материала. Доказательства приводятся по-возможности кратко.

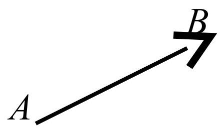
В первую часть курса вошли разделы, относящиеся к аналитической геометрии: векторная алгебра и системы координат, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка. В приложении приводятся сведения из алгебры, необходимые для изучения аналитической геометрии. Это связано с тем, что данные разделы изучаются в курсе алгебры, как правило, слишком поздно. Материал, изложенный мелким шрифтом, считается дополнительным.

Во вторую часть курса предполагается включить разделы: векторное и аффинное пространство, группы преобразований, дифференциальная геометрия, методы изображений.

# ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.

## §1. *Направленные отрезки. Понятие вектора.*

***Определение.*** *Отрезок* $AB$ называется *направленным*, если указано, какая из точек $A$ или $B$ является его началом, а какая концом. Если $A$ – начало, а $B$ – конец, то этот отрезок обозначается , а на чертеже его конец обозначается стрелочкой.




***Определение.*** Длиной направленного отрезка называется длина отрезка $AB$.

***Определение.*** Направленные *отрезки* и называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если лучи $AB$ и $A_1B_1$ сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\uparrow\uparrow$ ($\uparrow\downarrow$).

***Определение.*** Два направленных отрезка и называются *эквивалентными* или *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишем $\sim$. Очевидно, $\sim$ $\Leftrightarrow$ они совмещаются параллельным переносом.

Легко проверить, что данное отношение, определенное на множестве всех направленных отрезков плоскости или пространства обладает следующими свойствами:

**1.** $\sim$ (*рефлексивность*),

**2.** $\sim$ $\Leftrightarrow$ $\sim$ (*симметричность*),

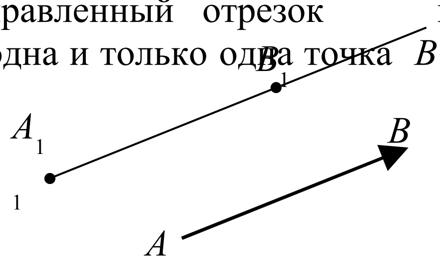
**3.** ($\sim$ & $\sim$)$\Rightarrow$ $\sim$ (*транзитивность*).

Таким образом, отношение, которое мы определили, действительно является отношением эквивалентности (это отношение изучается в курсе алгебры). Поэтому множество всех направленных отрезков распадается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

***Определение.*** *Вектором* называется класс эквивалентных между собой направленных отрезков. Другими словами, каждый направленный отрезок задает вектор, при этом, эквивалентные отрезки задают один и тот же вектор. Направление всех отрезков данного класса называется *направлением вектора*, а их длина – *длиной вектора*. Длина вектора обозначается $| \; |$ .

Если вектор задается направленным отрезком , то пишем $=$, и говорим, что есть *вектор* , *отложенный из точки* $A$ . На чертеже вектор изображается любым из задающих его направленных отрезков.

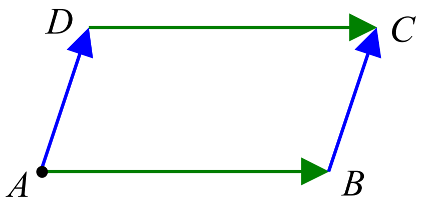
***Предложение* 1.** Пусть задан направленный отрезок и произвольная точка $A_1$. Тогда существует одна и только одна точка $B_1$,



такая что ~. Другими словами, данный вектор можно отложить из любой точки, и притом, единственным образом.

***Упражнение.*** Доказательство проведите самостоятельно

***Пример.*** Пусть *ABCD* – параллелограмм. Тогда ~ , и поэтому эти направленные отрезки они задают один и тоже вектор. Аналогично и задают один и тот же вектор.

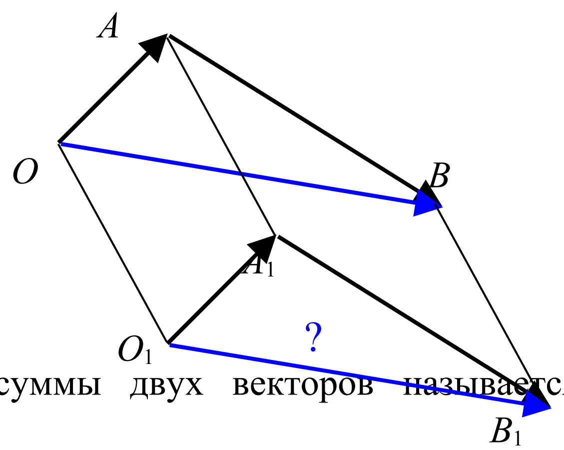



***Определение.*** Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается . Вектор, длина которого равна 1, называется единичным.

***Определение.*** Векторы и называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если задающие их направленные отрезки сонаправлены (противоположно направлены). Пишем ↑↑ ( ↑↓ ). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Пишем || . Считается, что у направление неопределено и он коллинеарен любому вектору. Три и более векторов, параллельных одной плоскости называются *компланарными.*

## §2. *Операции над векторами.*

***Определение.*** Пусть заданы два вектора и . Отложим вектор от произвольной точки *O*: =, а из точки *A* отложим вектор : = . Пусть – вектор, который задается направленным отрезком . Тогда называется *суммой векторов* и . Пишем = + .




Этот способ построения суммы двух векторов называется *правилом треугольника.*

Однако, в нашем определении использовалась произвольная точка *O*. Возникает вопрос: что если мы начнем построение от другой точки $O_1$? Не получится ли другой вектор ? Другими словами, требуется еще доказать, что наше определение корректно. Самостоятельно докажите, пользуясь чертежом, что (~ & ~) ⇒ ~.

***Свойства операции сложения векторов.***

$\forall$ , , выполнено

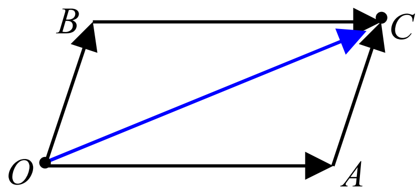
**1.** + = + (*коммутативность*);

**2.** ( + )+ = (*ассоциативность*);

**3.** + = .

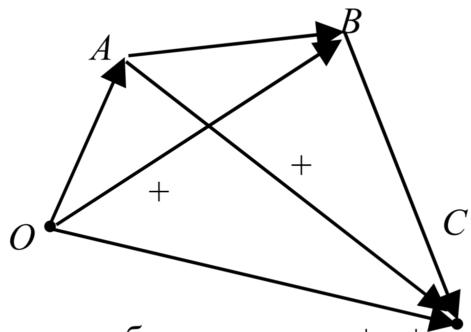
**4.** $\exists!$ такой что + = . Этот вектор называется *противоположным вектором* к и обозначается − .

***Доказательство.*** **1.** Отложим и от одной точки *O*: = , = . Достроим $\Delta OAB$ до параллелограмма *OACB*. Пусть = . Очевидно, что ~, т.е. = . Тогда по правилу треугольника + = . С другой стороны, ~, ⇒ = и по правилу треугольника + = .




Данный способ построения суммы векторов называется *правилом параллелограмма.*

**2.** Доказательство обозначено на чертеже. Здесь мы видим, что с одной стороны, ( + )+ = = , а с другой стороны, + ( + ) = .




Это свойство позволяет использовать обозначение + + без расстановки скобок.

**3.** Пусть = , а можем задать с помощью направленного отрезка . Тогда по правилу треугольника + = . Значит, + = .

**4.** Пусть = . Зададим = . Тогда по правилу треугольника + = . Значит, + = . Тем самым мы доказали существование противоположного вектора. Докажем единственность.

Предположим, что существует еще один вектор такой что + = . Прибавим к последнему равенству справа и слева вектор :

( + )+ = + .

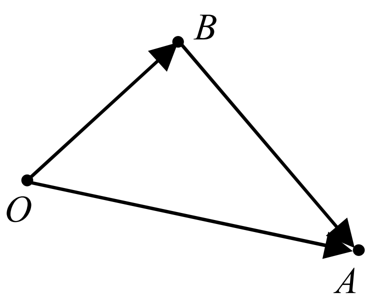
Используя свойства **1** и **2** получаем

( + )+ = + ⇒ + = + ⇒ = . ■

***Определение.*** *Разностью двух векторов* и называется такой вектор , что + = . Пишем = − .

Докажем, что разность векторов существует и определяется однозначно.

Отложим и от одной точки *O*: = , = , и пусть = . Тогда по правилу



треугольника $+=$ (*). Значит, разность двух векторов существует.

Докажем единственность. Прибавим справа и слева к к равенству (*) вектор $-$:

$$(+)+(-)=+(-).$$

Используя свойства **1** и **2** получаем

$$+=+(-) \;\Rightarrow\; =+(-).$$

Тем самым мы доказали, что $-\ =+(-)$. А поскольку единственность противоположного вектора мы уже доказали, то и разность определяется однозначно. Кроме того, мы увидели, как построить разность на чертеже.

***Определение.*** Произведением вектора  на число $\lambda$ называется такой вектор , что

**1.** $\uparrow\uparrow$, если $\lambda>0$, и $\uparrow\downarrow$, если $\lambda<0$;

**2.** $|\,|=|\lambda|\cdot|\,|$.

Пишем $=\lambda$. (Часто еще добавляют **3.** если $\lambda=0$, то $=$. Но это следует из **2.**)

***Свойства операции умножения вектора на число.***

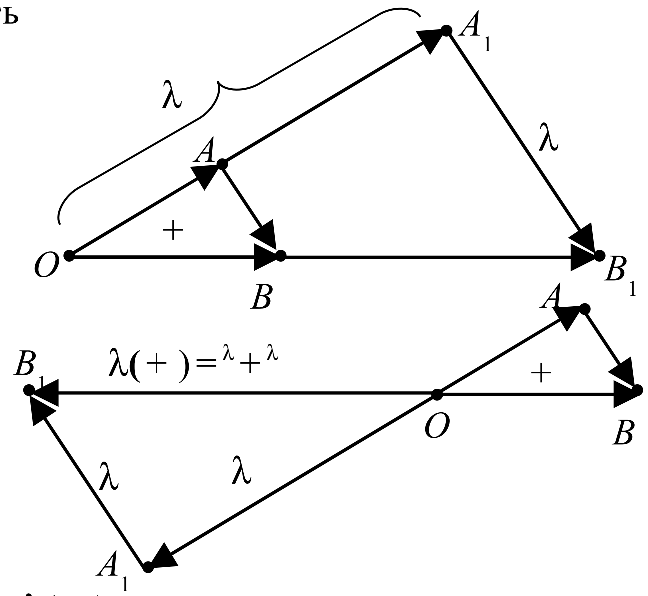
**1.** $\lambda(+)=\lambda+\lambda$; **3.** $(\lambda+\mu)=\lambda+\mu$;

**2.** $\lambda(\mu)=(\lambda\mu)$; **4.** $1\cdot=$.

***Доказательство.*** **1.** Пусть

$=,\ =,$

$\lambda=,\ \lambda=.$ (**)




Тогда по правилу треугольника

$+=\ ,\ \lambda+\lambda=.$

Нам требуется доказать, что $\lambda(+)=.$

Из (**) вытекает подобие треугольников $\Delta OAB\sim\Delta OA_1B_1$ по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $|\ \ |$ и $\|=\lambda\|$.

Отсюда, с учетом $+=$, вытекает $\lambda(+)=$. На первом рисунке изображен случай $\lambda>0$, а на втором – $\lambda<0$. В случае же $\lambda=0$, обе части равенства дают . ■

***Упражнение.*** Остальные свойства докажите самостоятельно.

***Теорема* 1** (*первый признак коллинеарности векторов*). *Для того, чтобы ненулевые векторы и были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $\lambda$, *что* $=\lambda$.

***Доказательство.*** <u>Достаточность</u> вытекает непосредственно из определения произведения вектора на число. Если $=\lambda$, то по определению $||$.

<u>Необходимость</u>. Пусть $||$.

<u>1 случай</u>: $\uparrow\uparrow$. Положим $\lambda=|\,|/|\,|>0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\uparrow\uparrow \Rightarrow \lambda\uparrow\uparrow,\\ |\lambda|=|\lambda|\,|\,|=\lambda|\,|=|\,|=|\,|.\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda= .$$

<u>2 случай</u>: $\uparrow\downarrow$. Положим $\lambda=-|\,|/|\,|<0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\uparrow\downarrow \Rightarrow \lambda\uparrow\uparrow,\\ |\lambda|=|\lambda|\,|\,|=-\lambda|\,|=|\,|=|\,|.\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda= .$$

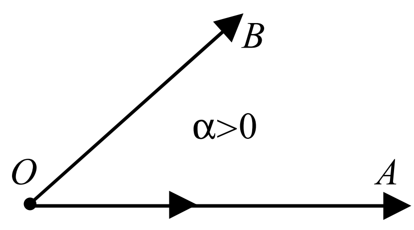
Что и требовалось доказать. ■

В процессе доказательства мы показали, как решить следующую задачу: найти вектор сонаправленный с данным вектором и имеющий заданную длину $|\,|=\beta$. Это будет вектор $=$ . В частности, единичный вектор $\uparrow\uparrow$ находится так: $=$ . Такой вектор называется <u>*ортом вектора*</u> .

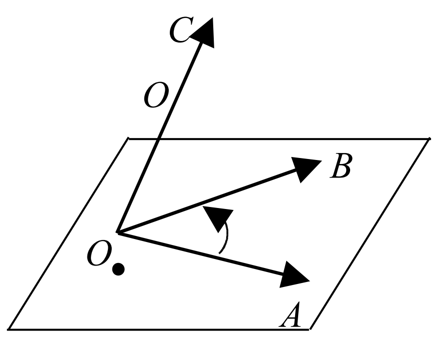
## §3. *Угол между векторами. Ориентация пары векторов на плоскости или тройки векторов в пространстве.*

***Определение.*** Пусть и – два ненулевых вектора. Отложим их из одной точки $O$: $=$, $=$. Тогда <u>*углом между векторами*</u> и называется угол между лучами $OA$ и $OB$, т.е. $\alpha=\angle AOB$. Пишем $\alpha=\angle(\,,\,)$.

Если речь идет о векторах на плоскости, то можем ввести понятие <u>*ориентированного угла между векторами*</u>. Если кратчайший поворот от луча $OA$ к лучу $OB$ осуществляется против часовой стрелки, то считаем, что $\alpha>0$, а если по часовой – то $\alpha<0$. Таким образом, $-\pi<\alpha\le\pi$. Если $\alpha>0$, то <u>*пара векторов*</u> $(\,,\,)$ называется <u>*правой*</u>, а если $\alpha<0$ – то <u>*левой*</u>.




В пространстве понятие ориентированного угла не имеет смысла. Если посмотреть на плоскость, в которой лежат лучи



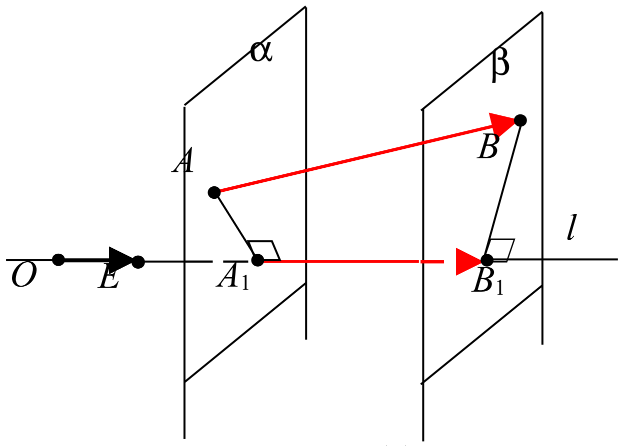
*OA* и *OB* с одной стороны, то увидим, что кратчайший поворот от *OA* к *OB* осуществляется в одном направлении, а если посмотреть на плоскость с другой стороны, то мы увидим тот же поворот в другом направлении.

Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора , , . Отложим их из одной точки *O*: = , = , = . [Тройка векторов](#) ( , , ) называется [правой](#), если кратчайший поворот от луча *OA* к лучу *OB*, если смотреть из точки *C* , выглядит как осуществляющийся против часовой стрелки. Соответственно, если этот поворот выглядит как осуществляющийся по часовой стрелке, то [тройка векторов](#) ( , , ) называется [левой](#). На рисунке изображена правая тройка векторов.

## §4. *Проекция вектора на ось.*

Пусть $l$ – некоторая прямая в пространстве. Выберем точку $O\in l$ и единичный вектор || $l$. Построим направленный отрезок = . Прямая $l$ с отрезком называется [осью](#). Иногда говорят, что ось – это прямая, на которой задано направление.

***Определение.*** Пусть – произвольный вектор, а – произвольный направленный отрезок, который представляет . Опустим перпендикуляры $AA_1$ и $BB_1$ на прямую $l$. Пусть = . Тогда вектор называется [векторной проекцией](#) вектора на ось $l$ и обозначается $\pi_l$.




Мы имеем || . Поэтому согласно теореме 1 существует такое число $p$, что = $p$. Это число называется [скалярной проекцией](#) вектора на ось $l$ . Поскольку – единичный вектор, то $p$ – это длина вектора , если ↑↑, и $p$ = – ||, если ↑↓. Будем обозначать скалярную проекцию так: $\Pi_l$.

Зная скалярную проекцию вектора мы можем найти его векторную проекцию:

$$\pi_l = (\Pi_l); \qquad (*)$$

Если ⊥, то, очевидно, $A_1 = B_1$ и $\Pi_l = 0$.

Необходимо еще доказать, что определения скалярной и векторной проекции корректны, т.е. не зависят от выбора направленного отрезка , который представляет вектор . Другими словами, если мы отложим вектор от другой точки, то его скалярная и векторная проекции не изменятся,– и это надо доказать.

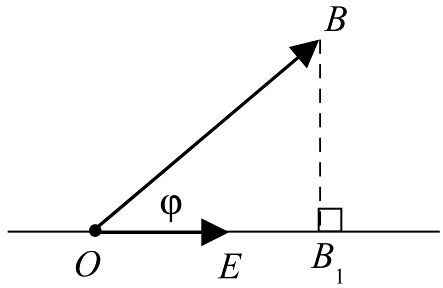
Проведем через точки $A$ и $B$ плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярно $l$. Тогда $|p| = |\Pi_l|$ есть расстояние между $\alpha$ и $\beta$. Выберем другой направленный отрезок , представляющий и проведем через точки $A'$, $B'$ плоскости $\alpha'$ и $\beta'$ перпендикулярно $l$. Направленные отрезки и эквивалентны, а значит, они совмещаются параллельным переносом. При этом переносе плоскость $\alpha$ совместится с $\alpha'$, а плоскость $\beta$ – с $\beta'$. Значит, расстояние между $\alpha'$ и $\beta'$ равно расстоянию между $\alpha$ и $\beta$, и оно равно $|p|$. Поэтому $|p|$ не зависит от выбора направленного отрезка. Направление векторной проекции также не изменится при переносе, поэтому и знак $p$ не изменится. Итак, скалярная проекция не зависит от выбора направленного отрезка, представляющего . В силу равенства (*) $\pi_l$ также не зависит от выбора направленного отрезка.

***Теорема 2.*** *Свойства проекции вектора на ось.*

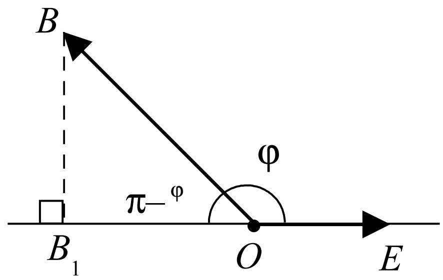
**1.** $\Pi_l = |\ | \cos\angle(\ ,\ )$;

**2.** $\Pi_l(\lambda\ ) = \lambda\Pi_l$, $\pi_l(\lambda\ ) = \lambda(\pi_l)$;

**3.** $\Pi_l(\ +\ ) = \Pi_l + \Pi_l$, $\pi_l(\ +\ ) = \pi_l + \pi_l$.




***Доказательство.*** **1.** Поскольку определение проекции не зависит от выбора точки $A$, из которой отложен вектор , мы можем отложить его из точки $O$. Обозначим $\varphi = \angle(\ ,\ )$.




<u>*1 случай*</u>: $\varphi \le \pi/2$. Тогда из $\Delta OBB_1$ получим, что

$$p = |OB_1| = |OB| \cdot \cos\varphi = |\ | \cos\varphi.$$

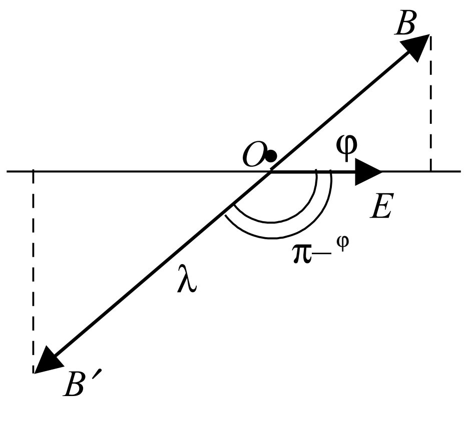
<u>*2 случай*</u>: $\varphi > \pi/2$. Тогда из $\Delta OBB_1$ получим, что

$$p = -|OB_1| = -|OB| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\ | \cos\varphi.$$

**2.** Для скалярных проекций:

<u>*1 случай*</u>: $\lambda > 0$. Тогда $\lambda\ \uparrow\uparrow\ $ и $\angle(\ ,\lambda\ ) = \varphi$. Значит,

$$\Pi_l(\lambda\ ) = |\lambda\ | \cos\angle(\ ,\lambda\ ) =$$
$$= \lambda|\ | \cos\varphi = \lambda\Pi_l.$$




<u>*2 случай*</u>: $\lambda < 0$. Тогда $\lambda\ \uparrow\downarrow\ $, $\angle(\ ,\lambda\ ) = \pi - \varphi$ и $\cos\angle(\ ,\lambda\ ) = -\cos\varphi$,

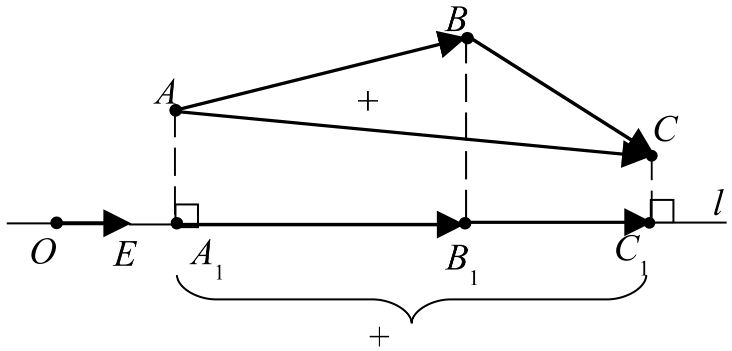
$$\Pi_l(\lambda\ ) = |\,\lambda\ |\cos\angle(\ ,\lambda\ ) = -\lambda|\ |\ (-\cos\varphi) =$$
$$= \lambda|\ |\cos\angle(\ ,\ ) = \lambda\Pi_l\ .$$

3 *случай*: $\lambda = 0$. Тогда равенство очевидно.

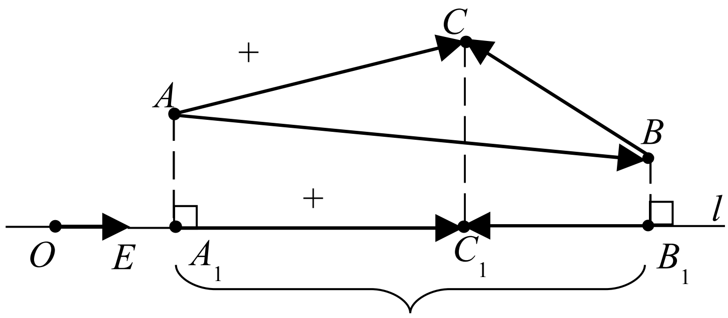
Для векторных проекций с помощью равенства (*) получаем:

$$\pi_l(\lambda\ ) = (\Pi_l(\lambda\ ))\ \cdot\ = \lambda(\Pi_l\ )\ \cdot\ = \lambda(\pi_l\ ).$$

**3.** Доказательство для векторных проекций показано на чертеже, но только для случая векторов на плоскости. Рисунок для векторов в пространстве можно найти в учебнике [10].




Для скалярных проекций равенство вытекает из равенства для векторных проекций. Например, в случае, изображенном на втором рисунке,




$\Pi_l(\ +\ ) = |A_1C_1|$,

$\Pi_l\ = |A_1B_1|$,

$\Pi_l\ = -\,|B_1C_1|$,

и мы видим, что

$$|A_1C_1| = |A_1B_1| + (-\,|B_1C_1|).\ \blacksquare$$

## §5. *Скалярное произведение векторов.*

***Определение.*** *Скалярным произведением* двух векторов  и  называется *число*

$$\ \cdot\ = |\ |\ |\ |\ \cos\angle(\ ,\ ). \qquad (1)$$

Число $\ ^2 = \ \cdot\ $ называется *скалярным квадратом* вектора .

Из определения получаем

$$\ ^2 = \ |\ |\ |\ |\cos 0^\circ = |\ |^2 \quad \Rightarrow \quad |\ | = \ .$$

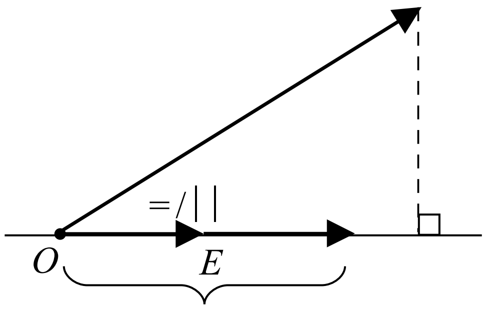
Также из определения очевидно, что равенство $\ \cdot\ = 0$ возможно только в следующих случаях: 1. $|\ | = 0$, 2. $|\ | = 0$, 3. $\angle(\ ,\ ) = \pi/2$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

***Теорема 3.*** **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

**2.** *Для того, чтобы ненулевые векторы и были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю* ( $\perp \;\Leftrightarrow\; \cdot = 0$).

Согласно п°1 теоремы 2 величина $|\;|\cos\angle(\;,\;)$ равна скалярной проекции вектора на ось, направление которой определяется вектором . Обозначим эту величину П. Тогда




$$\cdot = |\;|\cdot\Pi = |\;|\,\Pi. \qquad (2)$$

***Свойства скалярного произведения.***

**1.** $\cdot = \cdot$ (*коммутативность*);

**2.** $(\lambda)\cdot = \lambda(\;\cdot\;)$; (*линейность*)

**3.** $\cdot(\;+\;) = \cdot + \cdot$;

**4.** $\cdot \geq 0$, и $\cdot = 0 \Leftrightarrow =$ (*положительная определенность*).

***Доказательство.*** **1.** Вытекает непосредственно из определения.

**2.** Согласно формулам (2) и свойствам скалярной проекции (п°2 теоремы 2)

$$(\lambda)\cdot = |\;|\,\Pi(\lambda) = |\;|(\lambda\Pi) = \lambda(|\;|\,\Pi) = \lambda(\;\cdot\;).$$

**3.** Согласно п°3 теоремы 2 и формулам (2) имеем

$$\cdot(\;+\;) = |\;|\,\Pi(\;+\;) = |\;|(\Pi + \Pi) = |\;|\,\Pi + |\;|\,\Pi = \cdot + \cdot$$

**4.** Вытекает непосредственно из п°1 теоремы 3. ■

***Замечание.*** Если мы знаем, чему равно скалярное произведение векторов и и знаем их длины, то мы можем вычислить угол между ними:

$$\cos\angle(\;,\;) = \;. \qquad (3)$$

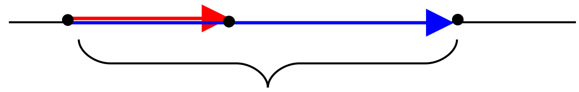
Используется также следующее обозначение для скалярного произведения: ( , ).

## §6. *Координаты вектора и точки на прямой.*

Пусть $l$ – произвольная прямая. Рассмотрим множество всех векторов параллельных $l$. Пусть – один из них. Назовем его базисным. Пусть $\| l$ – другой вектор.

*O* *A* *B* *l*

Тогда $||$, а значит, согласно теореме 1,найдется такое число $x$, что $=x$.



Число $x$ называется *[координатой вектора](#)* относительно базиса $\mathcal{B}=\{\}$. Пишем $(x)_{\mathcal{B}}$ .

Если $=y$, то $+=(x+y)$, а если $\alpha$ – произвольное число, то $\alpha=(\alpha x)$ . Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

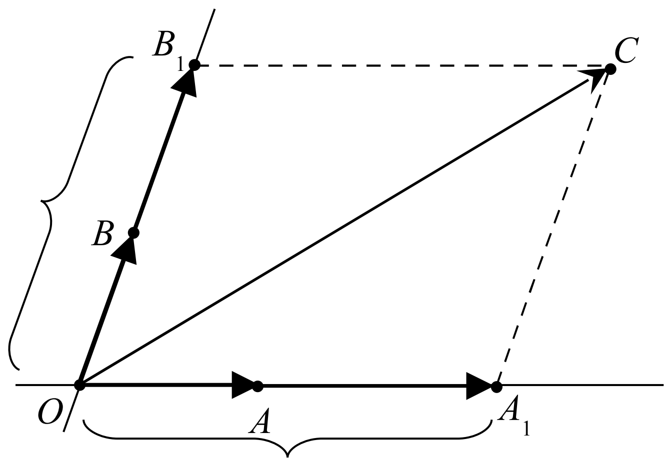
Выберем теперь произвольную точку $O\in l$. Пару $\mathcal{R}=\{O,\ \}$ назовем *репером*. Пусть $B$ – произвольная точка на прямой, а $=$ , и $(x)_{\mathcal{B}}$ . Тогда $x$ называется *координатой точки* $B$ относительно репера $\mathcal{R}$ .

Очевидно, точка $O$ делит прямую $l$ на два луча. На одном из них точки имеют координату $x\geq 0$, а на втором – $x\leq 0$. Точка $O$ называется началом координат. Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *единичными*, если $||=1$. Очевидно, что в этом случае $|OB|=||=|x|||=|x|$.

Если $A$ – такая точка, что $=$, то репером еще называют пару $\{O,A\}$.

## §7. *Координаты вектора и точки на плоскости.*

Пусть на плоскости заданы два неколлинеарных вектора , и произвольная точка $O$. Пару $\mathcal{B}=\{,\}$ назовем *базисом*, а тройку $\mathcal{R}=\{O,\ ,\ \}$ – *аффинным репером*. Пусть – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки $O$:




$=,=,=.$

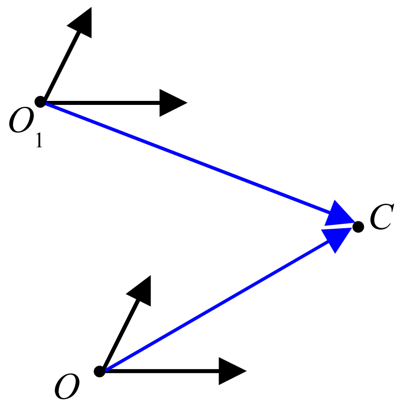
Проведем прямые $l_1=OA$ , $l_2=OB$. Построим параллелограмм, две стороны которого лежат на прямых $l_1$, $l_2$, так чтобы $C$ являлась его вершиной. Пусть $A_1$ и $B_1$ – вершины параллелограмма, лежащие на $l_1$ и $l_2$ соответственно. Пусть $=$, $=$. Тогда по правилу параллелограмма $=+$. Поскольку $||$, а $||$, то существуют такие числа $x_1, x_2$ , что $=x_1$ , $=x_2$ $\Rightarrow$

$$=x_1+x_2. \qquad (4)$$

Это выражение называется *разложением вектора* *по базису* $\mathcal{B}=\{,\}$. Числа $x_1, x_2$ называются *координатами вектора* *в данном базисе*. Они же называются *координатами точки* $C$ *относительно репера* $\mathcal{R}=\{O, \ , \ \}$. Пишем $(x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$ , $C(x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ . Если заранее известно, о каком базисе или репере идет речь, то их обозначение к координатам не добавляют. Репером на плоскости также называют тройку точек $\{O, A, B\}$.

Точка $O$ называется *началом координат*. Прямые $l_1$, $l_2$ вместе с выбранными на них направленными отрезками , называются координатными осями. А совокупность координатных осей и начала координат называется *аффинной системой координат* (СК) на плоскости. Иногда *репером* называют также тройку точек $\{O, A, B\}$, не лежащих на одной прямой.

Вектор называется *радиус-вектором* точки $C$ в данной СК или в данном репере. Если мы выберем другое начало координат $O_1$, то та же самая точка $C$ будет задаваться другим радиус-вектором = . Поэтому ее координаты изменятся. Координаты же вектора не зависят от выбора начала координат.




Действительно, пусть мы имеем еще одно разложение:

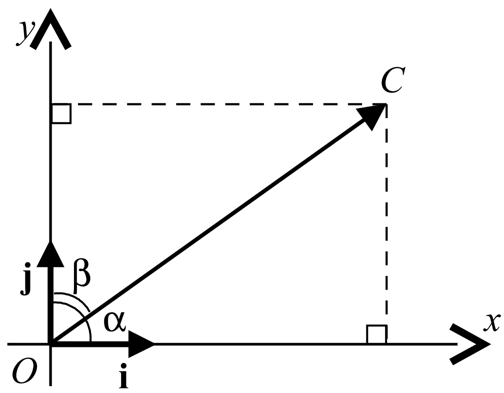
$$=y_1+y_2, \qquad (4')$$

где, например, $x_2\neq y_2$. Вычтем (4′) из (4):

$$=(x_1-y_1)+(x_2-y_2) \quad \Rightarrow \quad = .$$

Мы получили, что || , но мы с самого начала предполагали, что векторы и неколлинеарны. Противоречие. Значит, $x_2 = y_2$. Аналогично доказывается, что $x_1=y_1$.

***Определение.*** Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *ортонормированными*, если базисные векторы являются единичными и взаимно перпендикулярными (| | = | | =1 и $\cdot=0$). В этом случае СК тоже называется *ортонормированной*. Если, к тому же, пара ( , ) является правой, то СК называется *декартовой*.




Тогда приняты следующие обозначения: координаты $(x, y)$, координатные оси – $Ox$, $Oy$, базисные векторы – $\mathbf{i}$ , $\mathbf{j}$ , направленные отрезки на осях – $OE_1$, $OE_2$ . Векторы **i**, **j** называются *базисными ортами*.

Пусть произвольный вектор в декартовой СК имеет координаты $(x, y)$, т.е. $= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Домножим это равенство скалярно на вектор **i**:

$$\cdot\, \mathbf{i} = x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) = x\cdot 1 + y\cdot 0 = x.$$

А, с другой стороны,

$$\cdot\, \mathbf{i} = |\ |\ |\,\mathbf{i}|\cos\angle(\ ,\mathbf{i}) = |\ |\cos\angle(\mathbf{i},\ ) = \Pi_{Ox}.$$

Значит, $x = \Pi_{Ox}$ . Аналогично получаем $y = \Pi_{Oy}$. Таким образом, *в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси*.

Пусть $\alpha = \angle(\mathbf{i},\ )$, $\beta = \angle(\mathbf{j},\ )$. Тогда величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* вектора .

Пусть в произвольной аффинной СК, которая задаётся репером $\mathcal{R} = \{O, , \}$ известны координаты двух векторов: $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$. Тогда

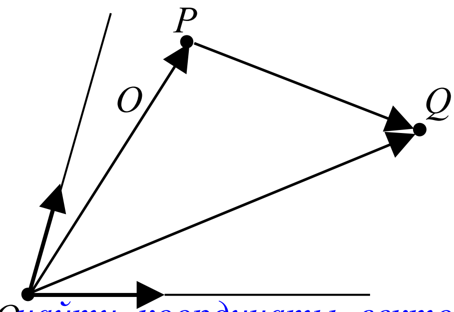
$$+ \ = (x_1 + x_2 ) + (y_1 + y_2 ) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2).$$

$$\lambda = \lambda(x_1 + x_2 ) = (\lambda x_1) + (\lambda x_2).$$

Значит, вектор $+$ имеет координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, а вектор $\lambda$ имеет координаты $(\lambda x_1, \lambda x_2)$. Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*. Также легко убедиться, что при вычитании векторов их координаты вычитаются.

Допустим, нам известны координаты двух точек $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, а $=$. Выясним, как найти координаты этого вектора.

Пусть $=$, $=$. Согласно определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Значит, $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$. По правилу тре-угольника $+ =$ , т.е. $= -$ .
Значит, $(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

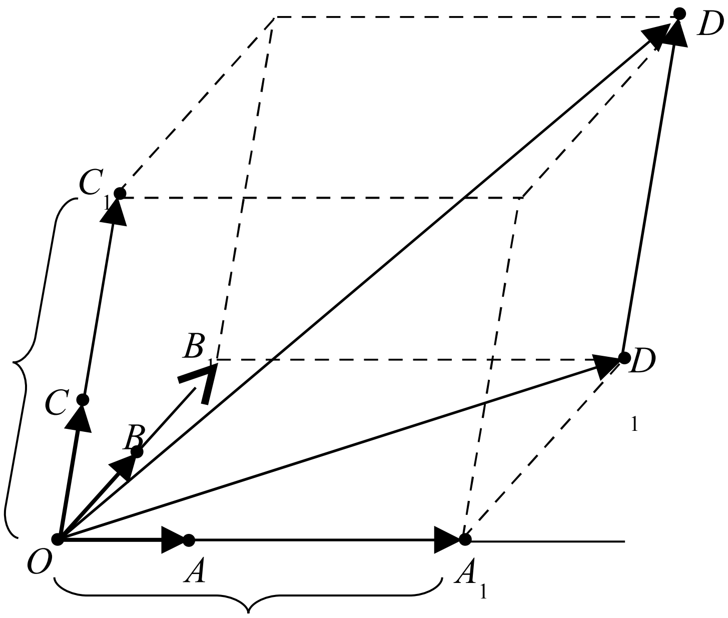



Таким образом, *для того, чтобы найти координаты вектора надо от координат его конца вычесть координаты начала*.

## §8. *Координаты вектора и точки в пространстве.*

Пусть в пространстве заданы три некомпланарных вектора , , . Назовем их *базисными*, а тройку $\mathcal{B}$ = {, , } – *базисом*. Пусть $O$ – произвольная точка. Четверку $\mathcal{R}$= {$O$, , , } назовем *аффинным репером в пространстве*. Пусть – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки $O$:

= , =,
=, = .




Проведем прямые $l_1 = OA$, $l_2 = OB$, $l_3 = OC$. Построим параллелепипед так, чтобы три его ребра лежали на этих прямых, а точка $D$ была вершиной. Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$ – вершины параллелепипеда, лежащие на прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$, а $D_1$ – четвертая вершина основания. Пусть

=, =, =, =.

Тогда = , и по правилу треугольника = + . А по правилу параллелограмма =+ . Значит, = + + . Но || , || , || , и по признаку коллинеарности векторов существуют такие числа $x_1, x_2, x_3$, что $= x_1$, $= x_2$, $= x_3$ $\Rightarrow$

$$= x_1 + x_2 + x_3 . \qquad (5)$$

Это выражение называется *разложением вектора по базису* $\mathcal{B}$ . Числа $x_1, x_2, x_3$ называются *координатами вектора* в этом базисе. Они же называются *координатами точки* $D$ относительно репера $\mathcal{R}$ . Пишем $(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$ , $D(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ . Репером также называют четверку точек $\{O, A, B, C\}$.

Вектор называется *радиус-вектором* точки $D$ в данном репере. Таким образом, по определению *координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора*. Точка $O$ называется началом координат, прямые $l_1$, $l_2$, $l_3$, вместе с выбранными на них направленными отрезками , , , называются координатными осями, а совокупность координатных осей и начала называется *аффинной* *системой координат* в пространстве. Иногда *репером* называют четвёрку точек $\{O, A, B, C\}$, не лежащих в одной плоскости.

Если мы выберем другое начало координат, то та же самая точка $D$ будет задаваться другим радиус-вектором $\Rightarrow$ ее координаты изменятся. Координаты же вектора не зависят от выбора начала координат. Действительно, пусть имеем еще одно разложение

$$= y_1 + y_2 + y_3, \qquad (5')$$

где, например, $y_3 \neq x_3$. Вычтем $(5')$ из $(5)$:

$$= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3), \quad \Rightarrow$$

$$= + .$$

Значит, вектор лежит в одной плоскости с векторами и . А мы с самого начала предполагали, что векторы , , некомпланарны. Противоречие. Значит, $y_3 = x_3$. Аналогично доказывается, что $y_2 = x_2$, $y_1 = x_1$. ■

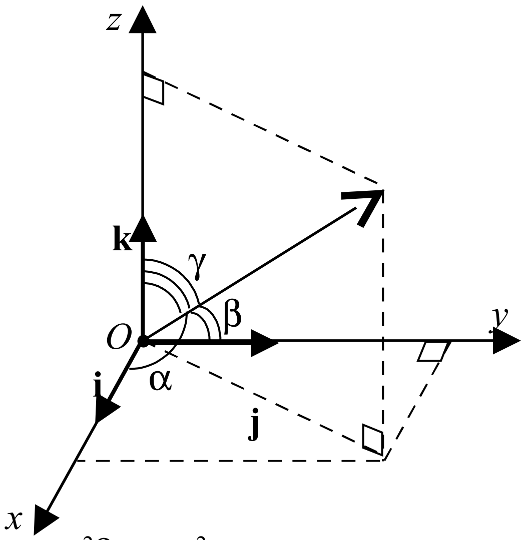
Так же, как и на плоскости доказывается, что *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*. А *для того, чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца отнять координаты начала*.

Если векторы , , единичные и взаимно ортогональные, то базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *ортонормированными*. Если, к тому же, векторы , , образуют правую тройку, то СК называется *декартовой*. В этом случае приняты обозначения базисных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; координат – $x, y, z$; координатных осей – $Ox$, $Oy$, $Oz$; направленных отрезков на осях – $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$.

Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ называются *базисными ортами*.

Так же, как и на плоскости доказывается, что в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси.

Пусть $\alpha = \angle(\mathbf{i}, )$, $\beta = \angle(\mathbf{j}, )$, $\gamma = \angle(\mathbf{j}, )$. Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора .




Они обладают свойством: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

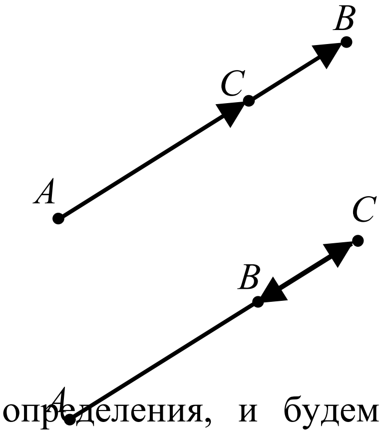
***Теорема 1′.*** *(второй признак коллинеарности векторов).*

*Для того, чтобы два ненулевых вектора на плоскости или в пространстве были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны* ( $(a_1, a_2, a_3) \,||\, (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow\ =\ =\ $).

***Доказательство***. Согласно первому признаку коллинеарности векторов $||\ \Leftrightarrow\ \exists\lambda:\ =\lambda\ \Leftrightarrow\ a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3 \Leftrightarrow\ \ \Leftrightarrow\ =\ =\ =\lambda$.

■

## §9. *Деление отрезка в данном отношении.*




***Определение.*** Пусть точка $C$ лежит на отрезке $AB$. Говорим, что $C$ *<u>делит отрезок</u>* $AB$ *<u>в отношении</u>* $\lambda_1{:}\lambda_2$, если

$$=\ \Leftrightarrow\ \lambda_2|AC|=\lambda_1|CB|.$$

Учитывая, что $\uparrow\uparrow$, последнее равенство можно переписать так:

$$\lambda_2=\lambda_1. \qquad (6)$$

Теперь мы введем обобщение нашего определения, и будем говорить, что точка $C$ *<u>делит отрезок</u>* $AB$ *<u>в отношении</u>* $\lambda_1{:}\lambda_2$ , если выполнено (6). Такое определение означает, что $C$ может лежать на прямой $AB$ за пределами отрезка $AB$, если $\lambda_1{:}\lambda_2$ отрицательно. Число $\lambda=\lambda_1/\lambda_2$ ( $=\lambda$) называется простым отношением точек $A$, $B$, $C$ и обозначается $(AB, C)$ или $(ABC)$.

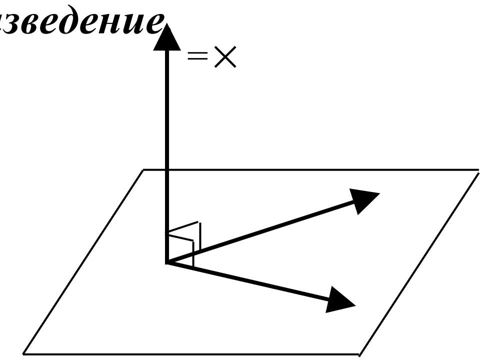
Пусть нам известны координаты концов отрезка: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $C(x, y, z)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1{:}\lambda_2$. Самостоятельно выведите из равенства (6), что

$$x=\ ,\ y=\ ,z=\ .$$

Эти формулы также будут доказаны на практических занятиях. В частности, если $C$ делит отрезок $AB$ пополам, то

$$x=\ ,\ y=\ ,z=\ .$$

## §10. *Векторное произведение*



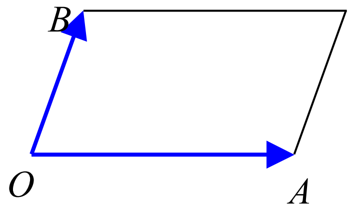

***Определение.*** *<u>Векторным произведением двух векторов</u>* и называется такой *<u>вектор</u>* , что

1. $\perp,\ \perp$;
2. тройка $(,\,,\,)$ – правая;
3. $||=||\,||\sin\angle(,\,)$.

Пишем $=\times$ (используется также обозначение $=[,]$ ).

Чрезвычайно распространена на экзамене следующая ошибка. В ответ на вопрос: «Дайте определение векторного произведения» студенты пишут только п°3 определения, к тому же, зачастую, опуская модуль у . Такой ответ классифицируется как полное отсутствие ответа. Невозможно определить вектор, задав только его длину. Необходимо задать еще его направление. П°1 указывает, что вектор $\times$ направлен по общему перпендикуляру к и . Но таких векторов заданной длины можно найти два. Поэтому необходим еще и п°2.

***Теорема* 4.** *Модуль векторного произведения двух векторов* и *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* и , *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*




***Доказательство.*** $S = |\,|\,|\,|\sin\angle AOB =$

$= |\,|\,|\,|\sin\angle(\,,\,) = |\times|.$ ■

***Следствие.*** $\times = \Leftrightarrow \,||\,$ .

*В частности, для любого вектора* *выполнено* $\times =$ .

Действительно, $\times = \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow$ стороны параллелограмма параллельны, либо длина одной из них равна нулю. Поскольку нулевой вектор считается коллинеарным любому, то это равносильно $||$ .

***Свойства векторного произведения.***

**1.** $\times = -\times$ ,

**2.** $(\lambda)\times = \lambda(\times)$,

**3.** $\times(+) = \times + \times$.

Геометрическое доказательство этих свойств можно найти в учебнике. Мы же докажем их после того, как получим формулу для вычисления векторного произведения в декартовых координатах.

## §11. *Формулы для вычисления скалярного и векторного произведений в декартовых координатах.*

Пусть в пространстве задана декартова СК, **i**, **j**, **k** – базисные орты. Пусть $(a_1, a_2, a_3)$, $(b_1, b_2, b_3)$. В соответствии со свойствами скалярного произведения мы можем при скалярном умножении векторов раскрывать скобки, как при умножении чисел. Поэтому

$$\cdot = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_1b_2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_1b_3\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} +$$
$$+ a_2b_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_2b_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + a_2b_3\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_3b_2\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Нам известно, что **i**, **j**, **k** – единичные и взаимно ортогональные $\Rightarrow$ $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, и это же верно для произведений в другом порядке. Поэтому

$$\cdot = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,. \tag{7}$$

$$\Rightarrow\ ^2 = \cdot = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{8}$$

$$\Rightarrow\ |\,| = = \tag{9}$$

$$\Rightarrow\ \cos\angle(\,,\,) = = \,. \tag{10}$$

Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ $\Rightarrow$

$$|\,| = . \tag{11}$$

Обозначим $\rho(A, B)$ – расстояние между точками $A$ и $B$. Тогда $\rho(A, B)$ вычисляется по той же формуле (11). Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

**1.** $\rho(A,B)=\rho(B,A)$;

**2.** $\rho(A,B)+\rho(B,C) \geq \rho(A,C)$ (неравенство треугольника);

**3.** $\rho(A,B)\geq 0$, и $\rho(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$.

В дальнейшем нам понадобится понятие определителя и его свойства. Этот материал входит в курс высшей алгебры, но изучается, как правило, позже, чем векторное произведение. Поэтому необходимые сведения об определителях 2 и 3 порядка приведены в Приложении к данному курсу лекций. Рекомендуется почитать Приложение, прежде чем продолжить изучение текущего параграфа.

***Теорема 5.*** *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в декартовой СК:* $(a_1, a_2, a_3)$ *и* $(b_1, b_2, b_3)$, *вычисляется по формуле*:

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} =$$

(12)

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{k}\ .$$

***Доказательство.*** Обозначим  – это вектор, который вычисляется по этой формуле. Мы докажем, что он удовлетворяет всем условиям в определении векторного произведения.

**1.** С одной стороны

$$|\ |^2 = (a_2b_1 - a_3b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \ \ (*)\ ,$$

А с другой стороны

$$(|\ |\,|\ |\sin\angle(\ ,\ ))^2 = |\ |^2|\ |^2\sin^2\angle(\ ,\ ) = |\ |^2|\ |^2(1-\cos^2\angle(\ ,\ )) =$$

$$= |\ |^2|\ |^2 - |\ |^2|\ |^2\cos^2\angle(\ ,\ ) = |\ |^2|\ |^2 - (\ \cdot\ )^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\ ) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

(**)

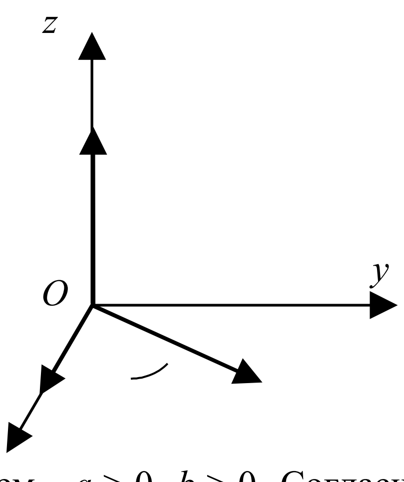
Самостоятельно раскройте скобки в (*) и (**), и убедитесь, что эти выражения совпадают.

**2.** $\cdot = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\Big(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\Big)\mathbf{k} =$

$$= a_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} = 0,$$

так как в определителе есть две одинаковые строки. Значит $\perp$. Ана-логично доказывается, что $\perp$.

**3.** Если $||$ , то строки в определителе пропорциональны и наша формула дает нулевой вектор. Пусть и неколлинеарны. Выберем СК таким образом, чтобы $Ox\uparrow\uparrow$, а $Oy$ лежала в одной плоскости с и , причем положительное ее направление указывало в ту же полуплоскость, что и . Ось $Oz$ после этого определяется однозначно. Тогда $(a_1, 0, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$, причем, $a_1 > 0$, $b_2 > 0$. Согласно формуле (12) получаем $= a_1b_2\mathbf{k}$, причем, $a_1b_2 > 0$. Значит $\uparrow\uparrow Oz$, и из чертежа видим, что тройка $(\ ,\ ,\ )$ – правая.




Итак, вектор, который вычисляется по нашей формуле удовлетворяет всем пунктам в определении векторного произв■дения.

***Следствие* 1.** $\times = -\times$.

Действительно, по свойству определителя, при перестановке двух строк изменяется знак:

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\times. \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 2.** $(\lambda)\times = \lambda(\times)$.

Действительно, по свойству определителя, общий множитель элементов одной строки выносится за знак определителя:

$$(\lambda)\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda a_1 & {}^{\lambda}a_2 & {}^{\lambda}a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \lambda(\times) \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 3.** $\times(+) = \times + \times$.

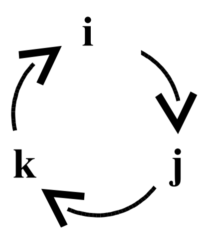
Действительно, по свойствам определителя

$$\times(+) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \times + \times. \qquad \blacksquare$$

***Следствие* 4.** $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$.

Докажите это самостоятельно с помощью формулы (12).

Все эти равенства удобно запоминать с помощью диаграммы. Произведение двух ортов взятых подряд по кругу дает третий орт, а в обратном направлении – третий со знаком «–».

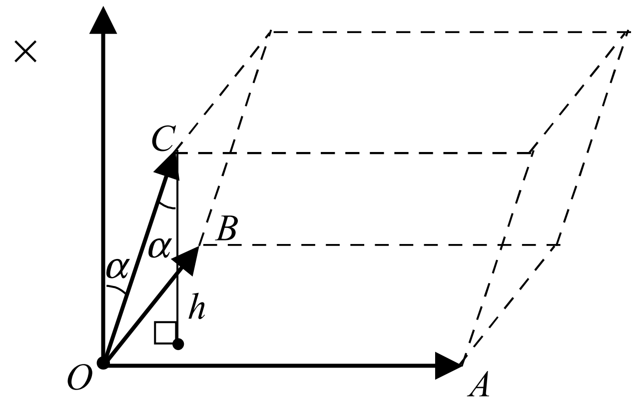


## §12. *Смешанное произведение векторов.*

***Определение.*** *Смешанным произведением трех векторов* , , называется число $(\times)\cdot$. Оно обозначается $\cdot\cdot$, или $(,,)$.

***Теорема 6.*** *Модуль смешанного произведения трех векторов* , , *численно равен объему параллелепипеда построенного на направленных отрезках* , , , *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

***Доказательство.*** Пусть $h$ – высота, опущенная из точки $C$ на основание, которым служит параллелограмм, построенный на направленных отрезках и . Пусть $\alpha$ – угол между $h$ и стороной $OC$. Тогда



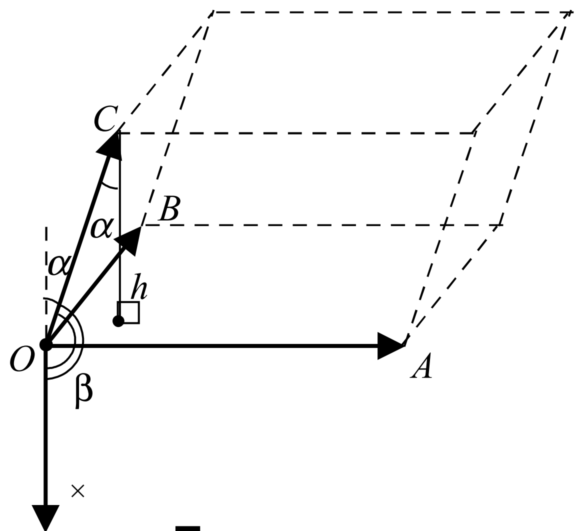

$h=|OC|\cos\alpha$, $S_{осн}=|\times|$.

Пусть $\beta=\angle(\times,)$.

<u>*1 случай*</u>. Тройка $(,,)$ правая. Тогда $\beta=\alpha$. Поэтому

$$V=S_{осн}\cdot h=|\times|\,|OC|\cos\alpha=$$
$$=|\times|\,|\,|\cos\angle(\times,)=$$
$$=(\times)\cdot.$$

<u>*2 случай*</u>. Тройка $(,,)$ левая. Тогда $\beta=\pi-\alpha$ и $\cos\alpha=-\cos\beta\Rightarrow$




$$V=|\times|\,|OC|\cos\alpha=$$
$$=-|\times|\,|\,|\cos\angle(\times,)=$$
$$=-(\times)\cdot.$$

Но объем всегда неотрицателен. Поэтому в этом случае $(\times)\cdot\le 0$, и мы имеем

$$V=|(\times)\cdot|.$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

***Следствие.*** **1.** , , компланарны $\Leftrightarrow$ $=0$;

**2.** тройка $(,,)$ правая $\Leftrightarrow$ $>0$;

**3.** тройка $(,,)$ левая $\Leftrightarrow$ $<0$.

Действительно, объем параллелепипеда равен нулю $\Leftrightarrow$ векторы , , компланарны. Если же они образуют левую тройку, то мы уже доказали, что $\le 0$, а так как они в этом случае некомпланарны, то

■

неравенство будет строгим. Аналогично, если тройка $( , , )$ правая, то $\geq 0$ и $, ,$ некомпланарны; поэтому неравенство будет строгим.

***Свойства смешанного произведения***.

**1.** *Смешанное произведение не зависит от группировки сомножителей*: $(\times)\cdot = \cdot(\times)$;

**2.** *Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей*: $= = .$

**3.** *При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак*: $=- =- =- .$

**4.** $(\lambda) = (\lambda) = (\lambda) = \lambda( ).$

**5.** $( + ) = + .$

***Доказательство.*** **1.** Используя свойства определителя получаем

$$(\times)\cdot = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) =$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left( \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) = \cdot(\times).$$

Именно это свойство позволяет использовать обозначение без расстановки скобок. Попутно мы доказали формулу

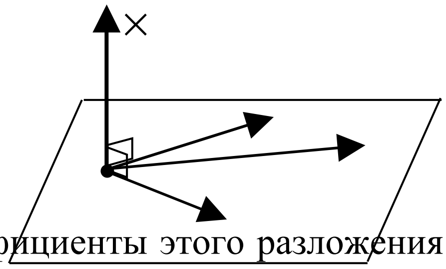
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Все остальные свойства смешанного произведения вытекают из аналогичных свойств определителя. ■

## §13. *Двойное векторное произведение.*

***Определение.*** *Двойным векторным трех векторов* , ,
называется *вектор* $(\times)\times$.

Обозначим $=(\times)\times$. Если $||$, то $\times= \Rightarrow =$. Пусть теперь и неколлинеарны. Согласно определению, векторное произведение перпендикулярно сомножителям




Поэтому $\perp\times,\ \perp\times,\ \perp\times$.
Значит вектор компланарен и . и мы можем разложить через и :

$$=\lambda+\mu. \qquad (*)$$

(это верно и в случае $=$ ). Вычислим коэффициенты этого разложения. По определению векторного произведения $\perp \Leftrightarrow \cdot=0$. Домножим обе части равенства $(*)$ скалярно на вектор :

$$0=\lambda(\cdot)+\mu(\cdot).$$

Очевидно, что уравнение $\lambda x+\mu y=0$ относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$ имеет общее решение $(-ky, kx), k\in\mathbf{R}$. Таким образом

$$(\times)\times=-k(\cdot)+k(\cdot).$$

Для того, чтобы вычислить неизвестный координат $k$, мы вычислим обе части равенства в специально выбранной декартовой СК. Направим ось $Ox\uparrow\uparrow$, а $Oy$ так, чтобы был параллелен плоскости $Oxy$. Тогда $(a_1, 0, 0), (b_1, b_2, 0), (c_1, c_2, c_3)$. Находим:

$$\times=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}=a_1b_2\mathbf{k},$$

$$(\times)\times=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & a_1b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_2\mathbf{j}. \quad (**)$$

$$\cdot=a_1c_1, \qquad \cdot=b_1c_1+b_2c_2,$$

$$(\cdot)=(b_1c_1+b_2c_2)a_1\mathbf{i},\ \ (\cdot)=a_1c_1(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}).$$

$$-k(\cdot)+k(\cdot)=k(-a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_2\mathbf{j}).$$

Сравнивая последнее равенство с $(**)$ получаем $k=1$. Итак,

$$(\times)\times=-(\cdot)+(\cdot) \quad\Rightarrow$$

$$\times(\times)=-(\times)\times=(\cdot)-(\cdot). \qquad (23)$$

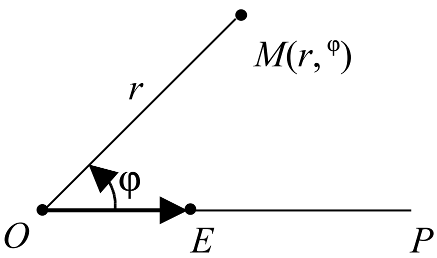
Именно в таком виде формулу для вычисления двойного векторного произведения и запоминают. Для этого есть у нее название «<u>*бац минус цаб*</u>».

***Упражнение.*** Самостоятельно проверьте с помощью этой формулы тождество Якоби:

$$(\times)\times+(\times)\times+(\times)\times\equiv .$$

## §14. *Полярная система координат на плоскости.*

Выберем на плоскости произвольные точку $O$ и ось $OP$, которая задается единичным направленным отрезком . Пусть $M$ – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, $\varphi = \angle(,)$ – ориентированный угол. Тогда пара $(r, \varphi)$ называется <u>*полярными координатами точки*</u> $M$.

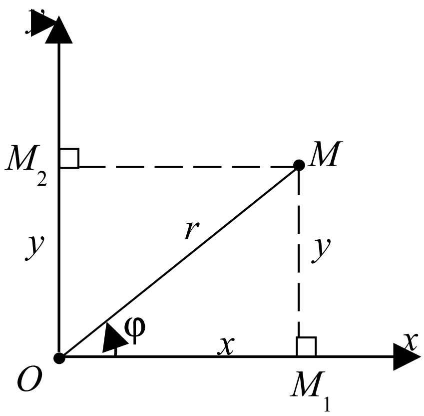



Точка $O$ называется <u>*полюсом*</u>, а $OP$ – <u>*полярной осью*</u>. Совокупность точки $O$ и оси $OP$ называется <u>*полярной системой координат на плоскости*</u>.

Очевидно, что $0\le r<+\infty$, а для угла $\varphi$ обычно договариваются, что $0\le\varphi<2\pi$, либо, что $-\pi<\varphi\le\pi$. При этом, если $r=0$, то считается $\varphi$ неопределенным.

Найдем связь между декартовыми и полярными координатами точки $M$. Выберем декартову СК так, чтобы точка $O$ была ее началом, а положительное направление оси $Ox$ совпадало с направлением оси $OP$. Пусть $M_1$ и $M_2$ – проекции точки $M$ на координатные оси $Ox$ и $Oy$ соответственно. Тогда из $\Delta OMM_1$ и $\Delta OMM_2$ получаем

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} r= , \\ \varphi=\operatorname{arctg} . \end{cases} \quad (14')$$



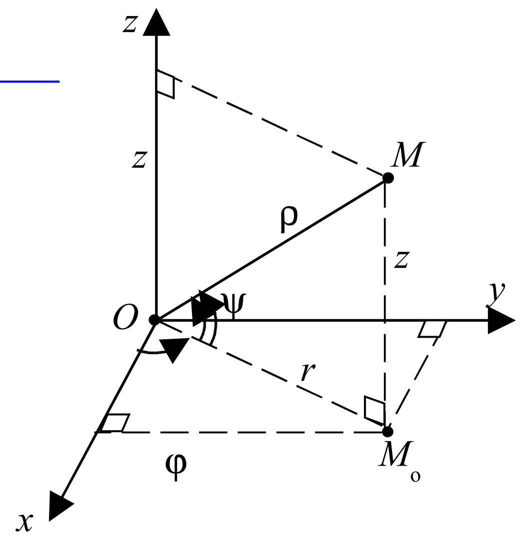

Но последнее равенство верно только для нашего чертежа, когда $x>0$. Вообще, знание синуса, косинуса, или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол $\varphi$. Его следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi=x/r,\ \ \sin\varphi=y/r,$$

либо так: $\varphi = \arccos$ , если $y \geq 0$; $\varphi = -\arccos$ , если $y < 0$ (предполагается, что $-\pi < \varphi \leq \pi$). Использование арктангенса неудобно: надо оговаривать еще случай $x = 0$ и поэтому приходится писать 4 равенства.

## §15. *Сферическая и цилиндрическая системы координат в пространстве.*

Пусть в пространстве задана декартова СК $Oxyz$ и пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка. Опустим перпендикуляр $MM_0$ на плоскость $Oxy$. Тогда, очевидно, $|MM_0| = z$. Обозначим $\rho = |OM|$, $\psi = \angle M_0OM$ ; при этом, если $z > 0$, то считаем, что $\psi > 0$, а если $z < 0$, то $\psi < 0$. Пусть $(r, \varphi)$ – полярные координаты точки $M_0$ на плоскости. Тогда тройка $(r, \varphi, \psi)$ называется *сферическими координатами точки* $M$, а тройка $(r, \varphi, z)$ – ее *цилиндрическими координатами*. Очевидно, что $0 \leq \rho < +\infty$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ . Если $\psi = \pm\,\pi/2$, то точка $M$ лежит на оси $Oz$, $M_0 = O$ и тогда $\varphi$ считается неопределенным.




Найдем формулы, которые связывают декартовы, сферические и цилиндрические координаты точки $M$. Из $\Delta OMM_0$ находим, что

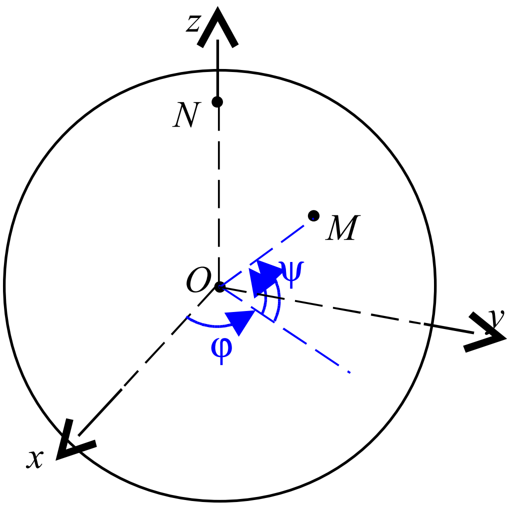
$$\begin{cases} r = \rho \cdot \cos\psi\,, \\ z = \rho \cdot \sin\psi\,. \end{cases} \quad (15) \qquad \begin{cases} \rho = \;, \\ \psi = \arcsin \end{cases} \quad (15')$$

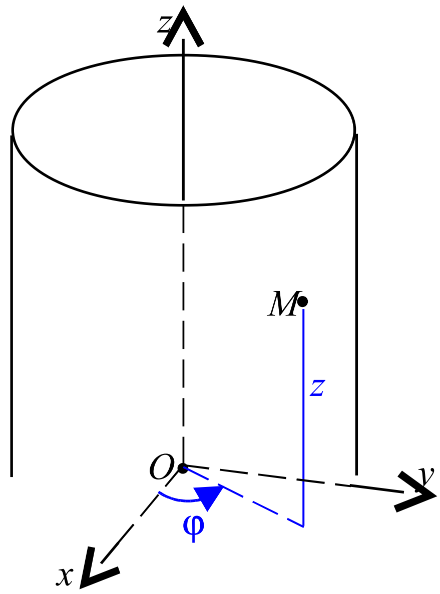
Эти формулы можно рассматривать, как переход от сферических координат к цилиндрическим и обратно; а $\varphi$ у этих систем координат общее. Формулы (14) и (14′) можно рассматривать, как переход от цилиндрических координат к декартовым, и обратно. Подставляя (15) в (14) получаем формулы перехода от сферических координат к декартовым, а подставляя (14′) в (15′) получаем формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cdot \cos\psi\,, \\ y = \rho \sin\varphi \cdot \cos\psi\,, \\ z = \rho \cdot \sin\psi\,. \end{cases} \quad (16) \qquad \begin{cases} \rho = \;, \\ \varphi = \pm \arccos\,, \\ \psi = \arcsin(z/\rho)\,. \end{cases} \quad (16')$$

Во второй формуле из (16′) знак выбирается в соответствии со знаком $y$.

Сферические координаты можно использовать для введения внутренних координат на сфере. Если начало координат поместить в центр сферы радиуса $\rho$, то $\varphi$ и $\psi$ будут играть роль географических долготы и широты точки $M$, лежащей на сфере; пишем $M(\varphi, \psi)$. Точно также цилиндрические координаты позволяют ввести внутренние координаты на поверхности цилиндра. Если начало координат разместить на оси цилиндра радиуса $r$, то $\varphi$ и $z$ будут координатами точки $M$, лежащей на поверхности цилиндра; пишем $M(\varphi, z)$.




Ни в коем случае не следует путать сферические и цилиндрические координаты в пространстве с внутренними координатами на сфере и цилиндрической поверхности. Очень распространена на экзамене ошибка, когда вместо первого рисунка в этом параграфе рисуют второй и третий.

## §16. *Преобразование координат.*

Пусть на плоскости заданы две декартовы системы координат $Oxy$ и $O'x'y'$, у которых направления координатных осей совпадают, но начальные точки $O$ и $O'$ разные. Говорим, что *вторая СК получена из первой переносом начала координат в точку* $O'$.

Пусть нам известны координаты точки $O'$ относительно первой СК: $O'(a, b)$. Пусть $M$ – произвольная точка на плоскости, $(x, y)$ – ее координаты относительно первой СК, $(x', y')$ – относительно второй СК. Найдем связь между этими координатами.

По определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Поэтому

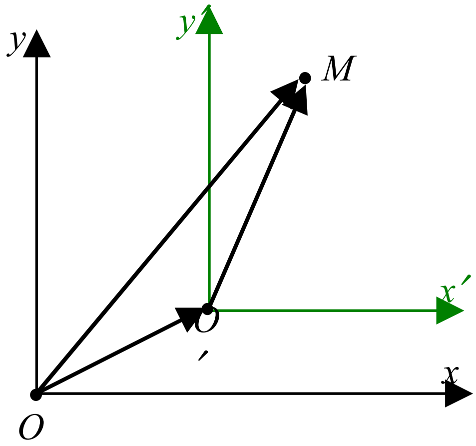
$(a,b)$, $(x,y)$, $(x',y')$.

По правилу треугольника сложения векторов

$$= + .$$

Отсюда

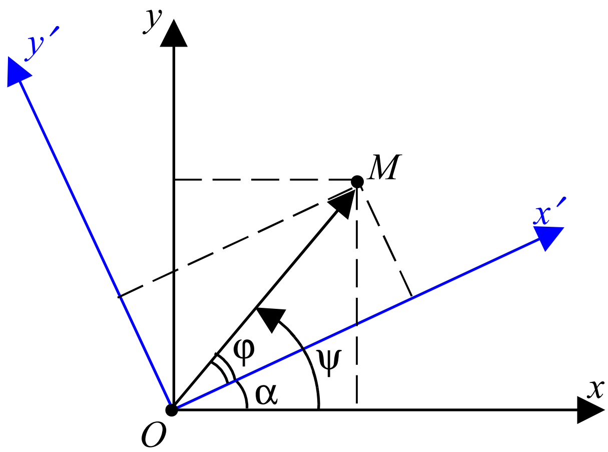
$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} (17) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} (17')$$




Аналогично, если в пространстве мы совершим перенос начала координат в точку $O'(a, b, c)$, то к формулам (17) и (17′) только добавятся равенства $z' = z + c$ и $z = z' + c$.

Заметим, что все наши рассуждения справедливы и в случае переноса начала произвольной аффинной СК.

Пусть теперь на плоскости заданы две декартовы СК с общим началом: $Oxy$ и $Ox'y'$. Пусть $\alpha$ – ориентированный угол между положительными направлениями осей $Ox$ и $Ox'$. Тогда говорим, что *вторая СК получена из первой поворотом на угол* $\alpha$. Пусть $M$ – произвольная точка на плоскости, $(x, y)$ – ее координаты относи-




тельно первой СК, $(x', y')$ – относительно второй СК.

Найдем связь между этими координатами. Пусть $\varphi$ – ориентированный угол между положительным направлением оси $Ox$ и вектором , а $\psi$ – между $Ox'$ и . Тогда $\varphi = \psi + \alpha$. Обозначим $r = |OM|$. Тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r\cos\psi, \\ y' = r\sin\psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\cos\alpha - r\sin\psi\cdot\sin\alpha = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = r\sin(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\sin\alpha + r\sin\psi\cdot\cos\alpha = y'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Итак,

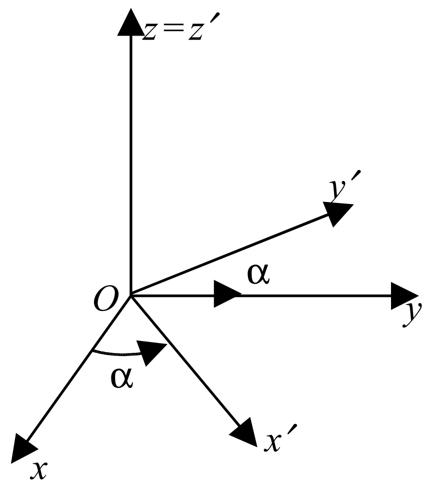
$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \end{cases} \qquad (18)$$

$$y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha.$$

Поскольку вторая СК может быть получена из первой поворотом на угол $-\alpha$, то с учетом $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, из (18) получаем

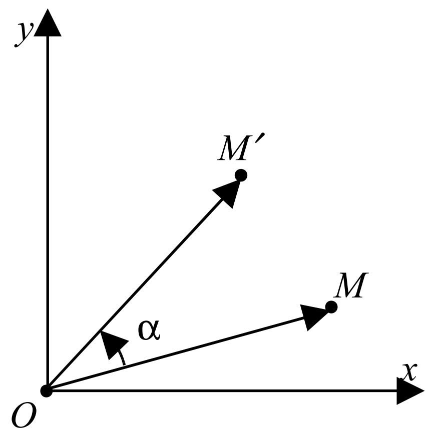
$$\begin{cases} x' = \;\; x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad (18')$$

Если в пространстве совершается поворот СК вокруг оси $Oz$, то координата $z$ точки $M$ не изменится, а $x$ и $y$ будут изменяться по тем же формулам (18) и (18′). Самостоятельно выпишите формулы преобразования координат при повороте СК в пространстве вокруг $Ox$ и $Oy$.

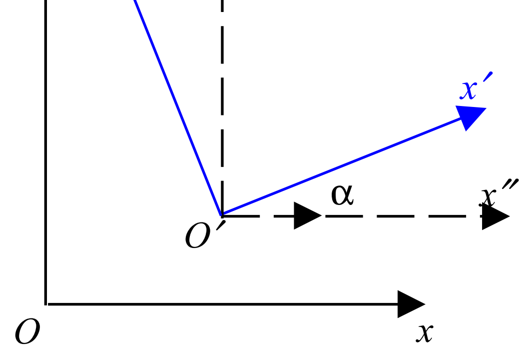



Важно не путать поворот СК с поворотом плоскости. Пусть точ-ка $M'(x', y')$ получается из точки $M(x, y)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\alpha$. Для того, чтобы найти, как выражаются $(x', y')$ через $(x, y)$ мы представим ситуацию так: точка $M$ остается на месте, а СК поворачивается в обратном направлении, т.е. на угол $-\alpha$. Поэтому имеем формулы

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha, \\ y' = y\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad (19)$$




Допустим, теперь на плоскости заданы две совершенно произвольные декартовы СК $Oxy$ и $O'x'y'$. Тогда вторую СК можно получить из первой в результате двух преобразований: сначала мы совершаем перенос начала координат в точку $O'$ (получим промежуточную СК $O'x''y''$), а затем – поворот координатных осей. Тогда



$$\begin{cases} x'' = x - a, \\ y'' = y - b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'' + a, \\ y = y'' + b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \ x''\cdot\cos\alpha + y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y'' = y'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставляя $x''$ и $y''$ из первой системы в третью, получаем, что

$$\begin{cases} x' = \ (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

***Упражнение.*** Самостоятельно выпишите формулы, по которым $(x, y)$ выражаются через $(x', y')$.

## §17. *Общее преобразование координат в пространстве.*

Пусть в пространстве заданы две совершенно произвольные аффинные системы координат с общим началом, $\mathcal{R} = \{O, \ , \ , \}$ и $\mathcal{R}' = \{O, \ , \ , \ \}$ – реперы, с помощью которых они определяются. Пусть – произвольный вектор, $(x_1, x_2, x_3)$ – его координаты в первой СК, $( \ , x_2' \ \ , x_3' \ )$ – во второй. Будем называть $(x_1, x_2, x_3)$ старыми координатами вектора , а $( \ , x_2' \ , x_3' \ )$ – новыми его координатами.

Найдем связь между этими координатами. Пусть нам известно разложение базисных векторов второго базиса $\mathcal{B}' = \{ \ , \ , \}$ по первому базису $\mathcal{B} = \{ \ , \ , \}$ :

$$\begin{cases} \quad = c_{11} + c_{21} + c_{31} \ , \\ = c_{12} + c_{22} + c_{32} \ , \\ \quad = c_{13} + c_{23} + c_{33} \ . \end{cases} \tag{20}$$

Составим из коэффициентов этого разложения матрицу, выписывая коэффициенты разложения из каждой строки в столбец с тем же номером:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется <u>*матрицей перехода от первого базиса ко второму*</u>. Имеем:

$$\begin{aligned} &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &= x_1' \ \ + x_2' \ \ + x_3' \ \ . \end{aligned} \tag{$*$}$$

Подставим в последнее равенство выражения (20):

$$= x_1' \ \ (c_{11} + c_{21} + c_{31}) + x_2' \ \ (c_{12} + c_{22} + c_{32}) + x_3' \ \ (c_{13} + c_{23} + c_{33}).$$

Раскроем скобки и сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах:

$$= (c_{11}x_1' \ \ + c_{12}x_2' \ \ + c_{13}x_3' \ \ ) + (c_{21} + c_{22}x_2' \ \ + c_{23}x_3' \ \ ) + (c_{31} + c_{32}x_2' \ \ + c_{33}x_3' \ \ ) \ .$$

Сравниваем с $(*)$, и в силу единственности разложения вектора по базису, получаем

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' \ \ + c_{12}x_2' \ \ + c_{13}x_3' \ \ , \\ x_2 = c_{21} + c_{22}x_2' \ \ + c_{23}x_3' \ \ , \\ x_3 = c_{31} + c_{32}x_2' \ \ + c_{33}x_3' \ \ . \end{cases} \tag{21}$$

Если использовать столбцы, составленные из координат

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

То систему (21) можно переписать в виде одного матричного равенства:

$$X = CX' \qquad (21')$$

$$\Rightarrow \quad X' = C^{-1}X, \qquad (22)$$

т.е. для того, чтобы найти новые координаты вектора по старым, необходимо выписать формулы, аналогичные (21), только в качестве коэффициентов будут использованы элементы матрицы $C^{-1}$, а штрихи у координат будут стоять в левых частях равенств. Можно решить систему уравнений (21) относительно неизвестных $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и мы получим те же формулы.

К сожалению, не всегда к моменту изучения этого параграфа студенты успевают пройти по алгебре произведение матриц и обратную матрицу. Но ко времени экзамена этот материал обязательно должен быть пройден. Необходимые пояснения будут даны на практических занятиях по геометрии.

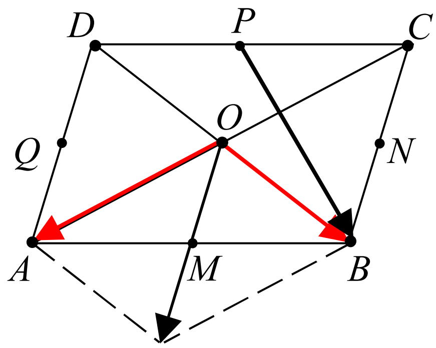
Координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, поэтому они пересчитываются по тем же формулам (21′) и (22). Заметим, что все рассуждения, приведенные при выводе формул (17) и (17′) верны и для произвольной аффинной СК. Поэтому в случае переноса начала координат в точку $O'(a, b, c)$ координаты точки пересчитываются по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + a, \\ x_2 = x_2' + b, \\ x_3 = x_3' + c. \end{cases} \qquad (22) \qquad\qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - a, \\ x_2' = x_2 - b, \\ x_3' = x_3 - c. \end{cases} \qquad (22')$$

Все сказанное выше верно и для преобразования аффинной СК на плоскости.

## §18. *Примеры решения задач.*

**1.** *ABCD – параллелограмм, O – его центр, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Векторы = и = выбраны в качестве базисных. Найти координаты вектора в базисе {, }.*




***Решение.*** По правилу треугольника = + ; = , а по правилу параллелограмма сложения векторов = +R = + . Поэтому = (+ ) + = + . Значит, .

***Ответ:*** .

**2.** *Даны координаты векторов* (17, 0) *и* (–1, 1) *в ортонормированном базисе. Найти такое λ, при котором вектор = +λ имеет абсолютную величину* || = 25 (*если решений два, то достаточно взять одно из них*). *Найти единичный вектор, коллинеарный .*

***Решение.*** Вектор = +λ· имеет координаты (17 – λ, 0 + λ). Находим его длину и приравниваем ее к 25. Получаем квадратное уравнение относительно неизвестного λ**:**

$$(17 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 625,$$

$$2\lambda^2 - 34\lambda + 289 = 625 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda^2 - 34\lambda - 336 = 0, \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 17\lambda - 168 = 0.$$

Решая его, находим $\lambda_1 = -7$; $\lambda_2 = 24$. Поскольку по условию достаточно найти только одно решение, ограничиваемся $\lambda_1 = -7$. Тогда находим координаты вектора (24, 7). И, чтобы получить единичный вектор ‖ , мы делим координаты вектора на длину этого вектора, т.е. на 25: .

***Ответ:*** $\lambda_1 = -7$, .

**3.** *Даны координаты вектора* (–2, –2) *в декартовой системе координат. Вычислить координаты вектора , полученного из поворотом:* а) *на угол* $\alpha = 120^\circ$, б) *на угол* $\beta = 90^\circ$. *Пусть = . Вычислить полярные координаты точки* $A$ *, если полярная ось совпадает с* $Ox$.

***Решение.*** Координаты вектора $(x', y')$, полученного из вектора $(x, y)$ поворотом на угол $\alpha$, вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

(Не путать с формулами, по которым изменяются координаты данного вектора при повороте координатных осей!)

а) В нашем случае имеем $\cos\alpha = -$ , $\sin\alpha =$ .

$$\begin{cases} x' = -\ (-2) + 2\cdot\ = 2, \\ y' = -2\cdot\ - 2\cdot(-\ ) = -2\ . \end{cases}$$

б) Имеем $\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$ и по тем же формулам находим (2,–2).

Если известны декартовы координаты точки $A(x, y)$, то ее полярные координаты $(r, \varphi)$ находятся по формулам:

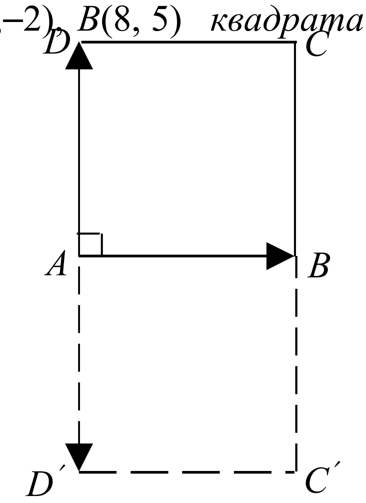
$$\begin{cases} r = \ , \\ \cos\varphi = \ , \sin\varphi = \ . \end{cases}$$

Декартовы координаты точки $A$ совпадают с координатами ее радиус-вектора . Поэтому $A(-2,-2)$. Отсюда находим $r = 4$; $\cos\varphi = -$ ; $\sin\varphi = -$ . Значит $\varphi =$ . $A(4, )$.

***Ответ***: а) (2,–2); б) (2,–2); $A(4, )$.

**4.** *Даны координаты двух вершин* $A(3,-2)$, $B(8, 5)$ *квадрата* $ABCD$. *Найти координаты двух других вершин.*

***Решение.*** Находим (5, 7). Вектор может быть получен из поворотом на 90°, либо на –90°. Таким образом, задача имеет два решения.



Так же, как и в предыдущей задаче находим, что (–7, 5), либо (7,–5). Для того, чтобы найти координаты точки $D$ надо к координатам точки $A$ прибавить координаты вектора : $D(-4,\ 3)$. Далее используем, что = и находим координаты $C(1, 10)$. Второй ответ ищется аналогично.

***Ответ*:** $C(1, 10)$, $D(-4, 3)$, $C'(15, 0)$, $D'(10,-8)$.

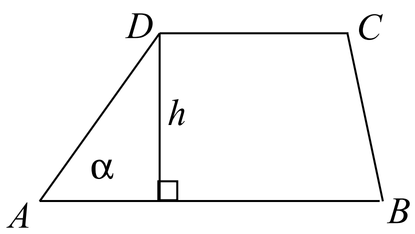
**5.** *Вершины четырехугольника находятся в точках* $A(1,\ 2)$, $B(7,-\ 6)$, $C(11,-3)$, $D(8,\ 1)$. *Показать, что ABCD – трапеция. Найти длины оснований трапеции, ее площадь и* $\cos\angle DAB$.

***Решение.*** Находим координаты векторов (6,–8), (4, 3), (–3, 4), (7,–1). Проверяем векторы, определяемые противоположными сторонами четырехугольника на коллинеарность:

$- \;=-$ – верно, значит коллинеарен .

$=$ – неверно, значит неколлинеарен .

Таким образом, в четырехугольнике две противоположные стороны коллинеарны, а две – нет. Значит это – трапеция, и основаниями являются $AB$ и $CD$. Находим длины сторон:




$|\ | = = 10,$

и аналогично $|\ |= 5$; $|\ |= 5$; $|\ |= 5$ .

Обозначим $\alpha = \angle BAD$.

$\cos\alpha = \;=\; = \;,$

следовательно $\angle BAD = 45^{\circ}$. Не во всех вариантах может получиться табличный угол, поэтому далее действуем так: зная $\cos\alpha$, находим

$\sin\alpha = \;=\; .$

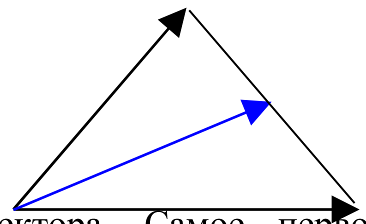
Тогда $h = |\ |\cdot\sin\alpha = 5$. Зная высоту и длины оснований находим площадь: $S = (AB + CD)\cdot h =$ **.**

***Ответ*:** $|\ | = 10$, $|\ |= 5$, $\cos\alpha =$ , $S_{ABCD} =$ **.**

**6.** *Дано* $|\ |= 10$, $|\ | = 3$, $\alpha = \angle(,\ ) = 30^{\circ}$. *Найти площадь треугольника, построенного на векторах* $= -3$ *и* $= 2 + 5$, *отложенных из одной точки. Найти длину медианы, исходящей из этой же точки.*

***Решение.*** Площадь параллелограмма построенного на векторах и , численно равна модулю их векторного произведения. Площадь треугольника, построенного на этих векторах равна половине площади параллелограмма: $S_\Delta = \ |\ \times\ |$. Пользуясь свойствами и определением векторного произведения находим

$$|\times| = |(-3\ )\times(2+5\ )| = |\ \times\ +5\times -3\times -15\times| =$$
$$= |\ +5\times +3\times\ +15| = 8|\ \times| = 8|\ |\cdot|\ |\cdot\sin\alpha =$$
$$= 8\cdot 10\cdot 3\cdot\ \ = 120\ .$$
$$S_\Delta = \ |\times| = 60\ .$$



Если $AD$ – медиана $\Delta ABC$, то
= ( +). В нашем случае, если
– вектор, задающий медиану, то $= (\ +\ ) =\ \ +$.

Нам требуется найти длину этого вектора. Самое первое следствие из определения скалярного произведения: скалярный квадрат вектора $^2 = \cdot$ равен квадрату его длины $|\ |^2$. Имеем

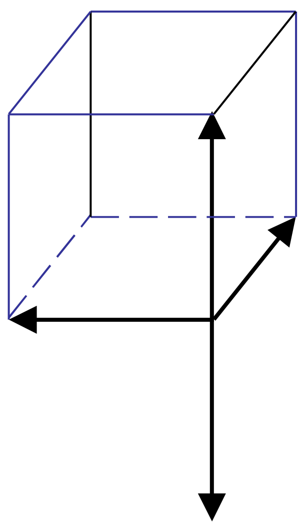
$$|\ |^2 = \cdot\ = (\ +\ )\cdot(\ +\ ) =\ ^2 + 3\ \cdot + ^2 =$$
$$= |\ |^2 + 3|\ |\cdot|\ |\cdot\cos\alpha + |\ |^2 =$$
$$= \ \cdot 100 + 3\cdot 10\cdot 3\cdot\ \ + 9 = 234 + 45.$$

Значит, $|\ | = \ .$

***Ответ*:** $S_\Delta$= 60, длина медианы равна .

Подчеркнем, что ни в коем случае нельзя использовать обозначение $^2$ вместо $\times$ ; $^2$ означает $\cdot$ . Особо обращаем внимание, что при решении использовалось свойство $\times = -\times$ .

**7.** *Докажите, что векторы* $(10, 11, 2)$ *и* $(10, -10, 5)$ *отложенные из одной точки, можно взять в качестве ребер куба, и найдите третье ребро куба, исходящее из этой же точки.*



***Решение.*** Для того, чтобы векторы и могли служить ребрами куба, они должны быть друг другу перпендикулярны и иметь одинаковую длину. Проверяем:

$$\cdot\ = 10\cdot 11 + 11\cdot(-10) + 2\cdot 5 = 0 \Rightarrow\ \perp\ ,$$
$$|\ | = \ = 15,$$
$$|\ | = \ = 15.$$

Вектор , задающий третье ребро куба, должен быть перпендикулярен и и должен иметь одинаковую с ними длину. Согласно определению векторного произведения вектор $\times$ будет перпендикулярен и . Выясним, какую он будет иметь длину:

$$|\ \times\ | = |\ |\cdot|\ |\cdot\sin\angle(\ ,\ ) = 15\cdot 15\cdot\ \sin 90^{\circ} = 225.$$

Искомый вектор должен иметь длину 15. Следовательно, $=\ \times$. Находим

$$\times = \quad = 75\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 210\mathbf{k}\,,\ \ (5, –2,–14).$$

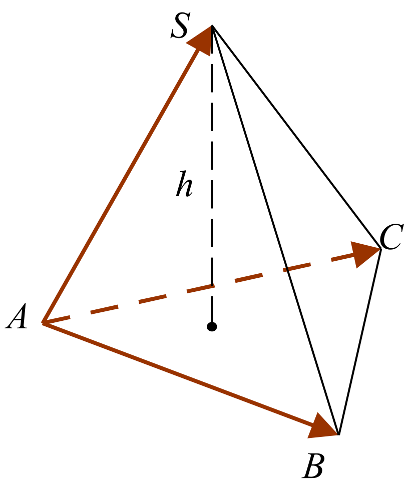
Очевидно, что вектор $= -$ тоже удовлетворяет условиям задачи.

***Ответ***: (5, –2,–14), (–5, 2,14).

**8.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды* $SABC$: $A(4,\ 0,\ 1)$, $B(5,–1,\ 1)$, $C(4,\ 7,–5)$, $S(7,\ 5,\ 2)$. *Найти объем пирамиды, площадь основания* $ABC$ *и высоту* (*с помощью векторного и смешанного произведений*). *Найти угол* $\angle BAC$. *Укажите, какой вектор перпендикулярен основанию. Изобразите данную пирамиду в декартовой системе координат.*

***Решение.*** Находим координаты трех векторов, лежащих на ребрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$(1,–1, 0),\ (0, 7,–6),\ (3, 5, 1).$$




Модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем же пирамиды составляет 1/6 от объема параллелепипеда: $V = |\ |$.

Смешанное произведение можно вычислить так:

$$=$$

Но, поскольку для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение $\times$, то намного проще воспользоваться определением смешанного произведения: $=(\times)\cdot$ . При этом, вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\times = \quad = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

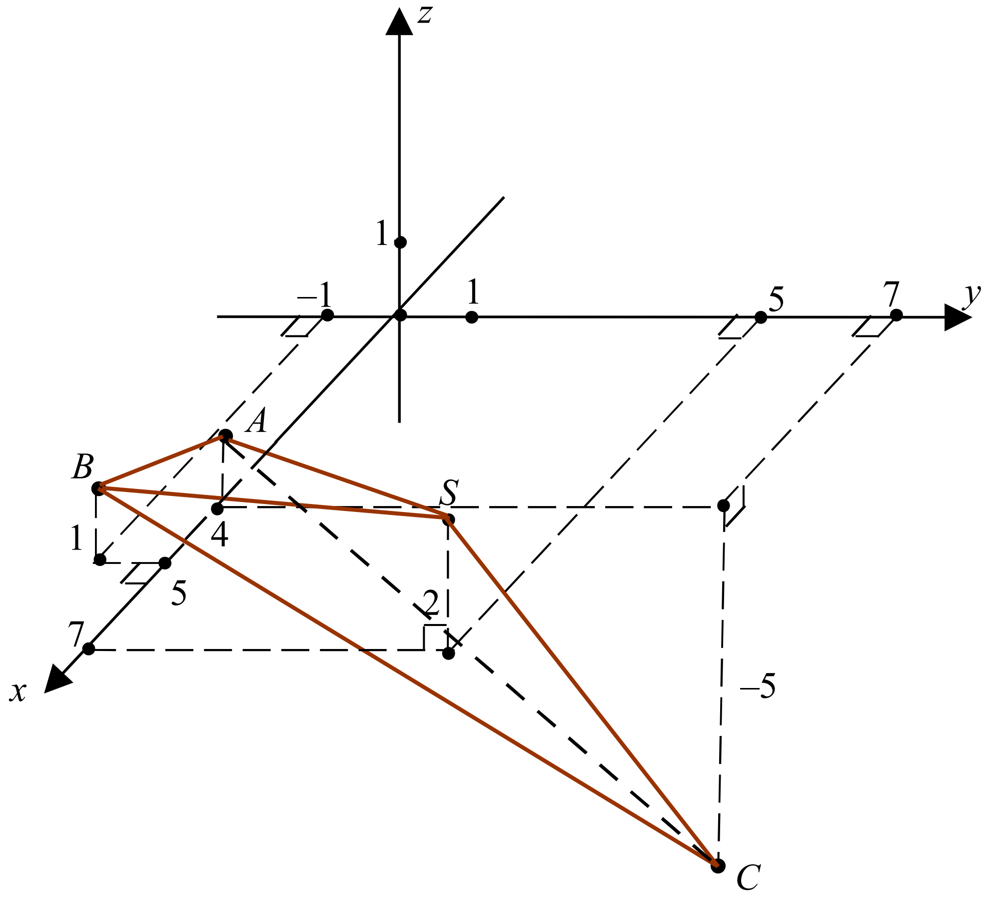
$$S_{\Delta ABC} = \ |\times| = \ = \ .$$

$$(\times)\cdot\ = 6\cdot 3 + 6\cdot 5 + 7\cdot 1 = 55. \qquad V = |(\times)\cdot\ | = \ .$$

С другой стороны, $V = \ S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда $h = \ = \ = 5$ .

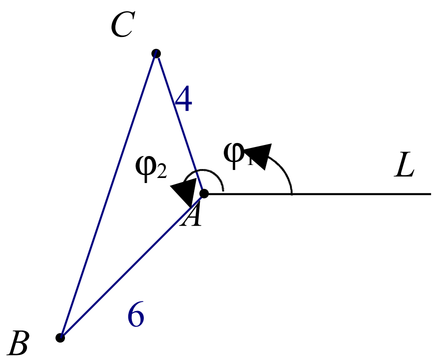
Согласно определению векторного произведения вектор $\times$ перпендикулярен и . Поэтому вектор $=\times$ будет перпендикулярен основанию пирамиды; (6, 6, 7). Угол $\angle BAC$ ищется так же, как и в задаче 5.

Построим изображение данной пирамиды в декартовой системе координат $Oxyz$.




***Ответ***: $V=$ , $S_{\Delta ABC}=$ , $h=5$, $(6,6,7)$.

**9.** *Вычислить площадь треугольника ABC, если вершина A находится в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты*: $B(6,\ )$, $C(4,\ )$. *Найти длину BC. Изобразить данный треугольник.*




***Решение.*** Нарисуем чертеж к задаче, построив точки $B$ и $C$ по их полярным координатам. Из чертежа и геометрического смысла полярных координат находим, что

$\angle BAC=\varphi_1-\varphi_2= - = $ ,
$AB=6,\ AC=4.$

Тогда

$$S_{\Delta ABC}= AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC= \cdot 6\cdot 4\cdot \sin  = 12\cdot  = 6.$$

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos\angle BAC = 36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-) = 76.$$

***Ответ***: $S_{\Delta ABC}= 6$ , $BC== 2$.

**10.** *Новая декартова СК получена из старой переносом начала в точку* $O'(2,-1)$ *и поворотом на угол* $\alpha = \arccos$ .

а) *Выпишите формулы, выражающие новые координаты через старые. Найдите новые координаты точки A, если известны её старые координаты*: $A(6,2)$.

б) *Выпишите формулы, выражающие старые координаты через новые. Найдите старые координаты точки B, если известны её новые координаты*: $B(5,5)$.

***Решение.*** а) Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

где $(a,b)$ – координаты точки $O'$, $\alpha$ – угол поворота координатных осей. Зная $\cos\alpha$ находим $\sin\alpha$ и подставляем в формулы:

$$\begin{cases} x' = \ (x-2) + \ (y+1), \\ y' = - \ (x-2) + \ (y+1). \end{cases}$$

Для точки $A(6,2)_{Oxy}$ находим $x' = 5,\ y' = 0$. Значит $A(5,0)_{O'x'y'}$.

б) Старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + a, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha + b. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = \ x' - \ y' + 2, \\ y = \ x' + \ y' - 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты точки $B(5,5)_{O'x'y'}$ находим $B(3,6)_{Oxy}$.

***Ответ***: $A(5,0)_{O'x'y'}$, $B(3,6)_{Oxy}$.

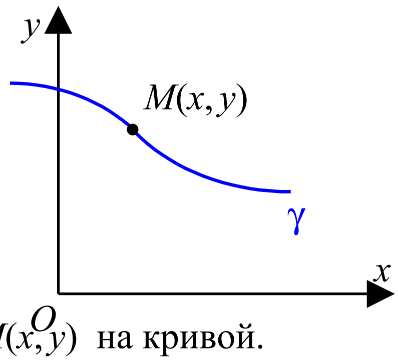
# ГЛАВА 2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

## §1. *Уравнение кривой и поверхности.*

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая на плоскости, а $\varphi(x, y)$ – функция двух переменных. Говорим, что уравнение

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

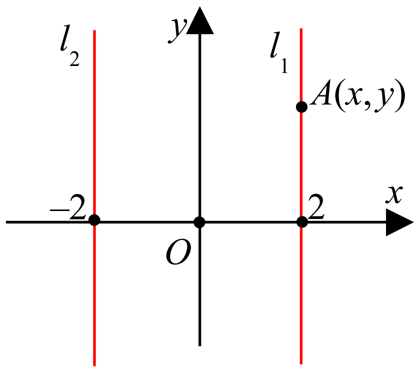
есть *уравнение кривой $\gamma$ в неявном виде*, если координаты любой точки $M \in \gamma$ удовлетворяют (1), и обратно, каждая пара $(x, y)$ чисел, удовлетворяющих (1), задает точку $M(x, y)$ на кривой.




Подчеркнем, что при составлении уравнений следствие обязательно надо проверять в обе стороны.

***Пример* 1.** Уравнение

$$x^2 - 4 = 0 \qquad (*)$$

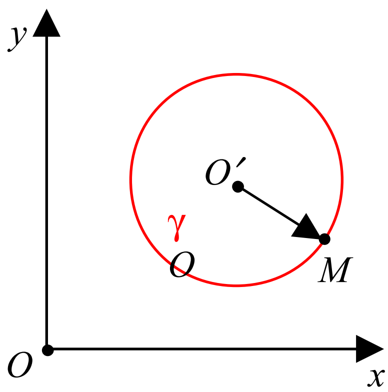



задает на плоскости пару прямых (см.чертеж). Координаты любой точки $A(x, y) \in l_1$ удовлетворяют (*), но нельзя сказать, что (*) есть уравнение $l_1$, поскольку есть еще точки, координаты которых удовлетворяют (*), но на $l_1$ эти точки не лежат.

С другой стороны, каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$x - 2 = 0, \qquad (**)$$

лежит на фигуре $l_1 \cup l_2$, но нельзя сказать что (**) задает эту фигуру, поскольку есть еще точки на $l_1 \cup l_2$, координаты которых (**) не удовлетворяют.




***Пример* 2.** Составим уравнение окружности $\gamma$ радиуса $R$ с центром в точке $O'(a, b)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка окружности $\gamma$. Тогда

$$R = |O'M| = \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2), то $|O'M| = R$, а значит, $M \in \gamma$. Таким образом (2) и есть уравнение нашей окружности.

Если из уравнения (1) удается выразить одну координату через другую, то получим *уравнение в явном виде*:

$$y = f(x), \qquad (3)$$

Не всегда удается привести неявное уравнение кривой к явному виду. В каком случае это возможно гласит *теорема о неявной функции*, изучаемая в курсе математического анализа. Например, с уравнением окружности это сделать нельзя.

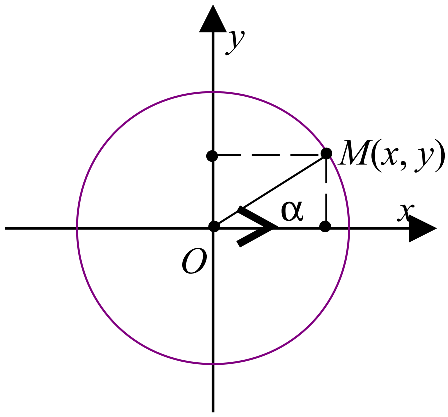
Предположим, что точка движется по кривой. Тогда ее координаты изменяются со временем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (4)$$

При этом параметр $t$ изменяется в определенных пределах: $t \in I$, где $I$ – интервал числовой прямой. Говорим, что (4) есть параметрические уравнения кривой $\gamma$, если точка $M(x, y)$ лежит на кривой $\gamma$ тогда и только тогда, когда найдется такое $t \in I$, что будут выполнены оба равенства (4) одновременно. При этом, обязательно к системе (4) надо добавлять интервал изменения параметра. Физический смысл параметра в (4) не всегда время.

***Пример* 2.** Параметрические уравнения окружности радиуса $R$ с центром в начале координат имеют вид:

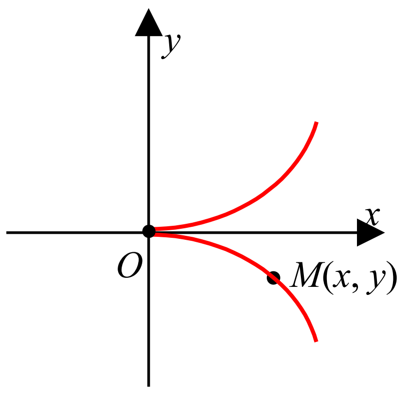
$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\alpha, \\ y = R \cdot \cos\alpha, \ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases} \qquad (5)$$




Не важно, что для одной и той же точки может найтись несколько (или даже бесконечно много) соответствующих ей значений параметра. Это не запрещается.

***Пример* 3.** Уравнения

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

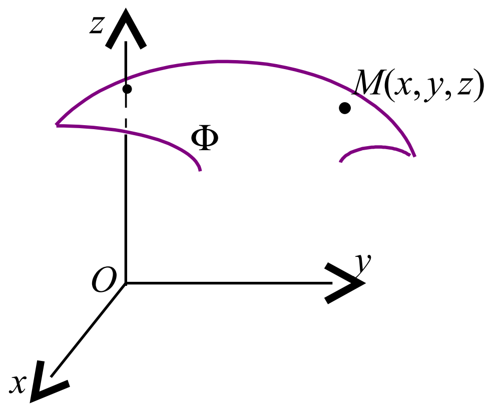



задают полукубическую параболу.
Уравнения

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ \end{cases} \qquad (*_*)$$

$$y = e^{3t},\ t \in \mathbf{R}\ .$$

тоже задают полукубическую параболу, но не всю, а только ее верхнюю половину. Для точки $M$, лежащей ниже оси, $Ox$ не найдется такого $t$, для которого выполнено (*$_*$*).




***Определение.*** Пусть Ф – некоторая поверхность в пространстве, а $F(x, y, z)$ – функция от трех переменных. Говорим, что

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (6)$$

есть уравнение поверхности Ф в неявном виде, если координаты любой точки $M \in Ф$ удовлетворяют (6), и обратно, каждая пара $(x, y)$ чисел, удовлетворяющих (6), задает точку $M(x, y, z)$ на поверхности.

Так же, как и для кривой, при составлении уравнения поверхности, необходимо проверять следствие в обе стороны.

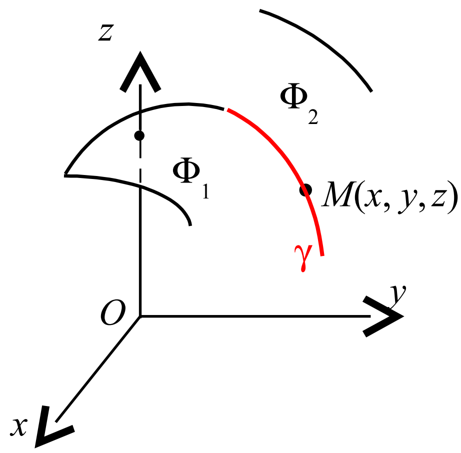
***Упражнение.*** Самостоятельно докажите, что сфера радиуса $R$ с центром в точке $O'(a, b, c)$ задается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (7)$$

Если из уравнения (6) удается выразить одну переменную через две другие, то получим уравнение поверхности в явном виде: $z = f(x, y)$. Вопрос, когда это возможно сделать, изучается в курсе математического анализа. Уравнение сферы невозможно переписать в явном виде.

Кривая в пространстве одним уравнением, как правило, не задается. Бывают исключительные случаи, типа уравнения $x^2 + y^2 = 0$, которое задает прямую – ось $Oz$. Кривая в пространстве обычно задается системой из двух уравнений

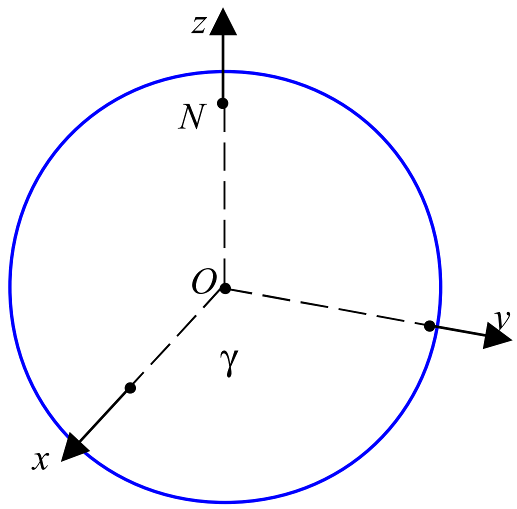
$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$




Каждое из уравнений в отдельности задает поверхность. Если координаты точки удовлетворяют системе, то она лежит на двух поверхностях одновременно, т.е. $M \in Ф_1 \cap Ф_2$. Таким образом, система (8) задает линию пересечения двух поверхностей (хотя заметим, что не всегда это пересечение будет кривой). Аналогично, если мы хотим найти точки *пересечения любых двух множеств, заданных своими уравнениями, мы должны объединить данные уравнения в одну систему*.

***Пример* 4.** Система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2. \\ \mathrm{z}=0. \end{cases}$$




задает окружность в плоскости *Oxy*. Первое уравнение системы задает сферу с центром в начале координат, а второе – плоскость *Oxy*. Их пересечение есть окружность γ. Если подставить z = 0 в первое уравнение, то получим

$$x^2+y^2=R^2. \quad (*_{*}*_{*}\ )$$

Казалось бы, можно сказать, что это и есть уравнение окружности γ. Но это не так. Уравнение $(*_{*}*_{*}$ ) задает цилиндрическую поверхность (см. параграф «цилиндрические и конические поверхности»). Подставляя $z = 0$ в первое уравнение системы, нельзя отбрасывать при этом само уравнение $z=0$.

Также кривая в пространстве может быть задана параметрическими уравнениями вида

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ \mathrm{z}=\sigma(t), \ \ t\in I, \end{cases}$$

где $I$ – интервал числовой прямой. С параметрическими уравнениями поверхности мы встретимся в разделе «Дифференциальная геометрия».

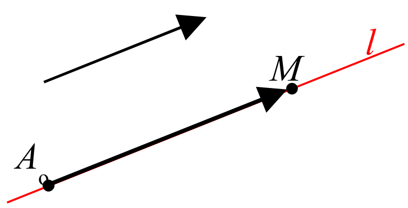
Обозначим – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ на кривой, т.е. вектор с координатами, составленными из неизвестных $(x, y, z)$, а – вектор с координатами $(\varphi(t), \psi(t), \sigma(t))$. Тогда параметрические уравнения кривой можно переписать в виде одного векторного уравнения

$$= \ , t\in I.$$

## §2. *Уравнение прямой на плоскости.*

Прямую $l$ на плоскости можно задать

а) с помощью точки $A_o\in l$ и ненулевого вектора $||$ $l$ ; тогда можем написать, что

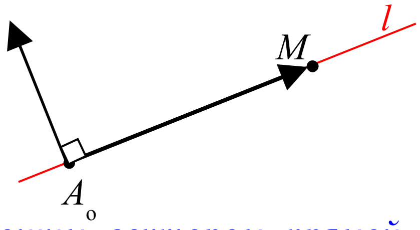


$$l=\{M|\ ||\ \};\quad (*)$$

б) с помощью точки $A_o \in l$ и ненулевого вектора $\perp l$; тогда можем написать, что

$$l=\{M|\ \perp\};\ (**)$$

в) с помощью двух точек $A_o, A_1 \in l$.




Вектор $||\ l$ называется *направляющим вектором прямой*, а вектор $\perp l$ называется *вектором нормали к прямой*.

***Теорема* 1. 1.** *Прямая $l$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая направляющий вектор $(a_1, a_2)$, задается уравнением*

$$= \ , \tag{9}$$

*которое называется канонически уравнением прямой, или параметрическими уравнениями*:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t\ , \\ y = y_o + a_2 t\ ,\ t \in \mathbf{R}\ , \end{cases} \tag{10}$$

*которые можно записать в векторном виде так*:

$$= + \ t,\ t \in \mathbf{R}\ , \tag{10$'$}$$

*где $=$ – радиус-вектор точки $A_o$.*

**2.** *Прямая, проходящая через две точки $A_o(x_o, y_o)$* и *$A_1(x_1, y_1)$, задается уравнением*

$$= \ , \tag{11}$$

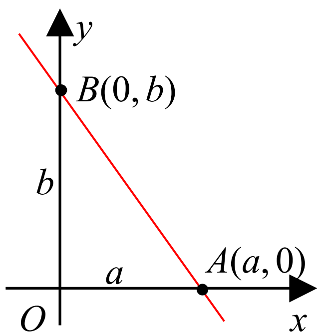
**3.** *Прямая, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая вектор нормали $(A, B)$, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0. \tag{12}$$

**4.** *Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины $a \neq 0$, $b \neq 0$, задается уравнением*

$$+ \ = 1\ , \tag{13}$$

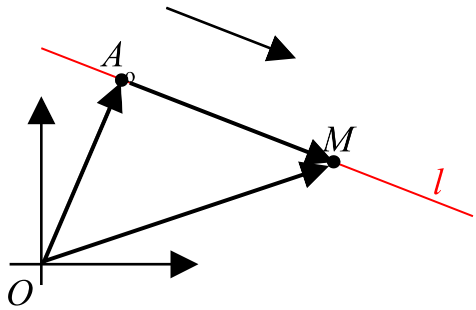
(*уравнение прямой в отрезках*).




Предполагается, что в пунктах 1, 2 и 4 СК является произвольной аффинной, а числа $a$ и $b$ в п°4 могут быть отрицательными. В уравнениях (10) и (10′) в дальнейшем писать $t \in \mathbf{R}$ не будем: это будет подразумеваться.

***Доказательство.*** **1.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x-x_o, y-y_o)\,||\,(a_1, a_2)$, а по второму признаку коллинеарности векторов (теор.1′ §7, гл.1) это равносильно (9).

Обратно, если для координат точки $M(x, y)$ выполнено (9), то по тому же признаку $||$ , а значит, $M\in l$ .




По первому признаку коллинеарности векторов $|| \;\Leftrightarrow\; \exists$ $t\in\mathbf{R}$, такое что $=t$ . В координатах последнее равенство имеет вид

$$x-x_o=t\,a_1,\;\; y-y_o=t\,a_2,$$

Для того, чтобы получить уравнение (10) осталось перенести $x_o$ и $y_o$ в другую часть равенства.

**2.** Если прямая проходит через две точки $A_o(x_o, y_o)$ и $A_1(x_1, y_1)$ , то вектор $(x_1 - x_o,\ y_1 - y_o)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой. Подставляя его координаты в (9) вместо $a_1, a_2$, получим (11).

**3.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой $l$. Тогда $(x-x_o, y-y_o)\perp(A, B)$ $\Leftrightarrow$ $\cdot=0$, а в координатах это условие как раз имеет вид (12). Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (12), то $\perp$ , а значит, $M\in l$ .

**4.** Условие означает, что прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Подставляя их координаты в (10), получим

$$= \quad\Leftrightarrow\quad = \quad\Leftrightarrow\; (13)\,.$$

■

**!** При ответе на экзамене недостаточно написать уравнение прямой: требуется обязательно указать, что означает каждый из параметров, входящих в уравнение. Например, выписав каноническое или параметрическое уравнение прямой, следует указать, что $(x_o,\ y_o)$ – это координаты точки, через которую проходит прямая, а $(a_1, a_2)$ – координаты направляющего вектора. Без данных пояснений ответ в виде выписанного уравнения расценивается, как отсутствие ответа.

***Следствие.*** *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax+By+C=0\,, \qquad (14)$$

*которое называется [общим уравнением прямой](). И обратно, любое уравнение вида* (14) *на плоскости задает прямую.*

***Доказательство.*** Любую прямую на плоскости можно задать с помощью точки и вектора нормали. Тогда ее уравнение в декартовой СК будет иметь вид (12). Раскроем скобки:

$$Ax+By-Ax_o-By_o=0$$

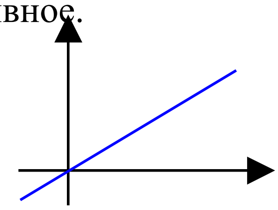
и обозначим $C=-Ax_o-By_o=\text{const}$. Получим уравнение (14).

Обратно, пусть некоторое множество $l$ определяется уравнением (14), и $A_o(x_o,\, y_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (14): $Ax_o+By_o+C=0 \;\Rightarrow\; C=-Ax_o-By_o$. Подставляя это значение в (14) получим (12), а это уравнение, как уже известно, определяет прямую. ■

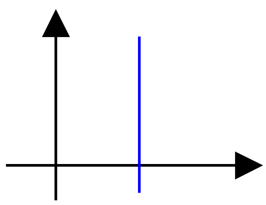
Попутно мы выяснили *геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой*: $(A,\, B)$. И этот факт чрезвычайно важен при исследовании положения прямой и при решении различных задач про прямую на плоскости. Но этот факт верен только в случае декартовой СК.

Если СК на плоскости не является декартовой, то это следствие можно доказать с помощью уравнения (9). В дальнейшем, СК предполагается декартовой, если не оговорено противное.

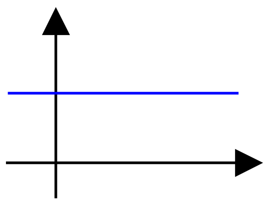
Рассмотрим различные частные случаи общего уравнения прямой.



1. $C=0 \;\Leftrightarrow\; l: Ax+By=0$. Тогда уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0,\,0)$, т.е. прямая проходит через начало координат.



2. $A=0 \;\Leftrightarrow\; By+C=0 \;\Leftrightarrow\; y=-C/B$. Прямая $l\,||\,Ox$.



3. $B=0 \;\Leftrightarrow\; Ax+C=0 \;\Leftrightarrow\; x=-C/A$. Прямая $l\,||\,Oy$.

4. $B\neq 0$. Тогда (14) можно переписать так: $y=-\ x-\ $. Обозначим $k=-A/B$, $q=-C/B$, и получим уравнение

$$y = kx + q, \tag{15}$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. *Угловым* называется коэффициент $k$. Выясним почему.

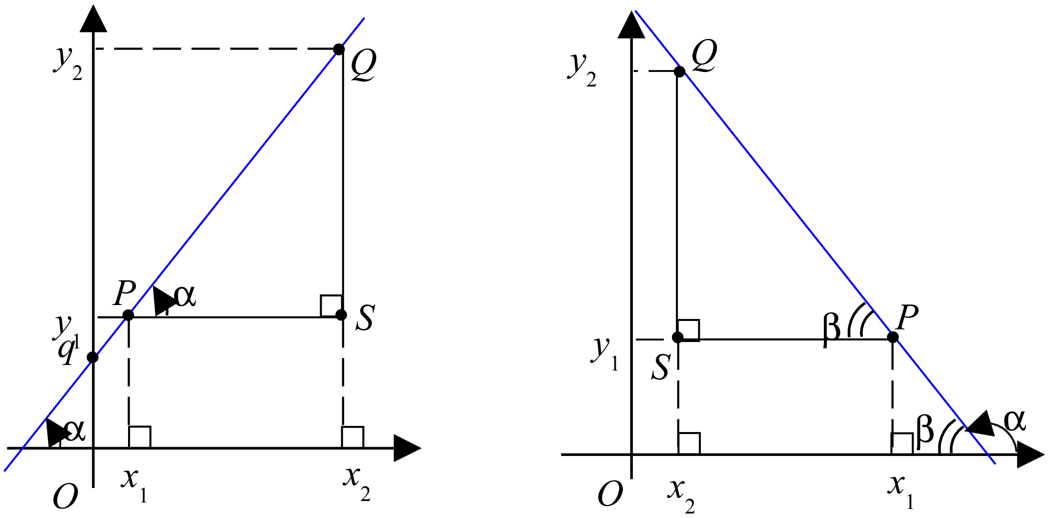
Пусть $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ – две произвольные точки на прямой $l$, где $y_2 \geq y_1$. Подставим их координаты в уравнение прямой: $y_1 = kx_1 + q$, $y_2 = kx_2 + q$ . Вычтем из второго равенства первое:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Поскольку мы исключили случай $l \,||\, Oy$, то $x_2 \neq x_1 \Rightarrow$

$$k = \ . \quad (*_{*}*)$$

Выберем на прямой $l$ направление, соответствующее возрастанию ординаты $y$, и назовем его положительным. Пусть $\alpha$ – угол между положительным направлением оси $Ox$ и положительным направлением прямой $l$. Назовем его углом наклона прямой. Пусть $S$ – точка с координатами $(x_2, y_1)$.




<u>*1 случай*</u>: $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = PS$ и из $\Delta PQS$ находим, что $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

<u>*2 случай*</u>: $x_2 < x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = -PS \Rightarrow k = -QS/PS = -\operatorname{tg}\beta$, где $\beta = \angle QPS$. Но $\beta = \pi - \alpha \Rightarrow -\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, как и в первом случае $k = QS/PS = \operatorname{tg}\alpha$.

Итак, мы доказали, что $k$ есть тангенс угла наклона прямой. Поэтому он называется *угловым коэффициентом*. А геометрический смысл коэффициента $q$ очевиден: это отрезок, отсекаемый прямой на оси $Oy$.

## §3. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие прямые – это частный случай параллельных.

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1)$ и $(A_2, B_2)$ – это векторы нормали к $l_1$ и $l_2$.

***Теорема* 2. 1.** $l_1 \,||\, l_2$ и $l_1 \neq l_2$ $\Leftrightarrow$ $= \ \neq$ .

**2.** $l_1 = l_2$ $\Leftrightarrow$ $= \ =$ .

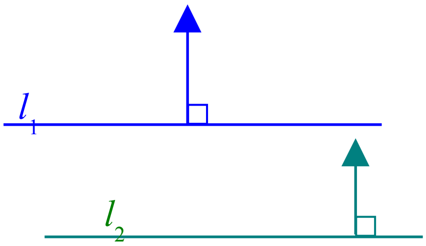
**3.** $l_1 \perp l_2$ $\Leftrightarrow$ $A_1A_2+B_1B_2=0.$

**4.** *угол между* $l_1$ *и* $l_2$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \ = \ . \qquad (16)$$

***Доказательство.* 1, 2.** Очевидно, что $l_1 \,||\, l_2$ $\Leftrightarrow$ $||$ , а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$$= \ = \lambda\,. \quad (*)$$




При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o)$, т. е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o+B_1y_o+C_1=0,$$
$$A_2x_o+B_2y_o+C_2=0.$$

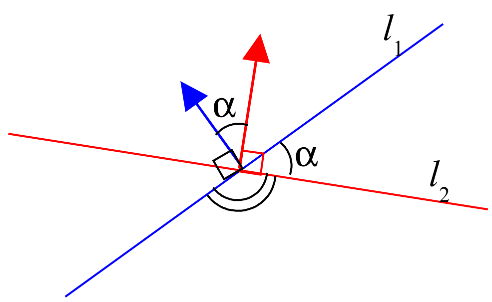
Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$ :

$$(A_1-\lambda A_2)x_o+(B_1-\lambda B_2)y_o+C_1-\lambda C_2=0.$$

В силу $(*)$ обе скобки равны нулю $\Rightarrow$ $C_1-\lambda C_2=0$ $\Leftrightarrow$ $C_1/C_2=\lambda.$ $(**)$ Объединяя $(*)$ и $(**)$, получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения прямых $l_1$ и $l_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, мы получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что углом между двумя прямыми называется меньший из двух углов, которые образуются при их пересечении. Таким образом, угол $\alpha$ между прямыми находится в пределах $0\leq\alpha\leq\pi/2$. Пусть $\beta=\angle(\,,\,)$. Тогда $0\leq\beta\leq\pi$. Очевидно, что $\beta$ совпадает с одним из двух углов, которые образуют прямые при пересечении.



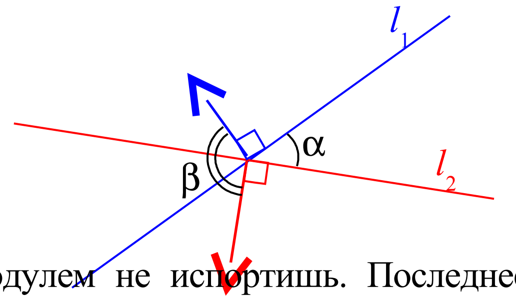
<u>*1 случай*</u>: $0 \le \beta \le \pi/2$. Тогда $\alpha = \beta \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \ \cdot$$

<u>*2 случай*</u>: $\pi/2 < \beta \le \pi$. Тогда $\alpha = \pi - \beta$ и $\cos\beta < 0 \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta =$$

$$= |\cos\beta| = \ \cdot$$




Эта формула подойдет и к первому случаю: неотрицательную величину модулем не испортишь. Последнее равенство в (16) – эта та же формула, только расписанная в координатах. В частности, из (16) следует, что $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \ \cdot = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. ■

***Упражнение* 1.** *Прямые на плоскости могут быть заданы не только общим уравнением. После изучения темы «Взаимное расположение прямой и плоскости» вы легко напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, одна из которых задана каноническим или параметрическим уравнением, а вторая – общим уравнением.*

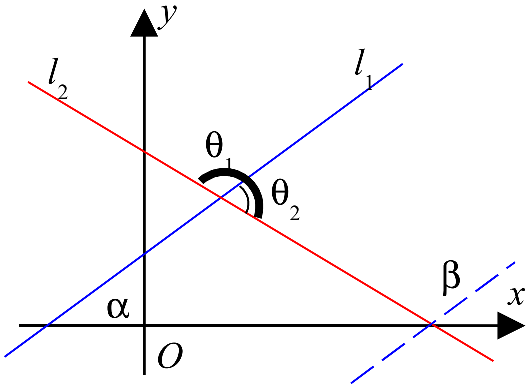
***Упражнение* 2.** *Самостоятельно напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.*

***Теорема* 2.** *Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом*

$$l_1\colon y = k_1x + q_1, \qquad l_2\colon y = k_2x + q_2.$$

*Тогда угол между ними вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tg}\theta = \ .$$




***Доказательство.*** Пусть $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а $\theta_1$ и $\theta_2$ – углы, которые образуются при пересечении прямых (см. чертеж). Тогда $\theta_1 = \beta - \alpha$, и, если $\theta_1 \le \pi/2$, то он будет считаться углом между $l_1$ и $l_2$. В этом случае $\operatorname{tg}\theta_1 \ge 0$. Находим:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \ = \ .$$

Если $\theta_1 > \pi/2$, то между прямыми считается $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \theta_1) = -\operatorname{tg}\theta_1 = |\operatorname{tg}\theta_1| = \ .$$

Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Заметим, что если убрать в числителе модуль, то получится формула, по которой можно вычислить <u>*ориентированный угол от*</u> $l_1$ до $l_2$, (отсчитываемый против часовой стрелки). Данный угол может находиться в пределах $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

## §4. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой.*

***Определение.*** Говорим, что <u>*общее уравнение прямой*</u>

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{14}$$

<u>*имеет нормальную форму*</u>, если $A^2+B^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (14) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на :

$$x + \ y + \ = 0.$$

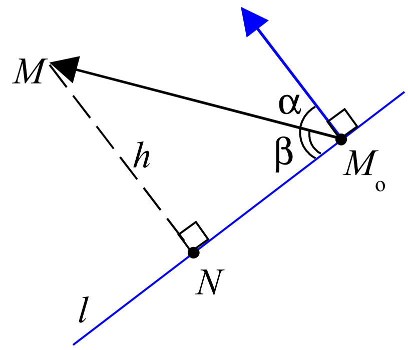
Тогда $\ ^2 + \ ^2 = 1$.

***Теорема 3.*** *Пусть прямая* $l$ *определяется уравнением* (14) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|\,. \tag{17}$$

***Следствие.*** *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (14), *то*

$$h = \ . \tag{17′}$$




***Доказательство.*** Пусть $(A, B)$ – вектор нормали к $l$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\ | = 1$. Пусть $M_o(x_o, y_o)$ – произвольная точка на прямой. Опустим перпендикуляр $MN$ на прямую $l$. Пусть $\alpha = \angle(\ ,\ )$, $\beta = \angle MM_oN$.

<u>*1 случай*</u>. Точка $M$ и вектор лежат в одной полуплоскости относительно прямой $l$. Тогда

$$h = |MN| = |MM_o| \cdot \sin\beta = |\ | \cdot \sin(\ - \alpha) =$$
$$= |\ | \cdot \cos\alpha \cdot |\ | = \ \cdot$$

(мы домножили на $|\ |$, поскольку эта величина равна единице). Находим, что $(x_1 - x_o, y_1 - y_o)$ $\Rightarrow$

$$h = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) = Ax_1 + By_1 + C - (Ax_o + By_o + C)$$

(мы добавили и отняли $C$). Поскольку $M_o \in l$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

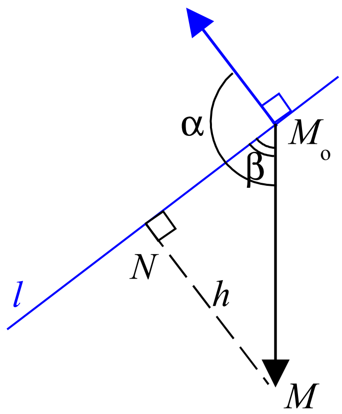
$$h = Ax_1 + By_1 + C.$$

<u>*2 случай*</u>. Точка $M$ и вектор лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $l$. Тогда $\beta = \alpha - \pi/2 \;\Rightarrow\; \sin\beta = -\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h = - \cdot = -Ax_1 - By_1 - C.$$

Поскольку $h$ – это расстояние, то $h \geq 0$. Это значит, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + C < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|\,.$$

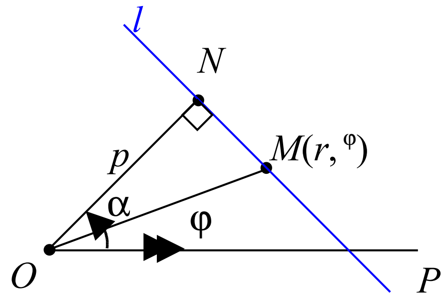



Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ зависит от того, в какой полуплоскости находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полуплоскости относительно прямой $l$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ прямую $l$ или нет).

## §5. *Уравнение прямой в полярных координатах.*

Пусть на плоскости заданы прямая $l$ и полярная система координат, $OP$ – полярная ось. Опустим перпендикуляр $ON$ из полюса на прямую $l$. Обозначим $p = |ON|$ – его длина, $\alpha$ – ориентированный угол между $OP$ и $ON$. Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка прямой.

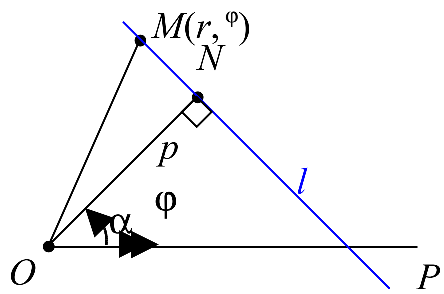



Тогда из $\Delta OMN$ находим

$$p = r \cdot \cos(\alpha - \varphi) \quad \text{или} \quad p = r \cdot \cos(\varphi - \alpha). \quad (18)$$

Поскольку косинус четная функция, то достаточно только первого уравнения.

Обратно, если координаты точки $M(r, \varphi)$ удовлетворяют (18), то $\Delta OMN$ – прямоугольный $\Rightarrow M \in l$.




Итак, (18) представляет собой <u>*уравнение прямой в полярных координатах*</u>.

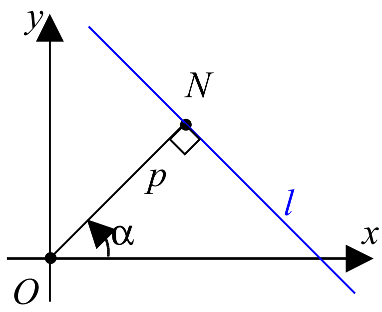
Введем теперь декартову СК так, чтобы $Ox \uparrow\uparrow OP$. Уравнение (18) можно переписать так:

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Согласно формулам перехода $r\cdot\cos\varphi = x,\ r\cdot\sin\varphi = y\ \Rightarrow$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{19}$$

Это уравнение называют *нормальным уравнением прямой*. Еще раз отметим геометрический смысл используемых в этом уравнении параметров: $p$ – это длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а $\alpha$ – ориентированный угол между осью $Ox$ и этим перпендикуляром. Поскольку $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = =1$, то это уравнение имеет нормальную форму, как это было определено в предыдущем параграфе.




***Упражнение.*** *Пусть две прямые заданы своими уравнениями в полярных координатах*: $l_1$: $p_1 = r\cdot\cos(\alpha_1 - \varphi)$, $l_2$: $p_2 = r\cdot\cos(\alpha_2 - \varphi)$. *Выпишите условия параллельности и совпадения этих прямых, а также найдите угол между ними. Найдите, чему равно расстояние между* $l_1$ и $l_2$*, если они параллельны.*

## §6. *Пучок прямых.*

Пусть две несовпадающие прямые на плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0\ ,$$
$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0\ .$$

Рассмотрим совокупность всех прямых, которые задаются различными уравнениями вида

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + \lambda C_1 + \mu C_2 = 0, \tag{20}$$

где $\lambda$ и $\mu$ – числа не равные нулю одновременно. Это множество называется *пучком прямых*. Очевидно, при $\lambda = 1,\ \mu = 0$ мы получим уравнение прямой $l_1$, а при $\lambda = 0,\ \mu = 1$ – уравнение прямой $l_2$. Таким образом, прямые $l_1$ и $l_2$ тоже входят в пучок.

***Теорема 4.* 1.** *Если прямые* $l_1$ *и* $l_2$ *пересекаются в точке* $M_o$, *то определяемый ими пучок прямых, состоит из всех прямых, проходящих через* $M_o$.

**2.** *Если* $l_1 \,||\, l_2$ *, то определяемый этими прямыми пучок состоит из всех параллельных им прямых.*

***Доказательство.* 1.** Перепишем (20) в виде

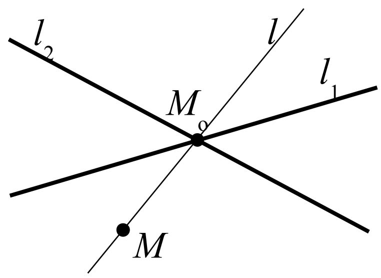
$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (20')$$

Пусть $M_o(x_o, y_o)=l_1\cap l_2$. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Подставим ее координаты в $(20')$:

$$\lambda(A_1x_o+B_1y_o+C_1)+\mu(A_2x_o+B_2y_o+C_2)=0.$$

Поскольку обе скобки должны быть равны нулю, то мы получаем верное равенство независимо от $\lambda$ и $\mu$. Таким образом, все прямые пучка (20) проходят через $M_o$.

Покажем, что в пучок входят все прямые, проходящие через $M_o$. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, отличная от $M_o$. Подставим ее координаты в $(20')$ и обозначим




$$X=A_1x_1+B_1y_1+C_1, \quad Y=A_2x_1+B_2y_1+C_2.$$

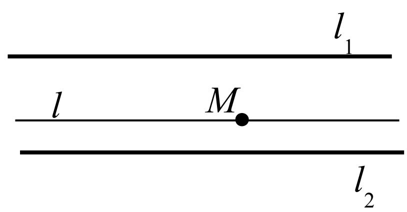
Получим уравнение

$$\lambda X+\mu Y=0 \qquad (*)$$

относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$. Это уравнение всегда имеет решение $(\lambda_o, \mu_o)$. При $\lambda=\lambda_o$ и $\mu=\mu_o$ уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую через $M$.

**2.** Пусть $l_1 || l_2$. Тогда выполнено

$$= = k.$$




Пусть $l$– произвольная прямая из пучка (20). Применим к ней признак параллельности с прямой $l_2$:

$$= \quad \Leftrightarrow \quad \lambda+\mu=\lambda+\mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda k+\mu=\lambda k+\mu,$$

т.е. имеем верное равенство. Значит $l || l_2$.

Покажем, что в пучок входят все прямые параллельные $l_1$ и $l_2$. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на $l_1$, ни на $l_2$. Подставив ее координаты в $(20')$ также получим уравнение $(*)$ относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$, где $X$ и $Y$ оба ненулевые. При $\lambda$ и $\mu$, удовлетворяющих $(*)$ уравнение (20) будет задавать прямую, проходящую чере■ $M$.

Если все прямые пучка пересекаются в точке $M_o$, то точка $M_o$ называется *центром пучка*, и *пучок прямых называется собственным или центральным*. Если все прямые пучка параллельны друг другу, то *пучок называется нецентральным или несобственным*.

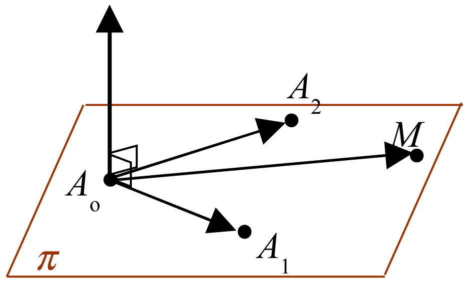
## §7. *Уравнение плоскости в пространстве.*

Плоскость $\pi$ в пространстве можно задать

а) с помощью точки $A_o \in \pi$ и ненулевого вектора $\perp \pi$; тогда можем написать, что $\pi = \{M | \perp\}$; $(*)$

б) с помощью точки $A_o \in l$ и двух неколлинеарных векторов и , параллельных $\pi$;

в) с помощью трех точек $A_o, A_1, A_2 \in \pi$, не лежащих на одной прямой.




***Теорема* 4. 1.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, перпендикулярно вектору $(A, B, C)$, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (21)$$

**2.** *Плоскость $\pi$, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам и задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (22)$$

**3.** *Плоскость $\pi$, проходящая через три точки $A_o(x_o, y_o, z_o)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (23)$$

**4.** *Плоскость $\pi$, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки $a$, $b$, $c$ задается уравнением*

$$+ + = 1 \qquad (24)$$

(*предполагается, что $a$, $b$, $c$ могут быть отрицательными*).

***Доказательство.* 1.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\cdot = 0$. Поскольку $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$, то последнее равенство в координатах как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (21), то $\perp$ $\Leftrightarrow$ $M \in \pi$.

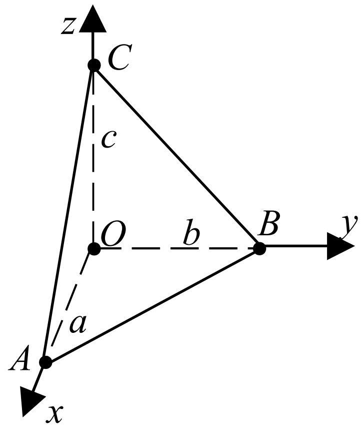
**2.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда компланарен векторам  и  , а это равносильно тому, что смешанное произведение этих трех векторов равно нулю:  = 0. В координатах последнее равенство как раз имеет вид (22).

Обратно, если координаты точки $M(x,y,z)$ удовлетворяют (22), то векторы  , ,  компланарны, а значит $M\in\pi$.

**3.** Если плоскость проходит через три точки $A_o(x_o, y_o, z_o)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, то векторы $(x_1– x_o, y_1– y_o, z_1– z_o)$ и $(x_2 – x_o, y_2 – y_o, z_2 – z_o)$ неколлинеарны друг другу и параллельны плоскости $\pi$. Подставим их координаты в (22) вместо координат векторов  и  , и получим (23).

**4.** Условие означает, что плоскость проходит через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Подставим их координаты в уравнение (23):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 .$$




Самостоятельно раскройте определитель и приведите получившееся уравнение к виду (24).

Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках. ■

***Следствие.*** *Любая плоскость определяется уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \tag{25}$$

*которое называется общим уравнением плоскости. И обратно, всякое уравнение вида* (25) *определяет плоскость.*

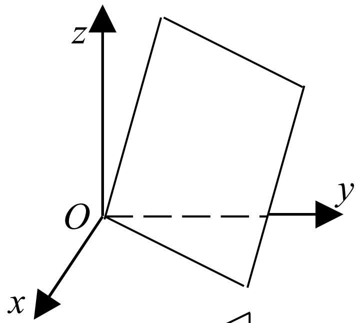
***Доказательство.*** Любая плоскость может быть задана с помощью точки и вектора нормали, а значит ее можно задать уравнением вида (21). Раскроем скобки и обозначим $D = –Ax_o– By_o– Cz_o=$ const. Получим уравнение (25).

Обратно, пусть некоторое множество $\pi$ определяется уравнением (25). Пусть $A_o(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (25):

$$Ax_o+ By_o+ Cz_o+ D = 0.$$

Отсюда $D = –Ax_o– By_o– Cz_o$ , и подставляя это значение в (25) получим (21). А это уравнение, как уже известно, задает плоскость. ■

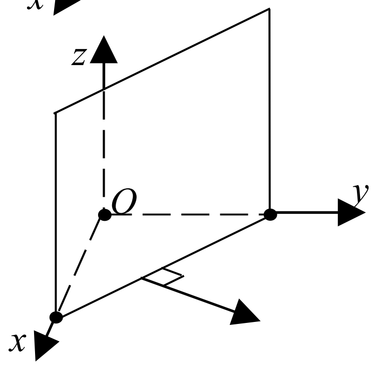
Рассмотрим различные частные случаи плоскостей, задаваемых уравнениями вида (25).




**1.** $D=0$. Тогда уравнению

$$Ax+By+Cz=0$$

удовлетворяют координаты точки $O(0,0,0)$. Плоскость проходит через начало координат.

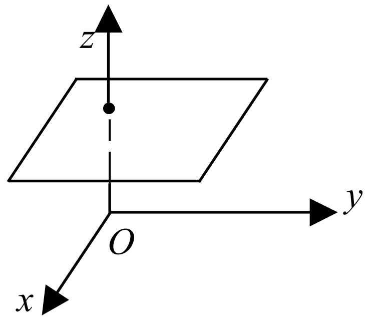



**2.** $C=0$. Имеем уравнение

$$Ax+By+D=0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости – $(A,B,0)$ и $\perp Oz$, а значит, $\pi \,||\, Oz$.

Аналогично, при $B=0$ получим $\pi \,||\, Oy$, а при $A=0$ – $\pi \,||\, Ox$.




**3.** $A=B=0$. Имеем уравнение

$$Cz+D=0,$$

которое равносильно $z=-C/D$. Тогда $\pi \perp Oz$.

Аналогично, при $A=C=0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B=C=0$ – $\pi \perp Ox$.

## §8. *Уравнение плоскости в нормальной форме. Расстояние от точки до плоскости.*

***Определение.*** Говорим, что общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad (25)$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $(A, B, C)$ – единичный.

Если уравнение (25) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu =$ . Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2 + (B/\mu)^2 + (C/\mu)^2 = 1$.

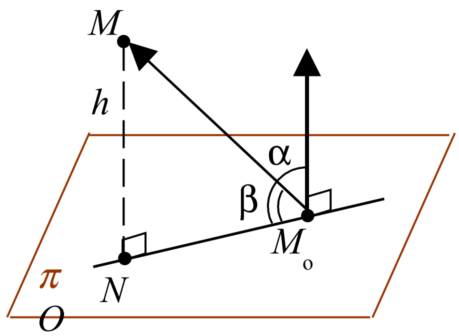
***Теорема* 5.** *Пусть плоскость* $\pi$ *определяется уравнением* (25) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |\,Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\,|\,. \qquad (26)$$

***Следствие.*** *Если плоскость определяется произвольным уравнением вида* (25), *то*

$$h = \;. \qquad (26')$$

***Доказательство.*** Пусть $(A, B)$ – вектор нормали к $\pi$. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\;| = 1$. Пусть $M_o(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляр $MN$ на плоскость $\pi$. Пусть $\alpha = \angle(\;,\;)$, $\beta = \angle MM_oN$.




1 случай. Точка $M$ и вектор лежат в одном полупространстве относительно плоскости $\pi$. Тогда

$$h = |MN| = |MM_o|\cdot\sin\beta = |\;|\cdot\sin(-\alpha) = |\;|\cdot\cos\alpha\cdot|\;| = \cdot$$

(мы домножили на $|\;|$, поскольку это единица). Находим, что

$$(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z - z_o) \Rightarrow$$

$$h = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) + C(z_1 - z_o) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_o + By_o + Cz_o + D)$$

(мы добавили и отняли $D$). Поскольку $M_o \in \pi$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

2 случай. Точка $M$ и вектор лежат в разных полупространствах относительно плоскости $\pi$. Тогда так же, как и в случае прямой на плоскости $\beta = \alpha - \pi/2 \Rightarrow \sin\beta = -\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h = - \cdot = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D.$$

Поскольку $h$ – это расстояние, то $h \geq 0$. Это означает, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому $h = |Ax_1 + By_1 + C|$ . Эта формула подойдет и к первом[redacted]случаю.

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ зависит от того, в каком полупространстве находится точка $M$. Это позволяет для двух данных точек $M_1$, $M_2$ выяснить, лежат ли они в одной полупространстве относительно плоскости $\pi$ или в разных ($\Leftrightarrow$ пересекает отрезок $M_1M_2$ плоскость $\pi$ или нет).

***Упражнение.*** *Нарисуйте чертеж к второму пункту в доказательстве теоремы и покажите, что в этом случае* $\beta = \alpha - \pi/2$.

## §9. *Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.*

В этом параграфе для удобства изложения будем считать, что совпадающие плоскости – это частный случай параллельных.

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ,$$
$$\pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ .$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $(A_1, B_1, C_1)$ и $(A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к $\pi_1$ и $\pi_2$.

***Теорема* 6. 1.** $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $= = \neq$ .

**2.** $\pi_1 = \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $= = =$ .

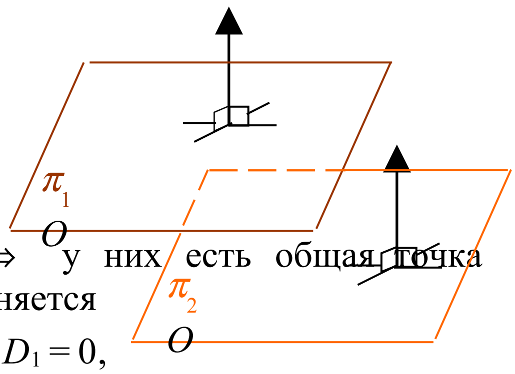
**3.** $\pi_1 \perp \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

**4.** *угол между* $\pi_1$ и $\pi_2$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \ = \ . \quad (27)$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Очевидно, что $\pi_1 || \pi_2$ $\Leftrightarrow$ $||$ , а по второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$$= = = \lambda\ . \quad (*)$$




При этом, прямые будут совпадать $\Leftrightarrow$ у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$, т.е. если одновременно выполняется

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1z_o + D_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2 = 0.$$

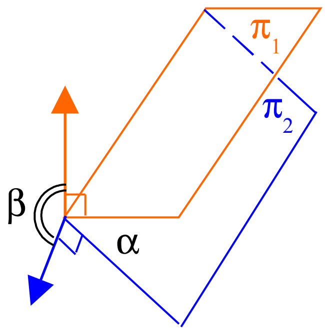
Вычтем из первого равенства второе, домноженное на $\lambda$ :

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + (C_1 - \lambda C_2)z_o + (D_1 - D_2) = 0.$$

В силу (∗) обе скобки равны нулю $\Rightarrow$ $C_1 - \lambda C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1/C_2 = \lambda$. (∗∗). Объединяя (∗) и (∗∗) получаем требуемый результат.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$ пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число $\lambda$, получим второе уравнение. Значит эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

**3, 4.** Напомним, что плоскости при пересечении образуют две пары вертикальных двугранных углов, и углом между двумя плоскостями называется величина меньшей пары углов. Таким образом, угол $\alpha$ между плоскостями находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\cos\alpha \ge 0$. Пусть $\beta = \angle( , )$. Тогда, очевидно, что $\beta$, либо равен $\alpha$, либо является смежным с ним (на рисунке изображен только второй случай).




В первом случае

$$\cos\alpha = \cos\beta = \ ,$$

а во втором –

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = |\cos\beta| = \ .$$

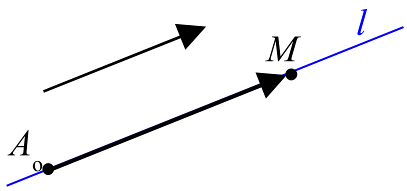
Последняя формула подойдет и к первому случаю. ■

## §10. *Уравнение прямой в пространстве.*

Прямую в пространстве можно задать

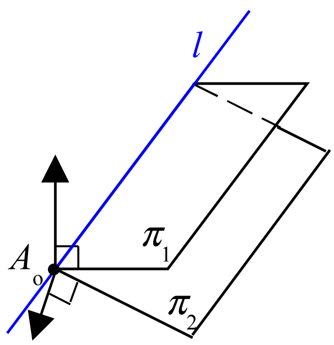
а) с помощью точки $A_o \in l$ и ненулевого вектора $||$ $l$, который называется <u>*направляющим вектором прямой*</u>; тогда можем написать, что

$$l = \{M | \ || \ \}; \ (*)$$




б) как пересечение двух плоскостей $l = \pi_1 \cap \pi_2$ ; в этом случае $l$ будет задаваться системой из двух уравнений (см. §1); это равносильно заданию точки $A_o \in l$ и двух векторов перпендикулярных прямой.

Задать прямую в пространстве с помощью одного вектора нормали нельзя: через данную точку перпендикулярно данному вектору проходит бесконечно много прямых.



***Теорема 6.*** **1.** *Прямая* $l$, *проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *параллельно вектору* $(a_1, a_2, a_3)$ *задается уравнением*

$$= = , \tag{28}$$

(*каноническое уравнение*), *или* *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t, \ t \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{29}$$

*которые можно записать в векторном виде*: $= + t$, $t \in \mathbf{R}$, *где* $=$ – *радиус-вектор точки* $A_o$.

**2.** *Прямая, проходящая через две точки* $A_o(x_o, y_o, z_o)$ *и* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, *задается уравнением*

$$= = , \tag{30}$$

**3.** *Прямая, проходящая через точку* $A_o(x_o, y_o, z_o)$, *перпендикулярно двум векторам нормали* $(A_1, B_1, C_1)$ *и* $(A_2, B_2, C_2)$ *задается в декартовой СК системой уравнений*

$$\begin{cases} A_1(x - x_o) + B_1(y - y_o) + C_1(z - z_o) = 0, \\ A_2(x - x_o) + B_2(y - y_o) + C_2(z - z_o) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

***Доказательство.*** **1, 2.** Доказательство этих пунктов дословно повторяет доказательство пунктов 1 и 2 из теоремы 1, с той лишь разницей, что у всех точек и векторов добавляется еще третья координата.

**3.** Первое из уравнений системы (31) задает плоскость $\pi_1$, проходящую через точку $A_o$, перпендикулярно вектору , а второе уравнение – плоскость $\pi_2$, проходящую через точку $A_o$ , перпендикулярно вектору . Пересечение этих плоскостей и задает нашу прямую. ■

## §11. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.*

Пусть плоскость $\pi$ задана общим уравнением, а прямая $l$ – каноническим уравнением:

$$\pi\colon\ Ax + By + Cz + D = 0, \qquad l\colon\ = = .$$

Тогда сразу можем отметить, что $(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости $\pi$, $(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой $l$ и точка $A_o(x_o, y_o, z_o) \in l$.

Для удобства изложения, в этом параграфе будем считать, что $l \in \pi$ – это частный случай $l \,||\, \pi$.

***Теорема* 7.** **1.** $l \in \pi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (32.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0, & (32.2) \end{cases}$

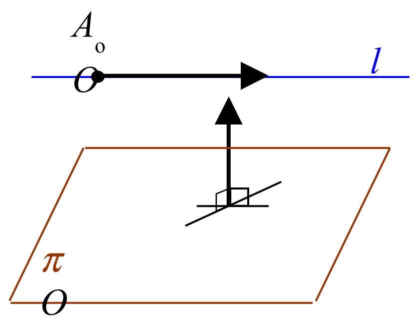
**2.** $l \,||\, \pi$ *и* $l \notin \pi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (32.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0, & (32.3) \end{cases}$

**3.** $l \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad = \; = \; .$ (33)

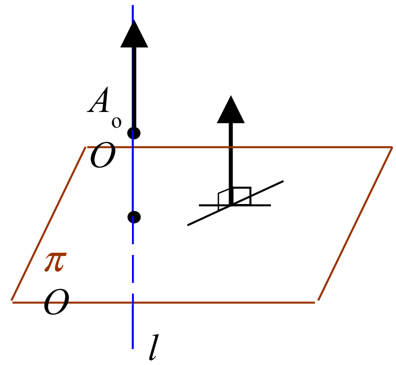
**4.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

$$\sin\alpha = \; = \; . \qquad (34)$$

***Доказательство.*** **1,2.** Очевидно, что $l \,||\, \pi \;\Leftrightarrow\; \perp \;\Leftrightarrow\; \cdot = 0$, а именно это и означает равенство (32.1). При этом, если выполнено (32.2), то $A_o(x_o, y_o, z_o) \in \pi$, а значит, и вся прямая будет лежать в плоскости. Если выполнено (32.3), то $A_o \notin \pi$, а значит, и $l \notin \pi$.

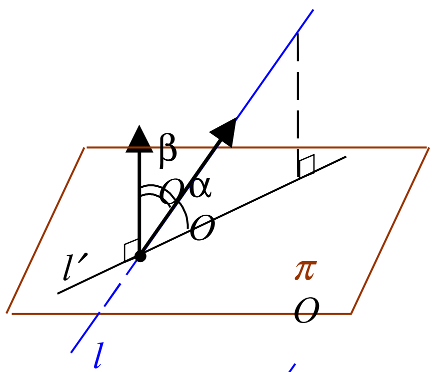



**3.** Очевидно, что $l \perp \pi \;\Leftrightarrow\; ||$, а (33) как раз представляет собой условие коллинеарности этих векторов.




**4.** Напомним, что углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Поэтому, если $\alpha$ – угол между $l$ и $\pi$, то $0 \le \alpha \le \pi/2$, и $\sin\alpha \ge 0$.

Обозначим $\beta = \angle( \;,\; )$. Тогда возможны два случая: $\alpha = \pi/2 - \beta$ или $\alpha = \beta - \pi/2$. Оба случая изображены на рисунках.

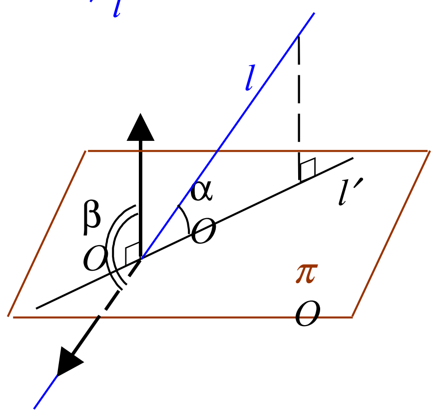



В первом случае имеем

$$\sin\alpha = \cos\beta = \; ,$$

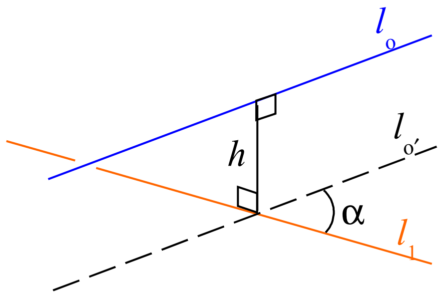
а во втором случае –

$$\sin\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = \; .$$




Эта формула подойдет и к первому случаю. ■

## §12. *Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между прямыми.*




Напомним, что углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку. Другими словами, если прямые $l_o$ и $l_1$ скрещиваются, то мы должны совершить параллельный перенос прямой $l_o$, так чтобы получилась прямая $l_o'$, пересекающаяся с $l_1$, и измерять угол между $l_o'$ и $l_1$.

Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр. Его длина называется расстоянием между прямыми.

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_o:\ = = ,\qquad l_1:\ = = .\qquad (35)$$

Тогда сразу можем сделать вывод, что $(a_1, a_2, a_3)\,||\,l_o$, $(b_1, b_2, b_3)\,||\,l_1$, $A_o(x_o, y_o, z_o)\in l_o$, $A_1(x_1, y_1, z_1)\in l_1$. Составим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

и пусть $\Delta = \det \mathbf{A}$.

***Теорема* 8. 1.** *Угол между* $l$ *и* $\pi$ *вычисляется по формуле*

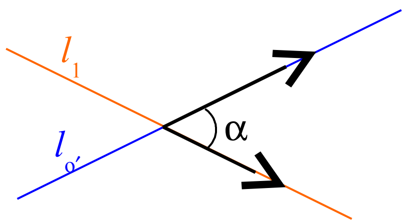
$$\cos\alpha = = .\qquad (36)$$

**2.** *Прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\Delta\neq 0$.

**3.** *Прямые* $l_o$ и $l_1$ *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$ и *не коллинеарен* .

**4.** $l_o\,||\,l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$ и $||$ .

**5.** $l_o=l_1 \Leftrightarrow \operatorname{rank}\mathbf{A}=1$.

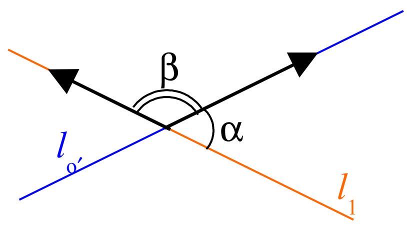



***Доказательство.* 1.** Угол $\alpha$ между прямыми $l_o$ и $l_1$ может быть равен углу $\beta$ между их направляющими векторами , , а может быть смежным с ним. В первом случае

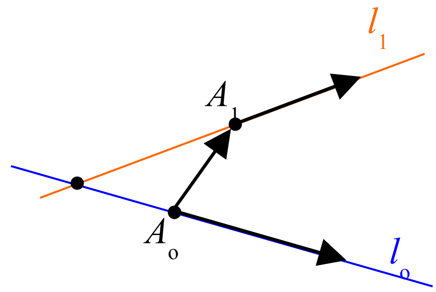
$$\cos\alpha = \cos\beta = ,$$

а во втором случае

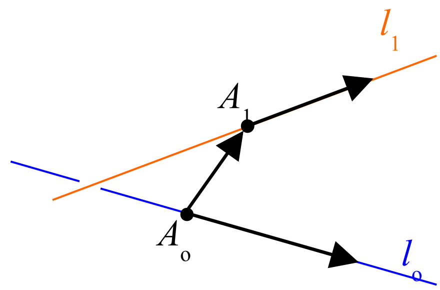
$$\cos\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = .$$



Эта формула подойдет и к первому случаю. Обратите внимание, что на чертеже изображена не прямая $l_o$, а параллельная ей прямая $l_o'$ .

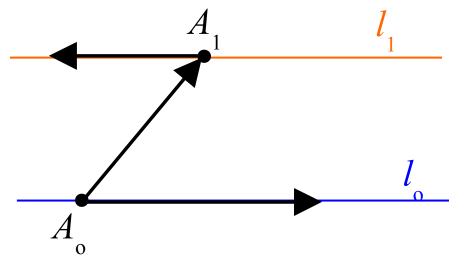



**2, 3.** Очевидно, что прямые $l_o$ и $l_1$ не параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы и не коллинеарны. При этом, прямые лежат в одной плоскости и пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы , , компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю: $= 0$. А в координатах это произведение точности равно $\Delta$ .

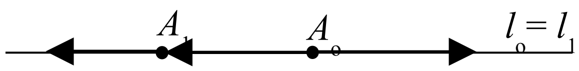



Соответственно, если $\Delta \neq 0$, то векторы , , не компланарны, а значит, прямые $l_o$ и $l_1$ не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они скрещиваются.

**4, 5.** Если $l_o || l_1$ или $l_o = l_1$, то || . Но в первом случае вектор неколлинеарен и , и поэтому первая строка в матрице **A** непропорциональна второй и третей строкам. Значит, rank **A** = 2.




Во втором случае все три вектора , , коллинеарны друг другу, и поэтому, все строки в матрице **A** пропорциональны. Значит, rank **A** = 1.




И обратно, если || , то прямые $l_o$ и $l_1$ параллельны или совпадают; при этом, вторая и третья строки матрицы **A** пропорциональны. Если, при этом, rank **A** = 2, то первая строка матрицы непропорциональна второй и третьей, а значит, вектор неколлинеарен и $\Leftrightarrow$ $l_o || l_1$. Если же rank **A** = 1, то все строки в матрице **A** пропорциональны, а значит, все три вектора , , коллинеарны друг другу $\Leftrightarrow$ $l_o = l_1$. ■

***Теорема 9.*** *Пусть две прямые* $l_o$ *и* $l_1$ *в пространстве заданы своими каноническими уравнениями* (35). *Тогда*

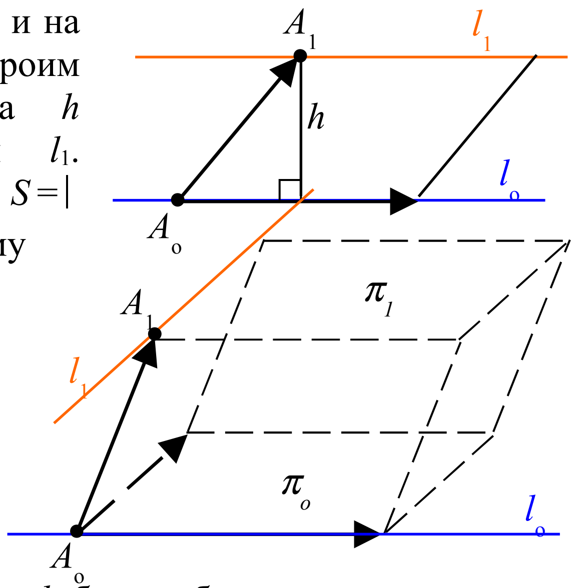
**1.** *если* $l_o || l_1$ , *то расстояние между* $l_o$ *и* $l_1$ *находится по формуле*

$$h = \quad , \qquad (37)$$

**2.** *если* $l_o$ *и* $l_1$ *скрещиваются, то расстояние между ними находится по формуле*

$$h = \quad . \qquad (38)$$

***Доказательство.*** **1.** Пусть $l_o || l_1$. Отложим вектор  от точки $A_o$, и на векторах  и  построим параллелограмм. Тогда его высота $h$ будет расстоянием между $l_o$ и $l_1$. Площадь этого параллелограмма: $S = |\quad \times \quad|$, а основание равно $|\quad|$. Поэтому




$$h = S/|\quad| = (37).$$

**2.** Пусть $l_o$ и $l_1$ скрещиваются. Проведем через прямую $l_o$ плоскость $\pi_o || l_1$, а через прямую $l_1$ проведем плоскость $\pi_1 || l_o$.

Тогда общий перпендикуляр к $l_o$ и $l_1$ будет общим перпендикуляром к $\pi_o$ и $\pi_1$. Отложим векторы  и  из точки $A_o$ и на векторах , и построим параллелепипед. Тогда его нижнее основание лежит в плоскости $\pi_o$, а верхнее – в плоскости $\pi_1$. Поэтому высота параллелепипеда будет общим перпендикуляром к $\pi_o$ и $\pi_1$, а ее величина $h$ будет расстоянием между $l_o$ и $l_1$. Объем параллелепипеда равен $|\quad|$, а площадь основания – $|\quad\times\quad| \Rightarrow$

$$h = V/S_{осн} = (38). \quad \blacksquare$$

***Следствие.*** *Расстояние от точки* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой* $l$, *заданной уравнением*

$$l: \quad = \quad =$$

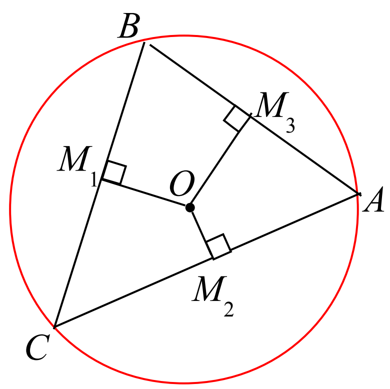
*вычисляется по формуле* (37).

## §13. *Примеры решения задач.*

**1.** *Даны координаты вершин* $A(1,-6)$, $B(-3, 0)$, $C(6, 9)$ *треугольника* $ABC$. *Составить уравнение окружности описанной вокруг треугольника.*

***Решение.*** Для того, чтобы составить уравнение окружности нам необходимо знать ее радиус $R$ и координаты центра $O(a, b)$. Тогда уравнение выглядит так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 .$$




Центр окружности, описанной вокруг треугольника находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Находим координаты середин $M_1(x_1, y_1)$, и $M_3(x_3, y_3)$ сторон $BC$ и $AB$ соответственно:

$$x_1 = \ = \ = \ , \ y_1 = \ = \ = \ , M_1 .$$

Аналогично $M_3(-1,-3)$.

Пусть $l_3$ – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к $AB$ , а $l_1$ – к $BC$. Тогда $= (-4, 6) \perp l_3$ и $l_3$ проходит через $M_3$ . Поэтому ее уравнение:

$$-4(x+1) + 6(y+3) = 0.$$

Аналогично $= (9, 9) \perp l_3$ . Поэтому уравнение $l_1$:

$$9(x- \ ) + 9(y - \ ) = 0$$

$$x + y - 6 = 0.$$

Имеем $O = l_1 \cap l_3$. Поэтому, чтобы найти координаты точки $O$ необходимо решить совместно уравнения $l_1$ и $l_3$ :

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 , \\ -4x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 10y - 10 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = 1, x = 5, O(5, 1)$.

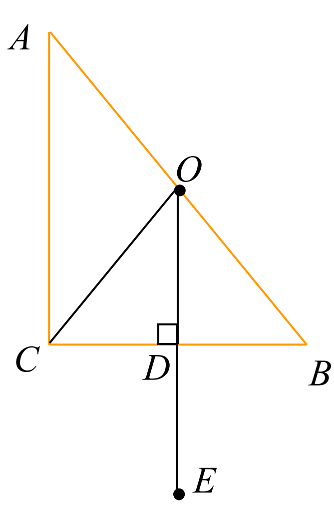
Радиус равен расстоянию от $O$ до любой из вершин треугольника. Находим:

$$R = |\ \ | = \ = \ .$$

Значит уравнение окружности:

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 65.$$

**2.** *В прямоугольном треугольнике* $ABC$ *известны уравнение одного из катетов* $3x - 2y + 5 = 0$, *координаты вершины* $C(-5,-5)$ *и координаты середины* $O(-3/2,-3)$ *гипотенузы* $AB$. *Найти координаты вершин* $A$, $B$ *и координаты точки* $E$, *симметричной* $O$ *относительно стороны* $BC$. *Найти координаты точки пересечения медиан треугольника* $ABC$ .




***Решение.*** Пусть катет, уравнение которого нам дано, – это $CB$. Он задан общим уравнением вида

$$ax + by + c = 0.$$

В данном уравнении геометрический смысл

коэффициентов $a$ и $b$ – это координаты
вектора нормали $(a, b)$. Поэтому $(3,-2)\perp BC$.
Составим уравнение перпендикуляра $l = OD$ к стороне $CB$ и найдем координаты точки $D$. Вектор будет параллелен $OD$, т.е. он является направляющим вектором этой прямой. Кроме этого, нам известны координаты точки $O$ на этой прямой. Составляем параметрическое уравнение $l$ :

$$\begin{cases} x = - \ + 3t, \\ y = -3 - 2t \ . \end{cases} \qquad (*)$$

Имеем $D = l \cap BC$. Поэтому, для того, чтобы найти координаты этой точки мы должны решить совместно уравнения $l$ и $BC$. Подставляем $x$ и $y$ из уравнения $l$ в уравнение $BC$ :

$$3(- \ + 3t) - 2(-3 - 2t) + 5 = 0,$$
$$- \ + 9t + 6 + 4t + 5 = 0,$$
$$13t = - \ , \quad t_D = - \ .$$

Подставляем найденное $t$ в уравнение $l$ и находим координаты точки $D(-3,-2)$. Для того, чтобы найти координаты $E$ вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае, начальная точка – это $O$, вектор скорости – это . Отрезок $OE$ вдвое длиннее отрезка $OD$. Если за время $t_D = -$ мы прошли путь от $O$ до $D$, то путь от $O$ до $E$ мы пройдем за время $t_E = 2t_D = -1$. Подставляя это значение в $(*)$, находим $E(-4{,}5;-1)$.

Точка $D$ делит отрезок $BC$ пополам. Поэтому

$$x_D = \ , \quad y_D = \ .$$

Отсюда находим

$$x_B = 2x_D - x_C = -1, \quad y_B = 2y_D - y_C = 1, \quad B(-1, 1).$$

Аналогично, используя тот факт, что $O$ – середина $AB$, находим координаты точки $A(-2,-7)$. Возможен другой путь решения этой задачи: достроить $\Delta ABC$ до параллелограмма.

Общие формулы деления отрезка в данном отношении выглядят так:

$$x_C = \ , \quad y_D = \ ,$$

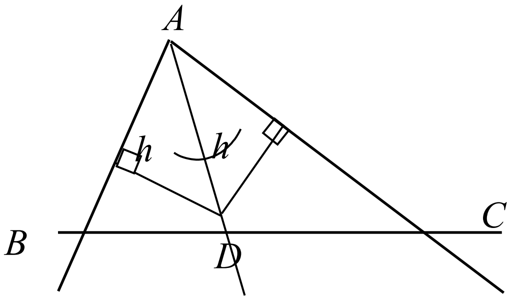
если точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda_1{:}\lambda_2$, т.е.
$|AC|:|BC| = \lambda_1{:}\lambda_2$.
Известно, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины. В нашем случае $P$ делит $CO$ в отношении 2:1. Поэтому

$x_P = \ = \ = -$,

$y_P = \ = \ = - \ .$

***Ответ***: $A(–2,–7)$, $B(–1, 1)$, $P$.

**3.** *Даны координаты вершин* $A(– 4,–2)$, $B(9, 7)$, $C(2,– 4)$ *треугольника ABC. Составить общее уравнение биссектрисы AD и найти координаты точки D.*




***Решение.*** Из курса элементарной математики известно, что $=$ . Вычисляем

$(13, 9)$, $(6,–2)$;

$| | = = 5$, $| | = = 2$ .

Значит $BD : DC = 5 : 2$ . Далее, применяя формулы деления отрезка в заданном отношении (см. задачу 16) находим

$x_D = \ = \ = 4$,

$y_D = \ = \ = -$ , $D(4,- \ )$.

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $D$. Для неё вектор является направляющим. Но, в качестве направляющего мы можем взять любой вектор, коллинеарный . Например, удобно будет взять $=$ , $(7, 1)$. Тогда уравнение

$AD : \ = y + 2 \ \Leftrightarrow \ x - 7y - 10 = 0.$

***Ответ***: $D(4,- \ )$, $AD$: $x - 7y - 10 = 0$.

**4.** *Даны уравнения двух медиан* $x – y – 3 = 0$, $5x + 4y – 9 = 0$ *треугольника ABC и координаты вершины* $A(– 1, 2)$. *Составьте уравнение третьей медианы*.

***Решение.*** Сначала мы убедимся, что точка $A$ не принадлежит данным медианам. Медианы треугольника пересекаются в одной точке $M$. Поэтому они входят в пучок прямых, проходящих через $M$. Составим уравнение этого пучка:

$$\lambda(x - y - 3) + \mu(5x + 4y - 9) = 0.$$

Коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ определяются с точностью до пропорциональности; поэтому можем считать, что $\mu = 1$ (если $\mu = 0$ то уравнение пучка задает только первую медиану, а искомая прямая не совпадает с ней). Получаем уравнение пучка:

$$(\lambda + 5)x + (-\lambda + 4)y - 3\lambda - 9 = 0.$$

Нам из этого пучка надо выбрать прямую, проходящую через точку $A(-1, 2)$. Подставим её координаты в уравнение пучка:

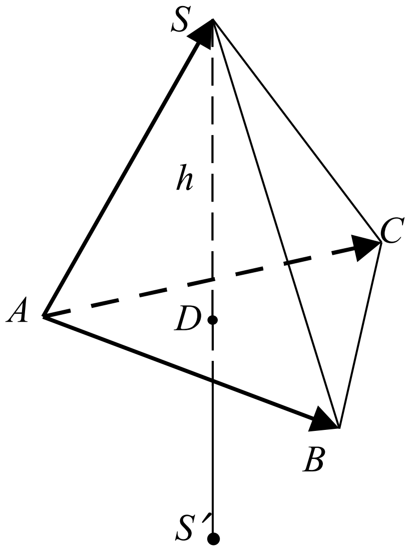
$$-(\lambda+5)+2(-\lambda+4)-3\lambda-9=0,$$

$$-6\lambda-6=0,\ \lambda=-1.$$

Найденное значение $\lambda$ подставляем в уравнение пучка и получаем искомое уравнение медианы:

$$4x+5y-6=0.$$

***Ответ*:** $4x+5y-6=0$.




**5.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды* $SABC$: $A(-3, 7, 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$ $S(6,-5,-2)$. *Составить уравнение плоскости основания* $ABC$ *и уравнение высоты* $SD$. *Найти координаты точки* $D$ *и точки* $S'$, *симметричной* $S$ *относительно плоскости основания.*

***Решение.*** Найдем координаты двух векторов параллельных плоскости основания $\pi = ABC$:

$= (2, 1, 1),\ = (0,-1, 5).$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(x_o, y_o, z_o)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$11(x+3)-10(y-7)-2(z-1)=0,$$

$$11x-10y-2z+105=0.$$

Из уравнения плоскости находим, что вектор $(11,-10,-2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой $h = SD$. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t, \\ y=y_o+a_2t, \\ \end{cases}$$

$$z = z_o + a_3 t\,.$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$h\colon \begin{cases} x = \ \ 6 + 11t\,, \\ y = -5 - 10t\,, \\ z = -2 - 2t\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой $l$ с плоскостью $\pi$. Для этого мы должны решить совместно уравнения $l$ и $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

$$11(6 + 11t) - 10(-5 - 10t) - 2(-2 - 2t) + 105 = 0,$$
$$66 + 121t + 50 + 100t + 4 + 4t + 105 = 0,$$
$$225y = -225, \quad t = -1.$$

Найденное $t$ подставляем в уравнение $l$ и находим координаты $D(-5, 5, 0)$.

Вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае, начальная точка – это $S$, вектор скорости – это . Отрезок $SS'$ вдвое длиннее отрезка $SD$ и на его прохождение понадобится вдвое больше времени. Если за время $t_D = -1$ мы прошли путь от $S$ до $D$, то путь от $S$ до $S'$ мы пройдем за время $t' = 2t_D = -2$. Подставляя это значение в $(*)$, находим $S'(-16, 15; 2)$.

***Ответ***: $ABC$: $11x - 10y - 2z + 105 = 0$, $D(-5, 5, 0)$, $S'(-16, 15; 2)$,

$$SD\colon \begin{cases} x = \ \ 6 + 11t\,, \\ y = -5 - 10t\,, \\ z = -2 - 2t\,. \end{cases}$$

**6.** *Даны уравнения прямой* $l$ *плоскости* $\pi$:

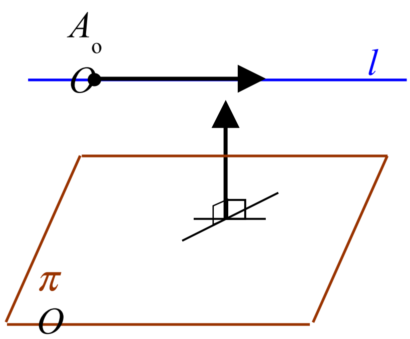
$$l: x - 6 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 2}{2}\,, \quad \pi: 5x - 2y + 4z + 7 = 0.$$

*Убедиться, что* $l$ *и* $\pi$ *пересекаются и составить уравнение проекции* $l'$ *прямой* $l$ *на плоскость. Найти угол между* $l$ *и* $\pi$.

***Решение.*** Из уравнения прямой находим ее направляющий вектор: (1,–1, 2) и точку на этой прямой: $A(6, 0, 2)$ , а из уравнения плоскости – вектор нормали к плоскости: (5,–2, 4). Очевидно, что если $l \parallel \pi$ или $l \in \pi$, то $\perp$ т.е. $\cdot = 0$. Проверим:

$$\cdot = 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 15 \neq 0.$$

Значит, $l$ пересекает $\pi$. Угол между $l$ и $\pi$ находим по формуле:



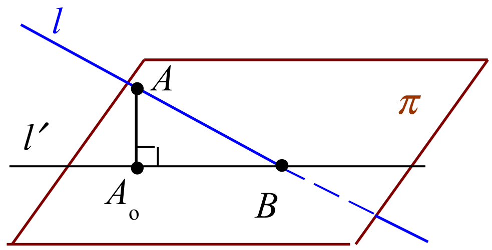
$$\sin\alpha = \ ;$$

$$|| = \ = \ , \ || = \ = \ = 3\ .$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \ = \ .$$

Пусть $A_o$ – проекция точки $A$ на плоскость, а $B = l \cap \pi$. Тогда $l' = A_oB$ – это проекция прямой $l$. Найдем сначала координаты точки $B$. Для этого перепишем уравнение прямой $l$ в параметрическом виде:




$$l:\ \begin{cases} x = 6 + t, \\ y = -t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases}$$

и решим его совместно с уравнением плоскости $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

$$5(6 + t) - 2(-t) + 4(2 + 2t) + 7 = 0,$$

$$30 + 5t + 2t + 8 + 8t + 7 = 0,$$

$$15t = -45, \quad t = -3.$$

Подставляя это $t$ в уравнение $l$ находим координаты $B(3,\ 3,\ 4)$. Составим уравнение перпендикуляра $h = AA_o$. Для прямой $h$ вектор служит направляющим. Поэтому $h$ задается уравнением

$$h:\ \begin{cases} x = 6 + 5t, \\ y = -2\,t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases}$$

Решаем его совместно с уравнением плоскости $\pi$, чтобы найти координаты точки $A_o$:

$$5(6 + 5t) - 2(-2t) + 4(2 + 4t) + 7 = 0,$$

$$30 + 25t + 4t + 8 + 16t + 7 = 0,$$

$$45t = -45, \quad t = -1.$$

Подставляем это $t$ в уравнение $h$ и находим $A_o(1,\ 2,-2)$. Находим направляющий вектор прямой $l'$: $A_oB(2,\ 1,-2)$ и получаем ее уравнение:

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-2}.$$

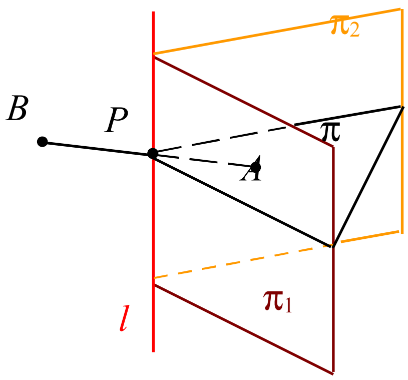
**7.** *Прямая $l$ в пространстве задана системой уравнений*

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = 0, \\ 4x - 8y + z - 5 = 0, \end{cases}$$

*и даны координаты точки* $A(-5,6,1)$. *Найти координаты точки B, симметричной A относительно прямой l.*

***Решение.*** Пусть $P$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на прямую $l$. Сначала мы найдем координаты точки $P$. Для этого мы составим уравнение плоскости $\pi$, проходящей через точку $A$ перпендикулярно плоскостям $\pi_1$ и $\pi_2$. Находим векторы нормали к этим плоскостям: (2, 2,–1), (4,–8, 1). Для плоскости $\pi$ они будут направляющими. Поэтому уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-6 & z-1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$




$$-6(x+5)-6(y-6)-24(z-1)=0.$$

Прежде чем раскрывать скобки обязательно сначала делим все уравнение на $-6$:

$$x+5+y-6+4(z-1)=0,$$
$$x+y+4z-5=0.$$

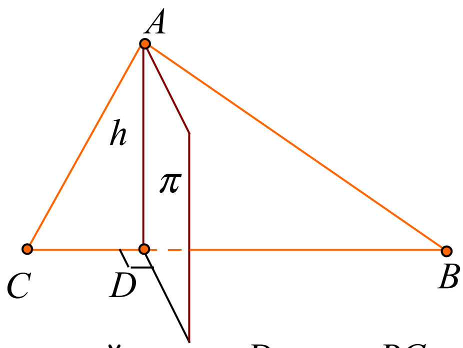
Теперь $P$ – точка пересечения плоскостей $\pi$, $\pi_1$ и $\pi_2$. Для того, чтобы найти ее координаты мы должны решить систему, составленную из уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} x+y+4z-5=0, \\ 4x-8y+z-5=0, \\ 2x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Решая ее по методу Гаусса, находим $P(1,0,1)$. Далее, используя тот факт, что $P$ – середина $AB$ мы находим координаты точки $B(7,-6,1)$.

Точку $P$ можно найти другим способом, как ближайшую к $A$ точку прямой $l$. Для этого необходимо составить параметрическое уравнение этой прямой. Как это делается, см. задачу **10**. Дальнейшие действия см. в задаче **8**.

**8.** *В* $\Delta ABC$ *с вершинами* $A(9,5,1)$, $B(-3,\ 8,\ 4)$, $C(9,-13,-8)$ *проведена высота AD. Найти координаты точки D, составить уравнение прямой AD, вычислить* $h=|AD|$ *и проверить h, вычислив* $S_{\Delta ABC}$ *с помощью векторного произведения.*




***Решение.*** Очевидно, что точку $D$ можно найти так: $D = \pi \cap BC$, где $\pi$ – это плоскость, которая проходит через точку $A$ перпендикулярно стороне $BC$. Для этой плоскости служит вектором нормали. Находим

(12,–21,–12). Координаты этого вектора нацело делятся на 3. Поэтому в качестве вектора нормали к π можем взять = , (4,–7,– 4). Уравнение плоскости π, проходящей через точку $A_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ перпендикулярно вектору $(a, b, c)$, имеет вид:

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0.$$

В нашем случае:

$$4(x-9)-7(y-5)-4(z-1)=0,$$

$$4x-7y-4z+3=0,$$

Составим уравнение прямой $BC$. Для нее вектор будет направляющим:

$$BC\colon \begin{cases} x=-3+4t, \\ y=\ 8-7t, \\ z=\ 4-4t, \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку $D = \pi \cap BC$, для нахождения координат точки $D$ нужно решить совместно уравнения $\pi$ и $BC$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $BC$ в уравнение π:

$$4(-3+4t)-7(8-7t)-4(4-4t)+3=0,$$

$$-12+16t-56+49t-16+16t+3=0,$$

$$81t=81, \quad t=1.$$

Подставляем это $t$ в уравнение прямой $BC$ и находим $D(1,\ 1,\ 0)$. Далее, зная координаты точек $A$ и $D$, составляем уравнение прямой $AD$ вычисляем $h=|AD|$ по формуле расстояния между точками:

$$h= \ =9.$$

Далее, $S_{\Delta ABC} = |\times|$; сначала находим сам вектор $\times$, а потом его модуль.

$$\times = \ -12\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & \\ 0 & -18 & -9 \end{vmatrix} = -27\cdot\ -4\ \ 1\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & 1 & \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27(-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-8\mathbf{k}).$$

(В процессе вычисления мы воспользовались свойством определителя: общий множитель элементов одной строки можно выносить за знак определителя).

$$S_{\Delta ABC} = \ \cdot 27 = \ .$$

С другой стороны $S_{\Delta ABC} = |\,|\cdot h$. Отсюда $h = .$ Находим

$$|\,| = \ = 3 = 27.$$

Поэтому $h = 9$. Это совпадает с ранее найденным ответом.

Точку $D$ можно найти, как ближайшую к $A$ точку прямой $BC$, используя методы дифференциального исчисления. Пусть $M(t)$ –

произвольная точка прямой $BC$; её координаты определяются системой (∗):

$$M(-3+4t,\ 8-7t,\ 4-4t).$$

Находим квадрат расстояние от точки $A$ до $M(t)$:

$$h^2(t)=(9+3-4t)^2+(5-8+7t)^2+(1-4+4t)^2$$
$$=(12-4t)^2+(-3+7t)^2+(-3+4t)^2=$$
$$=144-96t+16t^2+9-42t+49t^2+9-24t+16t^2=$$
$$=81t^2-162t+162.$$

Найдем наименьшее значение функции $h^2(t)$ с помощью производной:

$$h^2(t)=162t-162; \quad h^2(t)=0 \ \Rightarrow\ t=1.$$

Подставляем это значение $t$ в уравнение прямой $BC$ и находим, что $D(1, 1, 0)$ является ближайшей к $A$ точкой на прямой $BC$.

**9.** *Исследовать взаимное расположение следующих пар плоскостей* (*пересекаются, параллельны, совпадают*). *Если плоскости пересекаются, то найдите угол между ними, если параллельны – расстояние между ними*.

**а).** $\pi_1$: $2y+z+5=0$, $\pi_2$: $5x+4y-2z+11=0$.

***Решение.*** Если плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ заданы своими общими уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

то

$$\pi_1 \,||\, \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad = \ = \ \neq \ ,$$
$$\pi_1=\pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad = \ = \ = \ .$$

В нашем случае $\neq \ \neq$ , поэтому плоскости не параллельны и не совпадают. Значит, они пересекаются. Угол между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \ ,$$

где и – векторы нормали к этим плоскостям. В нашем случае

$$(0,2,1),\ (5,4,-2), \quad \cdot \ =0\cdot 5+2\cdot 4+1\cdot(-2);$$

$$||= \ = \ , \ ||= \ =3\ .$$

Значит, $\cos\alpha = \ = .$

***Ответ*:** $\alpha=\arccos\ .$

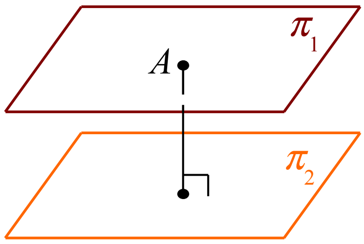
**б)** $\pi_1$: $x-y+2z+8=0$,
$\pi_2$: $2x-y+4z-12=0$.

***Решение.*** Проверяем на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}\neq\frac{8}{-12}.$$

Значит, $\pi_1 \| \pi_2$ но $\pi_1 \neq \pi_2$. Расстояние от точки $A(x, y, z)$ до плоскости, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$ находится по формуле

$h=$ .



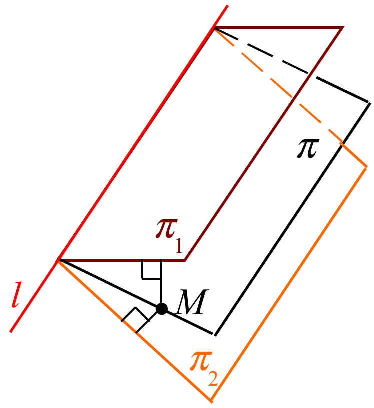

Выберем точку $A \in \pi_1$. Для этого надо подобрать любые три координаты, удовлетворяющие уравнению $\pi_1$. В нашем случае, самое простое: $A_o(0, 8, 0)$. Расстояние от $A_o$ до $\pi_2$ и будет расстоянием между $\pi_1$ и $\pi_2$:

$h=\ =\ .$

**10.** *Составить уравнение плоскости* π, *которая делит пополам тот из двугранных углов между плоскостями*

$\pi_1$: $2x-y+2=0$, $\pi_2$: $5x+4y-2z-14=0$,

*который содержит данную точку* $A(0,3,-2)$. *Составить параметрическое уравнение прямой* $l=\pi_1\cap\pi_2$;




***Решение.*** Если точка $A(x,y,z)$ лежит на плоскости π, которая делит двугранный угол пополам, то расстояния $h_1$ и $h_2$ от этой точки до $\pi_1$ и до $\pi_2$ равны.

Находим эти расстояния и приравниваем их:

$$=$$

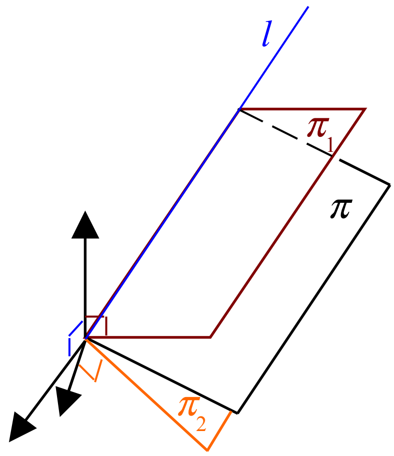
Модули мы можем раскрывать с одинаковыми или разными знаками. Поэтому можем получить 2 ответа, т.к. $\pi_1$ и $\pi_2$ образуют два двугранных угла. Но в условии требуется найти уравнение плоскости, которая делит пополам тот угол, в котором находится точка $A$ . Значит координаты точки $M$ при подстановке в левые части уравнений данных плоскостей $\pi_1$ и должны такие же знаки, что и координаты точки $A$. Легко проверить, что эти знаки для $\pi_1$ и «+» для $\pi_2$ . Поэтому мы раскрываем первый модуль со знаком «–», а второй – со знаком «+» :

$$= \ ,$$

$$3(-2x+y-2)=5x+4y-2z-14,$$

$$\pi: 11x+y-2z-14=0.$$

Для того, чтобы составить уравнение прямой $l$, нам нужно найти направляющий вектор этой прямой и точку на ней.




Из уравнений $\pi_1$ и $\pi_2$ находим координаты векторов нормали к этим плоскостям: (2,–1, 0), (5, 4,–2). Направляющий вектор прямой $l$ перпендикулярен и . Такой можно найти с помощью векторного произведения (по определению, если $=\times$ , то $\perp$ и $\perp$ ):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$= \times = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{matrix} = 2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+13\mathbf{k}.$$

Для того, чтобы найти координаты одной точки на прямой, мы должны найти частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 5x + 4y - 2z - 1\,4\,0, \end{cases}$$

Поскольку уравнений два, а неизвестных три, то система имеет бесконечное количество решений. Нам достаточно подобрать одно. Проще всего положить $x = 0$ и тогда находим

$$\Rightarrow\ z = -3,\ B(0, 2, -3) \in l.$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $B(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $(a_1, a_2, a_3)$, имеет вид:

$$= = .$$

В нашем случае имеем уравнение:

$$l:\ = = .$$

***Ответ*:** $\pi$: $11x + y - 2z = 0$, $l$: $= =$ .

**11.** *Даны уравнения двух прямых в пространстве*:

$$l_1: \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 5 + 2t, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = -3 + 2t', \\ y = -2 - 3t', \\ z = 3 - 2t'. \end{cases}$$

*Доказать, что данные прямые скрещиваются и составить уравнение их общего перпендикуляра.*

***Решение.*** Из уравнений прямых находим координаты их направляющих векторов: (–1, 2, 2), (2,–3,–2) и точек $A(-1, 6, 5) \in l_1$, $B(-3, -2, 3) \in l_2$. Проверяем и на коллинеарность:

$$= = .$$

Значит и $l_1$ $l_2$. Следовательно, прямые $l_1$ и $l_2$ либо скрещиваются, либо пересекаются. Мы найдем расстояние между ними, и, если оно не равно нулю, то прямые скрещиваются.

Расстояние вычисляется по формуле

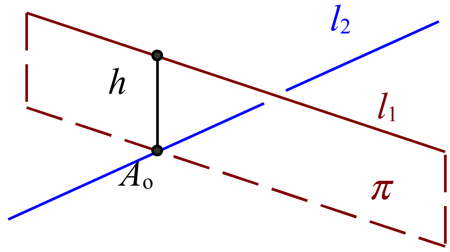
$$d = .$$

Находим

$$\times = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ & & \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; \qquad |\times| = \ = 3.$$

$$2 \quad -3 \quad -2$$

$(-2,-8,-2)$ , $\quad = -2\cdot 2 - 8\cdot 2 - 2\cdot(-1) = -18$ , $\quad d =$ .




Вектор $= \times$ перпендикулярен и перпендикулярен . Следовательно, $\perp l_1$ и $\perp l_1$, а значит, является направляющим вектором общего перпендикуляра $h$ к этим прямым. Мы уже нашли его координаты: $(2, 2, -1)$. Для того, чтобы составить уравнение $h$ нам нужно найти координаты одной точки на этой прямой. Для этого мы составим уравнение плоскости π, проходящей через $l_1$ и $h$. Для нее векторы , будут направляющими, и $A \in \pi$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-6(x-1)+3(y-2)-6(z-1)=0.$$

$$-2(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0.$$

$$\pi:\ -2x+y-2z+2=0.$$

Находим точку пересечения $l_2$ и $\pi$ . Для этого $x, y, z$ из уравнения $l_2$ подставляем в уравнение $\pi$:

$$-2(-3+2t')-2+3t'-2(3-2t')+2=0,$$

$$6-4t'-2-3t'-6-4t'+2=0,$$

$$-7t'=0, \quad t'=0.$$

Подставляем найденное $t'$ в уравнение $l_2$ и находим, что $B(-3,-2,3)$ и есть общая точка $l_2$ и π. Имея точку на $h$ и направляющий вектор этой прямой составляем ее уравнение:

$$h: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} \ .$$

Заметим, что прямую $h$ можно задать как пересечение двух плоскостей: плоскости π и плоскости $\pi_1$, проходящей через прямую $l_2$ с направляющим вектором . Этот способ решения также допускается, и он несколько короче.

<u>*Второй способ решения*</u> этой задачи использует методы дифференциального исчисления. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым – это кратчайший из отрезков, соединяющих две точки на этих прямых. Находим квадрат расстояния от произвольной точки прямой $l_1$ до произвольной точки прямой $l_2$ :

$$h^2(t, t') = (-3+2t'+1+t)^2 + (-2-3t'-6-2t)^2 + (3-2t'-5-2t)^2 =$$
$$= (t+2t'-2)^2 + (8+2t+3t')^2 + (2+2t+2t')^2.$$

Найдем точку минимума функции $h^2(t, t')$. Для этого вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$h^2(t, t') = 2(t+2t'-2) + 4(8+2t+3t') + 4(2+2t+2t') = 2(9t+12t'+18);$$
$$h^2(t, t') = 4(t+2t'-2) + 6(8+2t+3t') + 4(2+2t+2t') = 2(12t+17t'+24);$$
$$\begin{cases} 9t+12t'+18=0 \\ 12t+17t'+24=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} t=-2 \\ t'=0. \end{cases}$$

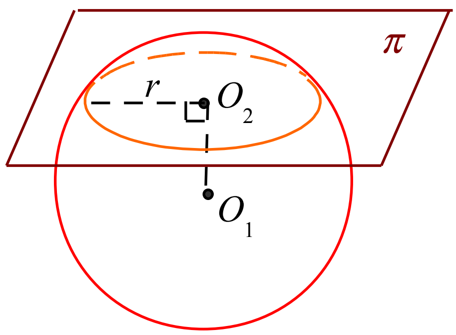
Подставляем эти значения $t$ и $t'$ в уравнения $l_1$ и $l_2$ соответственно и находим, что $C(1, 2, 1)$ и $B(-3,-2, 3)$ являются концами общего перпендикуляра. Остается составить уравнение прямой, проходящей через две точки $B$ и $C$.

**12.** *Дано уравнение сферы* $S$:

$$x^2+y^2+z^2+12x-10y-4z-176=0.$$

а) *Составить уравнение плоскости* $\pi$, *проходящей через точки* $A(-3, 7, 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$

б) *найти координаты центра и радиус окружности, по которой* $\pi$ *пересекает* $S$.




***Решение.*** Найдем два вектора параллельных плоскости: $(2, 1, 1)$, $(0,-1, 5)$. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум данным векторам $(a_1, a_2, a_3)$, $(b_1, b_2, b_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$11(x+3) - 10(y-7) - 2(z-1) = 0,$$
$$11x - 10y - 2z + 105 = 0.$$

Найдем координаты центра $O'$ и радиус $R$ сферы. Для этого выделим полные квадраты:

$$(x^2-12x+36)-36+(y^2+10y+25)+(z^2+4z+4)-4-176=0,$$

$$(x-6)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=241.$$

Значит, $O'(6,–5,–2)$, $R=$ .

Центр окружности, получающейся в сечении сферы плоскостью, является основанием перпендикуляра $l$, опущенного из центра сферы на плоскость. Из уравнения плоскости находим, что вектор $(11,–10,–2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой $l$. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t, \\ y=y_o+a_2t, \\ z=z_o+a_3t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$l: \begin{cases} x=\ 6+11t, \\ y=-5-10t, \\ z=-2-2t. \end{cases}$$

Найдем основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой $l$ с плоскостью $\pi$. Для этого мы должны решить совместно уравнения $l$ и $\pi$. Подставляем $x, y, z$ из уравнения $l$ в уравнение $\pi$:

$$11(6+11t)-10(-5-10t)-2(-2-2t)+105=0,$$

$$66+121t+50+100t+4+4t+105=0,$$

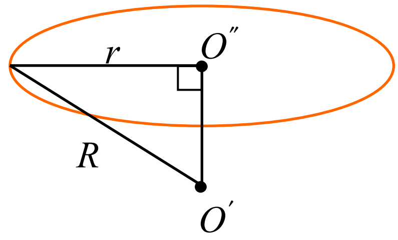
$$225t=-225, \quad t=-1.$$

Найденное $t$ подставляем в уравнение $l$ и находим координаты центра окружности: $O''(-5,\ 5,\ 0)$. Находим длину отрезка $O'O''$ как расстояние между точками:

$$|O'O''|= \ =15.$$

По теореме Пифагора

$$r^2=R^2-|O'O''|^2=241-225=16.$$

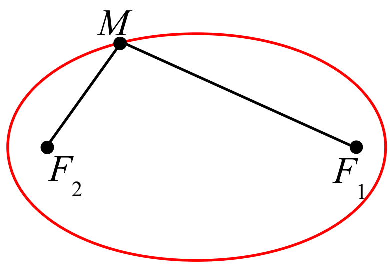



Значит, $r=4$ – радиус окружности.

***Ответ***: $r=4$, $O''(-5, 5, 0)$.

# ГЛАВА 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

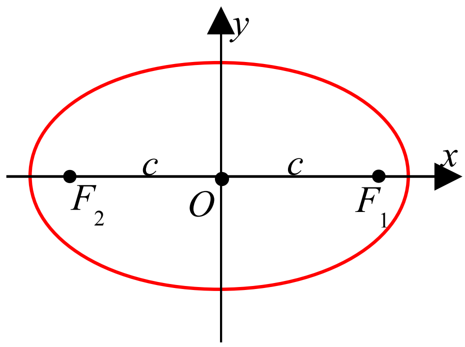
## §1. *Эллипс.*




***Определение.*** *Эллипсом* называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые *фокусами*, что сумма расстояний от произвольной точки $M$ эллипса до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \text{const}, \qquad (1)$$

т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$.




Составим уравнение эллипса в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox\uparrow\uparrow$. Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$|MF_1| = \ , \qquad |MF_2| = \ .$$

Согласно определению (1) имеем

$$= 2a - \ .$$

Возведем обе части равенства в квадрат и сократим одинаковые слагаемые:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \ + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 .$$

$$4xc = 4a^2 - 4a \qquad \Leftrightarrow \qquad a \ = a^2 + xc.$$

Еще раз возводим в квадрат, сокращаем и группируем:

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Согласно определению $a < c$; поэтому можем обозначить $b^2 = a^2 - c^2$, и разделив на $a^2b^2$, окончательно получаем

$$+ \ = 1 . \qquad (2)$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки эллипса удовлетворяют уравнению (2). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (2), то выполнено (1).

Из (2) выразим $y^2 = b^2(1- \;)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2 = a^2 - c^2$:

$$|MF_1| = \; = \; =$$

$$= \; =$$

$$= \; = \; = \left| a - \; \right|.$$

Аналогично получаем, что $|MF_2| = \left| a + \; \right|$. Из (2) следует, что $|x| \le a$ (иначе уже первое слагаемое будет больше 1), а по определению, $a < c$ $\Rightarrow$ оба выражения под модулем неотрицательны. Поэтому

$$|MF_1| + |MF_2| = a - \; + a + \; = 2a. \qquad \blacksquare$$

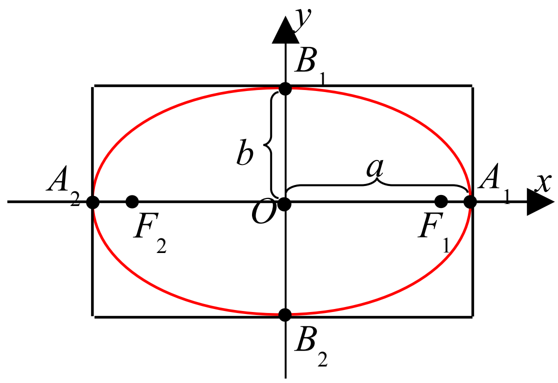
Уравнение (2) называется *канонческим уравнением* эллипса.

*Геометрические свойства эллипса.*

**1.** Из (2) следует, что $|x| \le a$, $|y| \le b$. Значит, эллипс целиком содержится в прямоугольнике, определяемыми этим неравенствами.

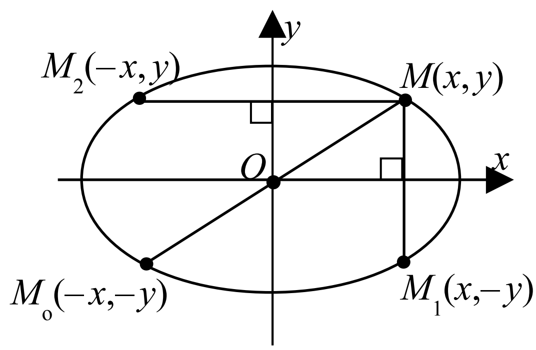
Подчеркнем, что это и все другие свойства выводятся только из уравнения эллипса, без ссылки на наглядность чертежа. Поэтому и раздел геометрии, который мы сейчас изучаем, называется «Аналитическая геометрия».

**2.** Координатные оси пересекают эллипс в точках $A_1(a,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0)$, $B_1(0,\ b)$, $B_2(0,\ -b)$, которые называются его *вершинами*. Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$ называются *большим и малым диаметрами эллипса*, а вместе – главными диаметрами. Числа $a$ и $b$ называются *большой и малой полуосями*.




**3.** Координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда пара $(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (2). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также и пары $(x,\ -y)$, $(-x,\ y)$, $(-x, -y)$, которые задают точки,



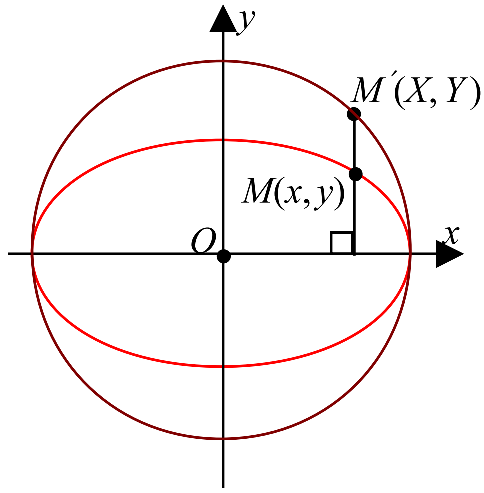
симметричные $M$ относительно $Ox$, $Oy$ и точки $O$ соответственно.

**4.** Эллипс может быть получен из окружности

$$\gamma' : X^2 + Y^2 = a^2 \qquad (**)$$

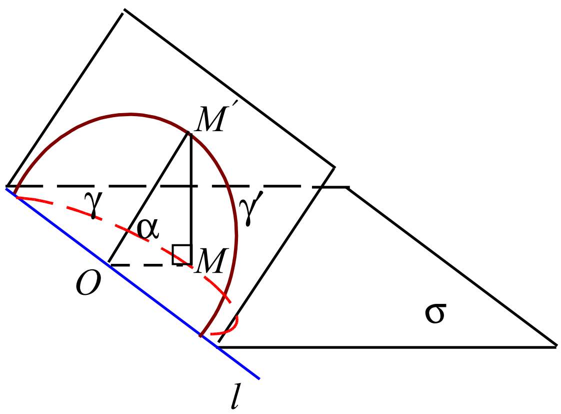
в результате равномерного ее сжатия вдоль оси $Oy$ с коэффициентом $k = a/b$. Действительно, при таком сжатии точка $M'(X, Y) \in \gamma'$ будет переходить в точку $M(x, y)$, где

$$\begin{cases} x = X, \\ y = Y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x, \\ Y = y. \end{cases}$$




Подставляя последние формулы в (**), получим, что координаты точки $M$ удовлетворяют (2), т.е. $M \in \gamma$.

**5.** Эллипс может быть получен из окружности в результате проекции окружности на плоскость σ непараллельную плоскости окружности . Действительно, при такой проекции отрезки параллельные линии пересечения плоскостей $l$ = σ ∩ сохраняют длину, а отрезки перпендикулярные $l$ сжимаются в $1/\cos\alpha$ раз, где α – угол между σ и . Таким образом, окружность сжимается по одному направлению, и согласно свойству 4, из нее получается эллипс.




**6.** Самостоятельно убедитесь, что [параметрические уравнения эллипса]() имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha, \; t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

## §2. *Гипербола.*

***Определение.*** Гиперболой называется множество точек $\gamma$ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки $F_1$, $F_2$, называемые фокусами, что модуль разности расстояний от произвольной точки $M$ гиперболы до $F_1$ и от $M$ до $F_2$ есть величина постоянная:

$$\big|\,|MF_1| - |MF_2|\,\big| = 2a = \text{const}, \tag{3}$$

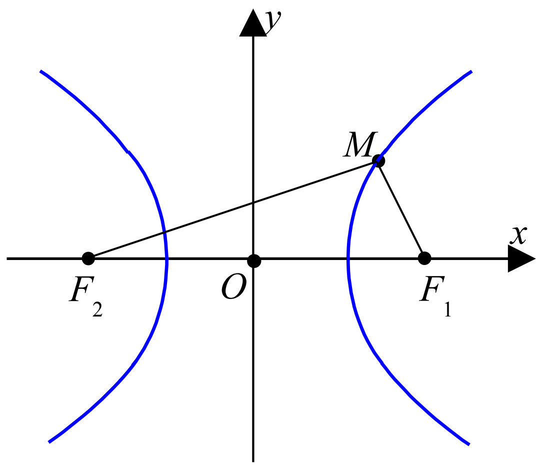
т.е. независящая от выбора точки $M\in\gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$ .

Составим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка $F_1F_2$, и направим $Ox\uparrow\uparrow$. x
Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$$|MF_1| = \ ,$$

$$|MF_2| = \ .$$




Согласно определению (3) имеем

$$= \pm 2a + \ .$$

Далее совершаем дословно такие же преобразования, что и для эллипса. В результате получим уравнение

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

***Упражнение.*** *Проделайте эти преобразования самостоятельно.*

По определению $a < c$; поэтому можем обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, и разделив на $a^2b^2$ окончательно получаем

$$- = 1\ . \tag{4}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки гиперболы удовлетворяют (4). Необходимо еще доказать обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (4), то выполнено (3). Из (4) выразим $y^2 = b^2(\ -1)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2 = c^2 - a^2$. Точно так же, как и для эллипса получим

$$|MF_1| = \left|\,a - \ \right|, \qquad |MF_2| == \left|\,a + \ \right|. \qquad (**)$$

***Упражнение.*** *Проделайте это самостоятельно.*

Из (4) вытекает, что $x^2 = a^2(1+\ )$ $\Rightarrow$ $|\ x\ | \geq a$, и по определению $c > a$. Значит, второе слагаемое в формулах (**) по модулю больше первого и при $x \geq a$ получаем

$$|\ MF_1| = \ -\ a, \qquad |\ MF_2| = a + \ ,$$

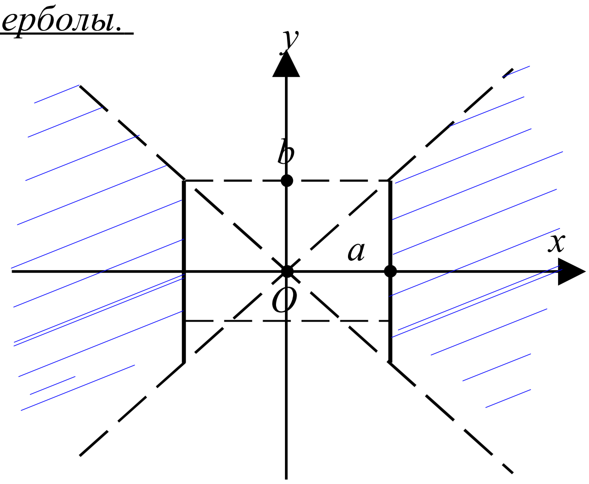
а при $x \leq -a$ получаем

$$|\ MF_1| = a - \ , \qquad |\ MF_2| = -a - \ .$$

В обоих случаях выполняется (3). ■

Уравнение (4) называется *канонициским уравнением гиперболы*.

*Геометрические свойства гиперболы.*




**1.** Мы уже отмечали, что для любой точки $M(x, y)$ на гиперболе

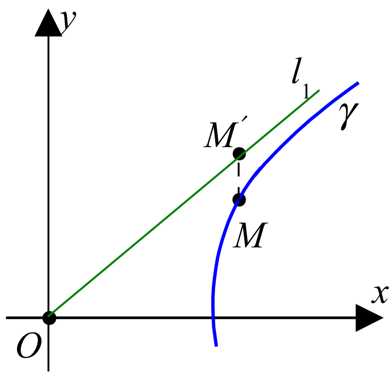
$$x^2 = a^2(1+\ ) \Rightarrow |\ x\ | \geq a,$$

кроме того (4) $\Rightarrow$

$$x^2 > \ \Leftrightarrow\ |\ x\ | > |\ y\ |\ .$$

Значит вся гипербола содержится в области, определяемой этими неравенствами. Она заштрихована на рисунке.

**2.** Ось $Ox$ пересекает гиперболу в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-\ a, 0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Ось $Oy$ ее не пересекает. Числа $a$ и $b$ называются *полуосями гиперболы* – *действительной и мнимой*.




**3.** Дословно так же, как и для эллипса доказывается, что координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

**4.** Прямые $l_1$: $y = \ x$ и $l_2$: $y = -\ x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Гипербола неограниченно к ним приближается, но нигде не пересекает. Действительно, пусть $M(x, y)$ – точка на гиперболе, а $M'(x, y')$ – на соответствующей асимптоте. Тогда расстояние от точки $M$ до асимптоты меньше, чем $|\ MM'|$. При этом

$$|\ MM'| = |\ y'| - |\ y|\ .$$

$$(y')^2 = \ x^2, \quad y^2 = b^2(\ -1) \quad (*_{*}*)$$

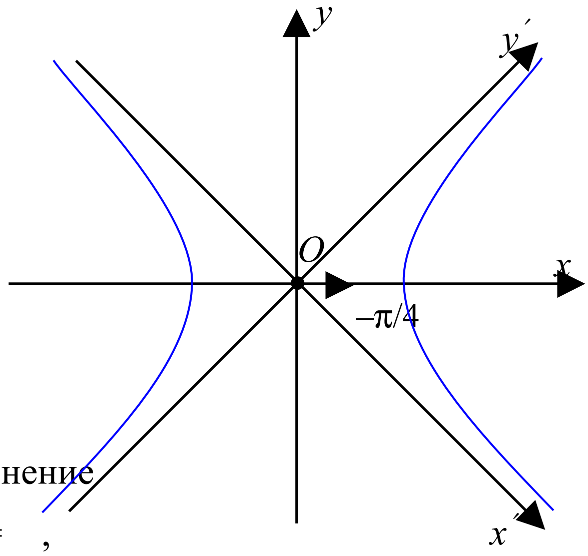
Из этих равенств вытекает, что при $|\,x\,| \longrightarrow \infty$ будет $|\,y'\,| \longrightarrow \infty$ и $|\,y|\ \to \infty$. Кроме этого,

$$(y')^2 - y^2 = b^2 \ \Leftrightarrow\ |\,y'| - |\,y| = \ \longrightarrow\ 0 \text{ при } |\,x\,| \longrightarrow \infty.$$

Заметим, что обе асимптоты вместе можно задать вместе одним уравнением $\ - \ = 0$ . Для его получения достаточно в правой части уравнения (4) заменить 1 на 0. Асимптоты проходят через диагонали прямоугольника, который определяется неравенствами $|\,x\,| \le a$, $|\,y\,| \le b$. Он называется *фундаментальным прямоугольником гиперболы*. Для построения гиперболы рекомендуется сначала изобразить этот прямоугольник.

**5.** При $a = b$ гипербола называется *равнобокой*. Ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{5}$$




а асимптоты имеют уравнения $l_1$: $y = \ x$ , $l_2$: $y = -\ x$ . Очевидно, что $l_1 \perp l_2$ , и мы можем выбрать их за оси новой декартовой СК $Ox'y'$, которая получается из $Oxy$ поворотом на угол $-45^{\circ}$. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \ (x' + y')\,, \\ y = \ (-x' + y'). \end{cases}$$

Подставим их в (5) и получим уравнение

$$2x'y' = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \ ,$$

где $k = a^2/2$. Таким образом, равнобокая гипербола задает график обратной пропорциональности.

**6.** Параметрические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\, t\,, \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t,\ t \in \mathbf{R}\,. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a(t + 1/t), \\ y = b(t - 1/t),\ t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

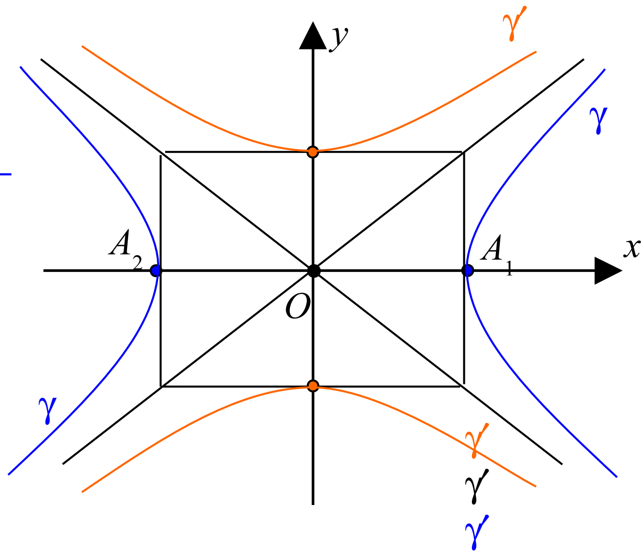
Знак «+» соответствует одной ветви гиперболы, а «–» – другой ветви.

***Упражнение.*** Проверьте это самостоятельно.

**7.** Гипербола

$\gamma'$: $- = -1$ ,

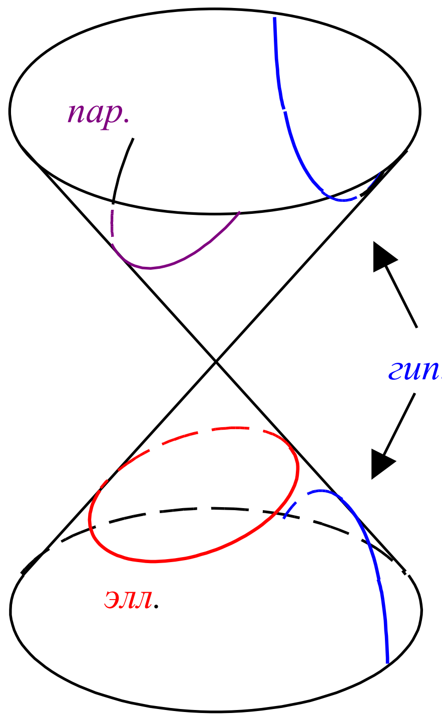
называется сопряженной к гиперболе γ, заданной уравнением (4). Она имеет тот же фундаментальный прямоугольник, те же асимптоты, только расположена в другой паре вертикальных углов, образованных этими асимптотами.




## §3. *Конические сечения. Парабола.*

***Определение.*** Коническим сечением (КС) называется кривая, по которой коническую поверхность пересекает плоскость, не проходящая через вершину этой поверхности.

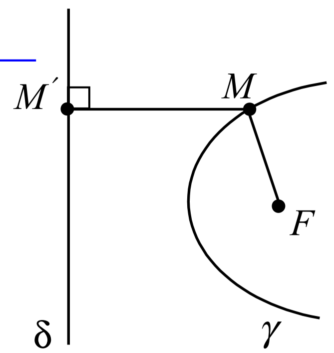
В следующей главе мы изучим, что коническая поверхность выглядит именно так, как это изображено на рисунке, и убедимся, коническими сечениями могут быть эллипс, гипербола и парабола. Причем, парабола получается тогда и только тогда, когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса.




Следующие две теоремы примем без доказательства.

***Теорема* 1.** *Для всякого КС* $\gamma$*, кроме окружности существуют точка* $F$ *, называемая фокусом, и прямая* $\delta$ *, называемая директрисой, такие что отношение расстояний от произвольной точки*

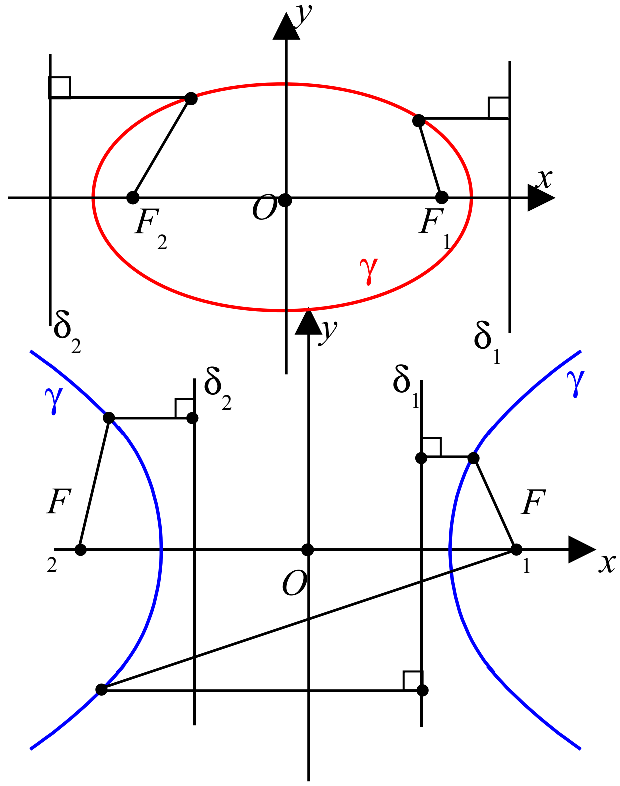
*M*$\in\gamma$ *до F и от M до δ есть величина постоянная (т.е. независящая от выбора точки M*$\in\gamma$).




Эта величина $\varepsilon = |MF|/|MM'|$ называется <u>*эксцентриситетом*</u> конического сечения. Чем меньше ε, тем ближе кривая расположена к фокусу. При $0<\varepsilon<1$ кривая замкнута и представляет собой эллипс. Чем ближе ε к единице, тем более эллипс вытянут. При $\varepsilon=1$ он, как бы, достигает бесконечной длины, и происходит его разрыв: эллипс превращается в параболу.

Чем больше ε, тем ближе кривая расположена к директрисе. При $1<\varepsilon<\infty$ получается гипербола.


Очевидно, что эксцентриситет и расстояние $|FF'|$ от фокуса до директрисы однозначно определяют КС. Действительно, если два КС имеют одинаковое расстояние от фокуса до директрисы, то мы можем движением совместить их фокусы и директрисы. А если у них еще одинаковое ε, то и сами КС совместятся. Если же два КС имеют одинаковое ε, но разное расстояние от *F* до δ, то они подобны. В частности, все параболы подобны друг другу.



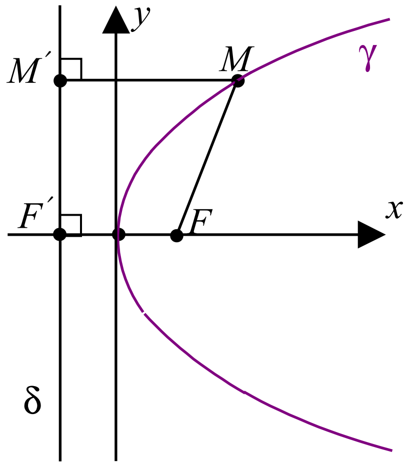

***Теорема* 2.** *Эксцентриситет эллипса или гиперболы, заданных своими каноническими уравнениями* (2) *или* (4), *равен c/a, фокусы имеют координаты* $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, *а директрисы задаются уравнениями*

$\delta_1$: $x=$ , $\delta_2$: $x=$

(напомним, что $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса, и $c^2 = a^2 + b^2$ для гиперболы).

Из этой теоремы следует, что фокусы эллипса или гиперболы, которые мы определили в §1 и в §2, совпадают с фокусами, определенными в этом параграфе. Кроме того, эллипс и гипербола имеют две пары фокус-директриса, и определить фигуру можно с помощью любой из пар.

***Определение.*** *Параболой* называется КС, эксцентриситет которого равен единице.




Составим уравнение параболы в декартовой СК. Пусть $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы. Начало координат поместим в середину отрезка $FF'$ и направим $Ox\uparrow\uparrow$ . Тогда ось $Oy$ определится однозначно. Фокус будет иметь координаты $F(p/2,\ 0)$, а директриса – уравнение $\delta$: $x = -p/2$ .

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы. Тогда

$$|MF| = \ , \quad |MM'| = x + \ .$$

Согласно определению $|MF|^2 = |MM'|^2 \Leftrightarrow {}^2 + y^2 = {}^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 2px\ . \qquad (6)$$

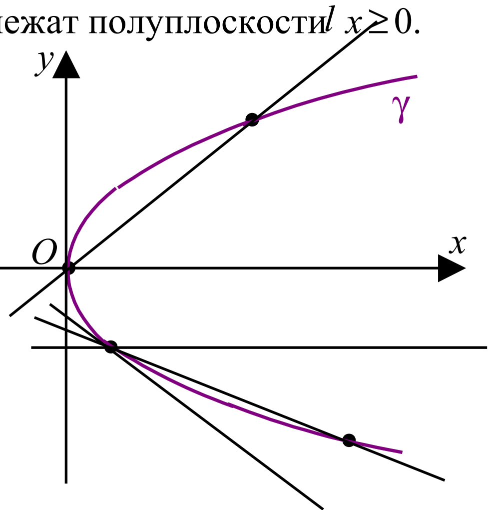
Обратно, если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (6), то

$$|MF|^2 = {}^2 + y^2 = x^2 - px + \ + 2px = x^2 + px + \ = {}^2 = |MM'|^2$$

Уравнение (6) называется *каноническим уравнением параболы*. ■

*Геометрические свойства параболы.*

**1.** Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.




**2.** Если $M(x, y) \in \gamma$, т.е. пара $(x, y)$ удовлетворяет (6), то этому уравнению удовлетворяет также и пара $(x, -y)$, которая задает точку симметричную $M$ относительно оси $Ox$. Поэтому

*Ox* является осью симметрии параболы. Других симметрий у параболы нет.

**3.** Координатные оси пересекают параболу только в точке *O*, которая называется *вершиной параболы*.
Любая другая прямая, проходящая через вершину, пересекает параболу еще в одной точке.

Действительно, любую прямую $l$, проходящую через $O$, кроме оси $Oy$ можно задать уравнением $y=kx$. Для того, чтобы найти ее общие точки с параболой $\gamma$ решаем систему уравнений

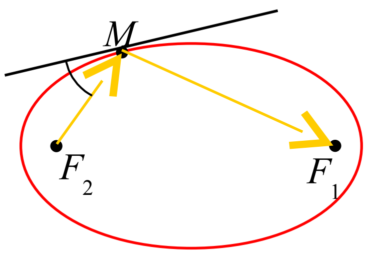
$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2-2px=0, \\ y=kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k^2x-2p)=0, \\ y=kx. \end{cases}$$

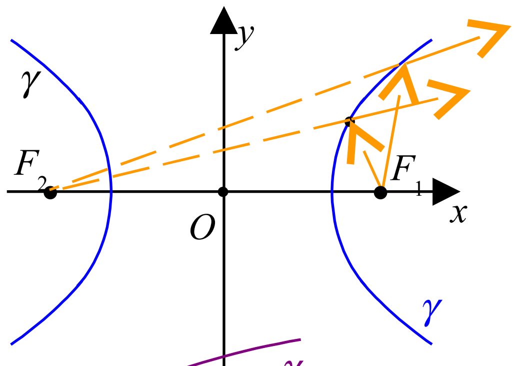
При $k\neq 0$ получаем два решения – $(0,0)$ и ${}^2$, а при $k=0$ – только одно – $(0,0)$. Значение $k=0$ соответствует оси $Ox$.

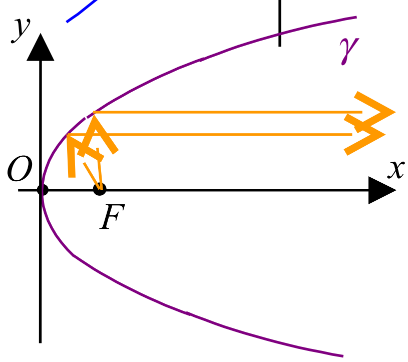
Аналогично, можно доказать, что любая прямая, параллельная оси параболы пересекает ее в одной точке, а любая другая прямая, проходящая через эту точку, кроме касательной, обязательно пересечет параболу еще в одной точке.

Отметим еще ряд интересных *оптических свойств* конических сечений.

Луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса, проходит через второй его фокус. Математически это означает, что $\forall\ M\in\gamma$, отрезки $MF_1$ и $MF_2$ образуют с касательной к эллипсу в точке $M$ равные углы. Луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажется исходящим из второго фокуса.



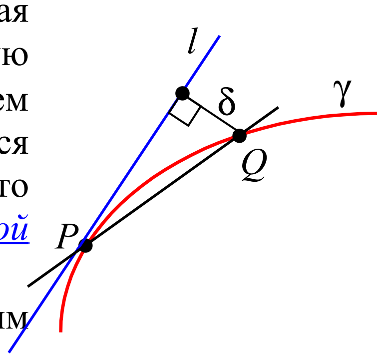




Луч света, исходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы, движется параллельно ее оси. И, наоборот, лучи, приходящие из бесконечности параллельно оси параболы, концентрируются в фокусе. На этом свойстве параболы и основано действие параболических рефлекторов, параболических антенн и радаров.

## §4. *Касательные к коническим сечениям.*

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая, $P$ – точка на ней. Выберем близкую к ней точку $Q\in\gamma$. Прямую $PQ$ назовем секущей. Если при $Q \longrightarrow P$ стремится занять определенное положение $l$, то прямая $l$ называется *касательной к кривой* $\gamma$ *в точке* $P$.




Математически более точным является следующее определение.

***Определение.*** Пусть $\gamma$ – некоторая кривая, $P$ – точка на ней, а $l$ – некоторая прямая, проходящая через $P$. Выберем близкую к $P$ точку $Q\in\gamma$. Обозначим $d=|PQ|$, $\delta$ – расстояние от $Q$ до $l$. Если $=0$, то прямая $l$ называется *касательной к кривой* $\gamma$ *в точке* $P$.

Пусть кривая $\gamma$ задана уравнением в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$, а $P(x_0, y_0)\in\gamma$. В курсе дифференциальной геометрии будет доказано, что вектор градиента функции $\varphi$, вычисленный в точке $P$

$$\mathrm{grad}_P\varphi = \quad_P$$

будет вектором нормали касательной к кривой $\gamma$ в точке $P$, и поэтому уравнение касательной имеет вид:

$$(x-x_0) + (y-y_0)=0.$$

Пусть наша кривая – это эллипс. Его уравнение

$$+ \; -1=0\,.$$

Тогда

$$\mathrm{grad}_P\varphi = \; ,$$

а уравнение касательной в точке $P$ –

$$(x-x_0) + \; (y-y_0)=0.$$

Разделим уравнение на $2$ и раскроем скобки:

$$x+ \; y- \; =0.$$

Поскольку $P(x_0, y_0)\in\gamma$, то выражение в скобках равно 1, и мы окончательно получаем уравнение касательной к эллипсу:

$$x+ \; y=1.$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением (4):

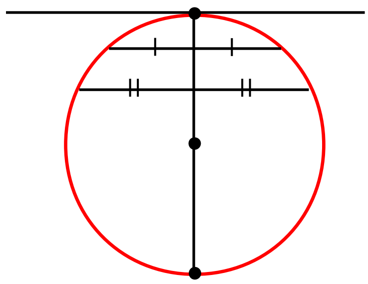
$$x- \; y=1.$$

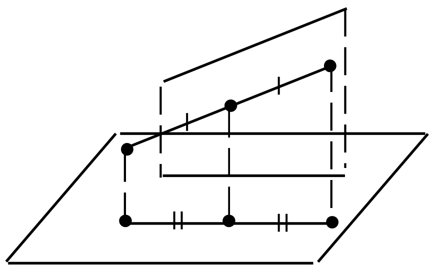
***Упражнение.*** *Пусть парабола задана каноническим уравнением* (6). *Докажите, что уравнение касательной к параболе в точке* $P(x_o, y_o)$ *имеет вид* $y_o y - p(x + x_o) = 0$.

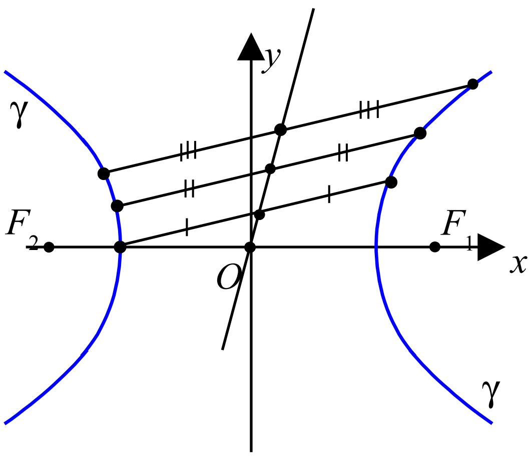
## §5. *Диаметры конических сечений.*

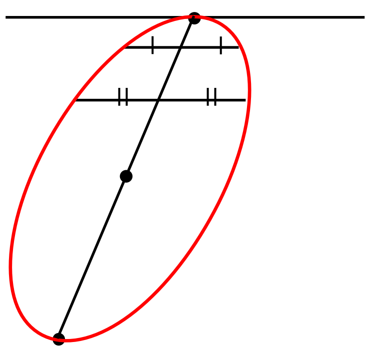
***Определение.*** *Диаметром эллипса или гиперболы* называется любая прямая, проходящая через их центр симметрии. *Диаметром параболы* называется любая прямая, параллельная ее оси. Отрезок, два конца которых лежат на коническом сечении называется *хордой*.

Мы уже знаем, что эллипс является проекцией окружности. Касательные к окружности или эллипсу можно характеризовать, как прямые, имеющие с кривой только одну общую точку. Поэтому проекцией касательной будет тоже касательная. Из школьной программы вы должны знать, что середины параллельных хорд окружности лежат на диаметре перпендикулярном хордам, при этом, касательная к окружности в конце этого диаметра параллельна хордам. Очевидно, что при проецировании параллельные отрезки переходят в параллельные отрезки, а середина отрезка – в середину его проекции. Поэтому вышеупомянутые свойства окружности переносятся на эллипс. Более подробно мы будем про это говорить при изучении раздела «Методы изображений».







Оказывается, теми же свойствами обладают также гипербола и парабола.

***Теорема* 3.** *Середины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре. Направление этого диаметра называется сопряженным к направлению хорд.*

***Доказательство.*** Пусть $\gamma$ – эллипс или гипербола. Тогда ее уравнение можно записать в виде

$$\alpha x^2+\beta y^2-1=0.$$

Семейство параллельных хорд можно задать уравнениями $y = kx + b$, где $k$ одинаково для всех хорд. Тогда координаты концов хорд удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \alpha x^2+\beta y^2-1=0, \\ y=kx+b. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha x^2+\beta(kx+b)^2-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta k^2)x^2+(2\beta kb)x+(\beta b^2-1)=0. \quad (*)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной координаты $x$. По теореме Виета

$$x_1+x_2=- \quad ,$$

где $x_1$ соответствует одному концу хорды, а $x_2$ – второму. Если $C(x_o, y_o)$ – середина хорды, то

$$x_o= \ =- \ .$$

Подставляя это $x_o$ в уравнение хорды получаем

$$y_o=k(- \ )+b= \quad \Rightarrow$$

$$=- \quad \Leftrightarrow \quad y_o=- \ x_o\,.$$

Последнее выражение от $k$ не зависит. Значит, середины всех хорд лежат на одной прямой

$$y=- \ x\,,$$

Эта прямая проходит через начало координат, т.е через центр кривой; значит она является диаметром. Ее угловой коэффициент $k'= -\alpha/\beta k$, т.е для эллипса $k'=-b^2/a^2k$, а для гиперболы – $k'=b^2/a^2k$.

Диаметры, имеющие уравнения $y=kx$ и $y=k'x$, называются сопряженными. Очевидно, что свойство диаметров быть сопряженными взаимно, поскольку $k=-\alpha/\beta k'$, т.е $k$ выражается через $k'$ по той же формуле, что и $k'$ через $k$.

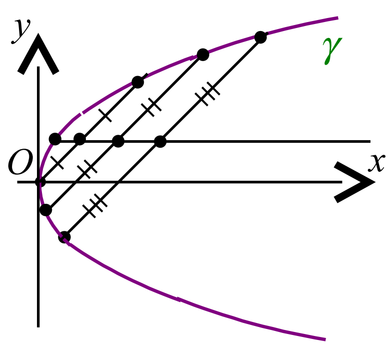
Пусть теперь $\gamma$ – парабола. Тогда координаты концов параллельных хорд находятся из системы

$$\begin{cases} y^2-2px=0\,, \\ y=kx+b. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $x$ через $y$ и подставим в первое уравнение:

$$y^2- \ y+ \ =0 \quad \Rightarrow$$

$$y_o= \ = \ =\text{const}.$$



Значит, все середины хорд лежат на прямой
$y = p/k$, которая параллельна оси $Ox$. ■

***Теорема* 4.** *Если диаметр пересекает коническое сечение, то касательные в точках пересечения параллельны сопряженному диаметру.*

***Доказательство.*** Пусть $Q(x_o, y_o)$ – точка пересечения диаметра $y = kx$ с эллипсом или гиперболой $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$. Уравнение касательной к кривой в точке $Q$ будет

$$(\alpha x_o)x + (\beta y_o)y - 1 = 0.$$

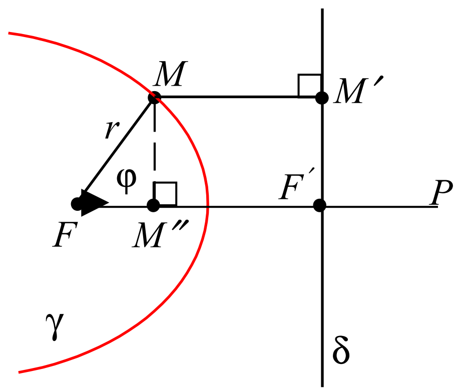
Отсюда

$$y = -\ x + \ .$$

Угловой коэффициент этой прямой $k' = -$ . Т.к. точка $Q(x_o, y_o)$ лежит на диаметре, то $y_o = kx_o \Leftrightarrow x_o/y_o = 1/k$ . Отсюда $k' = -\alpha/\beta k$, т.е. угловой координат касательной такой же, как и у сопряженного диаметра.

■

## §6. *Уравнения конических сечений в полярной системе координат.*




Пусть $\gamma$ – коническое сечение, $\varepsilon$ – его эксцентриситет, $F$ – фокус, $FF'$ – перпендикуляр, опущенный на директрису $\delta$. Выберем полярную СК так, чтобы полярная ось совпадала с лучом $FF'$. Обозначим $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы.

Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка кривой $\gamma$, $MM'$ – перпендикуляр к $\delta$, $MM'$ – перпендикуляр к полярной оси. Тогда

$$|FM| = r, \qquad |MM'| = p - r\cdot\cos\varphi. \tag{$*$}$$

Согласно определению $|FM|/|MM'| = \varepsilon$. Подставим в это равенство формулы $(*)$:

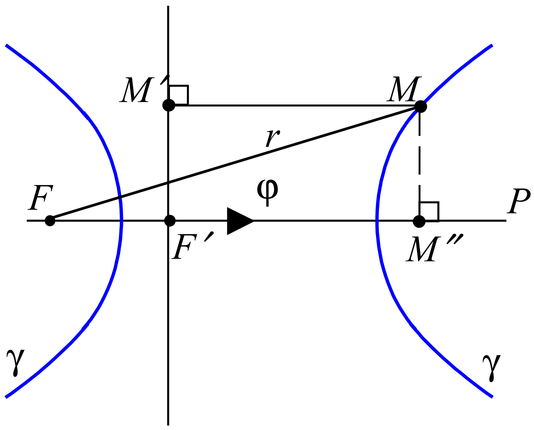
$$= \varepsilon.$$

Для того, чтобы получилось уравнение в явном виде, мы выразим из этого равенства $r$:

$$\varepsilon(p - r\cdot\cos\varphi) = r \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon p = r + \varepsilon r\cdot\cos\varphi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \ . \tag{7}$$

Но данное уравнение получается только в случае, изображённом на первом чертеже, т.е. в случае когда кривая расположена по одну сторону от директрисы. Значит, оно верно для эллипса и параболы. Также (7) задаёт ещё одну ветвь гиперболы. Гипербола имеет ещё одну ветвь, расположенную по другую сторону от $\delta$. Если точка $M(r,\ \varphi)$ принадлежит этой ветви, то




$$|MM'| = |FM''| - |FF'| =$$
$$= r\cdot\cos\varphi - p.$$

Тогда точно также получим уравнение

$$r = \ .$$

Окончательно получается уравнение гиперболы

$$r = \ . \qquad (7')$$

## §7. *Общее уравнение кривой второго порядка. Центр кривой.*

***Определение.*** *Кривой второго порядка* называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0, \qquad (8)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ отличен от нуля. Выражение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

называется *квадратичной часть уравнения*, $2a_1x + 2a_2y$ – *линейной частью*, а $c$ – *свободным членом*.

Если мы перейдем к новой СК $Ox'y'$, то формулы замены координат будут иметь вид

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + b_1, \\ y = \gamma x' + \delta y' + b_2. \end{cases}$$

Если мы подставим эти выражения в (8), то снова получим уравнение такого же вида, т.е. содержащее $x'$ и $y'$ во второй степени. Поэтому наше определение корректно, т.е не зависит от выбора СК. В дальнейшем, СК всегда предполагается декартовой.

***Определение.*** Точка $O'$ называется *центром кривой второго порядка*, если она является ее центром симметрии. Кривая, которая имеет центр, называется центральной.

Предположим, что СК выбрана так, что ее начало находится в центре кривой. Тогда одновременно с точкой $M(x, y)$ кривой будет принадлежать и точка $M'(-x, -y)$. Подставим ее координаты в (7) и получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_1x - 2a_2y + c = 0. \qquad (8')$$

Вычтем из равенства (8) равенство (8′):

$$4(a_1x + a_2y) = 0.$$

И это должно выполняться для любой точки $M(x, y)$ на кривой. Поэтому $a_1 = a_2 = 0$, если начало координат находится в центре. Поэтому, если изначально начало координат не находится в центре $O'$, то мы совершим параллельный перенос координатных осей в центр, и уравнение кривой в новой СК $O'x'y'$ примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0, \qquad (9)$$

т.е. линейная часть уравнения исчезнет. При этом, коэффициенты квадратичной части останутся прежними; это будет установлено в процессе доказательства следующей теоремы.

***Теорема 5.*** *Координаты* $(x_0, y_0)$ *центра кривой, заданной уравнением* (8), *находятся из системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

***Доказательство.*** Введем новую декартову СК $O'x'y'$, которая получается из $Oxy$ переносом начала в центр $O'(x_0, y_0)$ кривой. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \qquad (11)$$

Подставим эти формулы в (7):

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 +$$
$$+ 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + c = 0.$$

После преобразований получаем

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' +$$
$$+ 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + c' = 0,$$

где $c' = \varphi(x_o, y_o)$ – значение левой части уравнения (7) в точке $O'$. Поскольку в новой СК коэффициенты при $x'$ и $y'$ должны быть равны нулю, то получаем (10).

Заметим, что уравнение кривой в новой СК можно выписать, не совершая подстановки (11) и преобразований: коэффициенты квадратичной части не изменяются, надо только вычислить $c'$.

Обозначим $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ – *матрица квадратичной части уравнения* (8) (она же является матрицей системы линейных уравнений (10)),

$$\delta = \det \mathbf{A}, \qquad \delta_x = -\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \delta_y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix}.$$

*1 случай.* $\delta \neq 0$. Тогда по правилу Крамера система (10) имеет единственное решение

$$x_o = \delta_x/\delta, \quad y_o = \delta_y/\delta, \quad (*)$$

а кривая имеет единственный центр. Минусы были поставлены выше потому, что $a_1$ и $a_2$ находятся в (10) не в правой части, а в левой.

*2 случай.* $\delta = 0$, $\delta_x \neq 0$ и $\delta_y \neq 0$ (заметим, что в случае $\delta = 0$, определители $\delta_x$ и $\delta_y$ будут равны или неравны нулю только одновременно). Тогда ранг расширенной матрицы системы (10) будет равен 2, а rank $\mathbf{A}$=1. Значит, согласно теореме Кронекера-Капелли система (10) не имеет решений, а кривая не имеет центра.

*3 случай.* $\delta = 0$, $\delta_x = \delta_y = 0$. Тогда оба уравнения в (10) пропорциональны, а значит, эта система имеет бесконечное количество решений, а кривая – бесконечное количество центров.

Упростим еще величину $c'$:

$$c' = \varphi(x_o, y_o) = a_{11}x_o^2 + 2a_{12}x_o y_o + a_{22}y_o^2 + 2a_1 x_o + 2a_2 y_o + c =$$

$$= (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1)x_o + (a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_2)y_o + a_{12}x_o + a_{22}y_o + c.$$

В силу (9) выражения в скобках равны нулю, и мы имеем

$$c' = a_1 x_o + a_2 y_o + c. \qquad (12)$$

Подставляя сюда (*) получаем

$$c' = a_1 + a_2 + c = (a_1\delta_x + a_2\delta_y + c) = \ , \qquad (13)$$

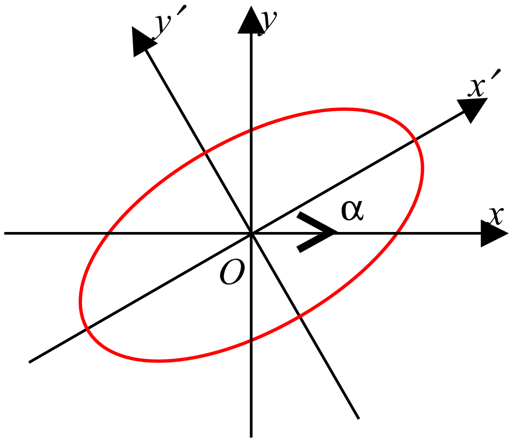
где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix}.$$

В скобках как раз стоит разложение $\Delta$ по последней строке или последнему столбцу. Равенство (13) позволяет выписать (9) не находя координат центра кривой. Но, если уже центр найден, то легче вычислить $c'$ по формулам (12).

## §8. *Классификация центральных кривых второго порядка* (*случай* $\delta \neq 0$).

Попробуем дальше упростить уравнение (9). Выберем новую декартову СК $O'x''y''$, которая получается из $O'x'y'$ поворотом координатных осей на некоторый угол $\alpha$. Тогда формулы замены координат имеют вид:




$$\begin{cases} x' = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \quad (14)$$

Подставим эти формулы в (9):

$$a_{11}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha)^2 + c' = 0,$$

Раскроем скобки и приведем подобные при одинаковых координатах. Тогда коэффициент $x''y''$ будет равен

$$-a_{12}\sin^2\alpha + (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cdot\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha$$

Приравняем это выражение к нулю, и получившееся уравнение разделим на $-\cos^2\alpha$ :

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\,\mathrm{tg}\,\alpha + a_{12} = 0. \qquad (15)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного $\mathrm{tg}\,\alpha$, его дискриминант

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12} \geq 0.$$

Значит, (14) всегда имеет решение, т.е всегда существует такой угол $\alpha$, что в новой СК мы получим уравнение кривой без слагаемого, содержащего $x''y''$. В результате наше уравнение будет иметь вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \ = 0. \qquad (16)$$

Примем пока без доказательства, что коэффициенты $\lambda_1$ и $\lambda_2$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\ ;$$

в развернутом виде:

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0, \qquad (17)$$

где $s = \operatorname{trace} \mathbf{A} = a_{11} - a_{22}$ – след матрицы $\mathbf{A}$. Оно называется *характеристическим уравнением кривой второго порядка*. Согласно теореме Виета получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s\,,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta.$$

Относительно новой СК $O'x''y''$ получаем

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \delta' = \det \mathbf{A}' = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta, \quad s' = \operatorname{trace} \mathbf{A}' = \lambda_1 + \lambda_2 = s,$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/\delta \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\Delta/\delta) = \Delta\,.$$

Таким образом, $\delta' = \delta$, $s' = s$, $\Delta' = \Delta$, т.е. величины $\delta$, $s$, $\Delta$ не изменяются при переходе к новой декартовой СК. Поэтому они называются *инвариантами кривой второго порядка*.

*1 случай*: $\Delta \neq 0$. Если опустить штрихи, то уравнение (16) можно переписать в виде

$$+ = 1. \qquad (18)$$

Обозначим $a^2 = |\Delta/\lambda_1\delta|$, $b^2 = |\Delta/\lambda_2\delta|$.

а) $\delta > 0$, $s\Delta < 0$. Тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, т.е. $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака, и $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \Delta < 0$, т.е. знак $\Delta$ противоположен знаку $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Поэтому оба знаменателя в (17) положительны, и уравнение (15) задает эллипс:

$$+ = 1\,.$$

б) $\delta > 0$, $s\Delta > 0$. Тогда оба знаменателя в (18) отрицательны, и уравнение имеет вид

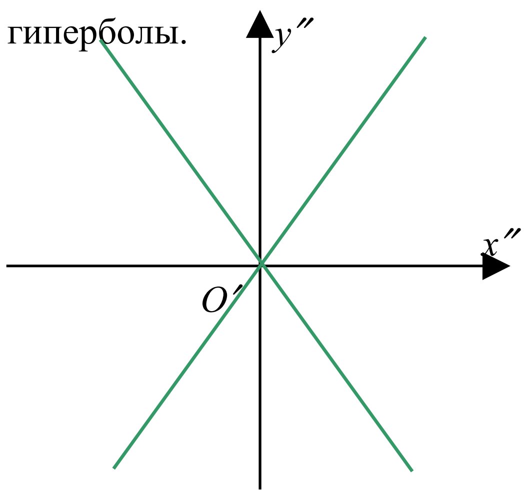
$$+ = -1\,.$$

Говорят, что оно задает *мнимый эллипс*. На действительной плоскости это пустое множество.

в) $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют разные знаки, и поэтому знаменатели в (17) имеют разные знаки. Получаем уравнение

$$- = 1 \quad \text{или} \quad - = -1.$$

В любом случае получается уравнение гиперболы.




*2 случай*: $\Delta = 0$. В этом случае уравнение (15) принимает вид (штрихи опускаем):

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0. \qquad (19)$$

Обозначим $a^2=|\lambda_1|$, $b^2=|\lambda_2|$.

а) $\delta<0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разного знака и (18) можно переписать в виде

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (ax-by)\cdot(ax+by)=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют точки, для которых $ax-by=0$ и точки для которых $ax+by=0$. Поэтому оно определяет *пару прямых*, очевидно, *пересекающихся* в центре $O'$ и симметричных относительно координатных осей.

б) $\delta>0$. Тогда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют одинаковые знаки и (19) можно переписать в виде

$$a^2x^2+b^2y^2=0 \qquad \Leftrightarrow \quad (ax-i\,by)\cdot(ax+i\,by)=0.$$

($i$ – мнимая единица). Говорят, что это уравнение задает *пару мнимых пересекающихся прямых*. Но пересекаются они в действительной точке $O'$ – центре кривой.

В случае $\delta=\Delta=0$ кривая тоже имеет центр (бесконечное количество центров), но этот случай мы рассмотрим в следующем параграфе.

## §9. *Классификация нецентральных кривых второго порядка* (*случай* $\delta=0$).

Пусть теперь $\delta=0$. Тогда мы не можем использовать процедуру нахождения центра, и сразу совершаем поворот координатных осей на угол, тангенс которого находится из уравнения (14). Получим новую декартову СК с тем же началом $Ox'y'$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x=x'\cdot\cos\alpha-y'\cdot\sin\alpha, \\ y=x'\cdot\sin\alpha+y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Здесь на один штрих с каждой стороны меньше, чем в (14), поскольку это первая замена координат. В этой СК уравнение кривой не будет включать слагаемое, содержащее произведение $x'y'$:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2b_1x'+2b_2y'+c=0, \qquad (20)$$

Заметим, что коэффициент $c$ останется прежним, а непосредственное вычисление показывает, что

$$b_1=a_1\cdot\cos\alpha+a_2\cdot\sin\alpha, \qquad b_2=a_1\cdot\sin\alpha+a_2\cdot\cos\alpha.$$

Числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ можно найти из уравнения (17). Так как $\delta=\lambda_1\cdot\lambda_2=0$, то один из корней будет равен нулю. Пусть это будет $\lambda_1$. Имеем уравнение

$$\lambda_2 y'^2+2b_1x'+2b_2y'+c=0. \qquad (21)$$

Для этого уравнения

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}=-\lambda_2 b_1^2.$$

1 *случай*: $\Delta=0 \iff b_1=0$. Уравнение имеет вид $\lambda_2 y'^2+2b_2y'+c=0$. Выделим полный квадрат:

$$\lambda_2(\,y'^2+y'+\quad)-\quad+c=0 \quad\iff\quad \lambda_2(\,y'+\quad)^2-\quad+c=0\,.$$

Обозначим $c'=(b_1^2-\lambda_2 c)/\lambda_2$, $a^2=|\,c'\,|$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'\,, \\ y''=y'+\quad, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'(0,-b_1/\lambda_2)_{Ox'y'}$ (подчеркнем, что координаты указаны в промежуточной СК $Ox'y'$). Получим уравнение

$$(y'')^2=a^2.$$

а) $c'>0 \Rightarrow (y'')^2=a^2$, т.е. $y''=a$ или $y''=-a$. Наша кривая – это *пара параллельных прямых*.

б) $c'>0 \Rightarrow (y'')^2=-a^2$, т.е. $y''=i\,a$ или $y''=-i\,a$. Говорят, что наше уравнение задает *пару мнимых параллельных прямых*.

в) $c'=0 \Rightarrow (y'')^2=0$. Говорят, что это уравнение задает *пару совпадающих прямых*.

2 *случай*: $\Delta\neq0 \iff b_1\neq0$. Так же, как и в предыдущем случае, выделяем в (21) полный квадрат по $y$:

$$\lambda_2{}^2-\quad+2b_1x'+c=0\,,$$

а затем преобразуем так:

$$\lambda_2{}^2+2b_1\quad=0\,.$$

Обозначим $c'=\quad$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'-c'\,, \\ y''=y'+\quad, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'_{Ox'y'}$.
Получим уравнение

$$\lambda_2(y'')^2+2b_1x''=0 \quad\iff\quad (y'')^2=2px'',$$

где $p=-2b_1/\lambda_2$ . Это уравнение задает параболу.

Итак, мы установили, что общее уравнение кривой второго порядка (8) задает одну из следующих кривых второго порядка ($\operatorname{sign} x$ означает знак числа $x$).

| $\operatorname{sign}\delta$ | $\operatorname{sign} s\cdot\Delta$ | Кривая и ее каноническое уравнение | Кол-во центров |
|---|---|---|---|
| + | – | Эллипс + =1 | 1 |
| + | + | Мнимый эллипс + = –1 | |
| – | ± | Гипербола – = 1 | |
| – | 0 | Пара пересекающихся прямых $a^2x^2-b^2y^2=0$ | |
| + | 0 | Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2+b^2y^2=0$ | |
| 0 | ± | Парабола $y^2=2px$, | **0** |
| 0 | 0 | Пара параллельных прямых $x^2=a^2$<br>Пара мнимых параллельных прямых $x^2=-a^2$<br>Пара совпадающих прямых $x^2=0$ | **∞** |

## §10. *Примеры решения задач.*

**1.** *Составить уравнение кривой, каждая точка которой расположена вдвое дальше от точки* $F(3,\ 3)$, *чем от оси* $Ox$. *Определить тип кривой и изобразить ее в декартовой системе координат.*

***Решение.*** Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка кривой, $MM'$ – перпендикуляр, опущенный на $O$. Тогда расстояние от $M$ до $Ox$ равно $|MM'|=|y|$ (см. чертеж в конце решения), а $|MF|=$ . По условию выполняется

$$= 2|y| .$$

Возведение в квадрат, вообще говоря, не является равносильным переходом; но в данном случае обе части равенства неотрицательны. Поэтому, без всяких дополнительных ограничений возводим в квадрат:

$$(x-3)^2+(y-3)^2=4y^2.$$

Мы раскроем только вторую скобку, и после приведения подобных вновь соберем полный квадрат:

$$(x-3)^2+y^2-6y+9-4y^2=0,$$

$$(x-3)^2-3y^2-6y+9=0,$$
$$(x-3)^2-3(y^2+2y+1-4)=0,$$
$$(x-3)^2-3(y+1)^2=-12.$$

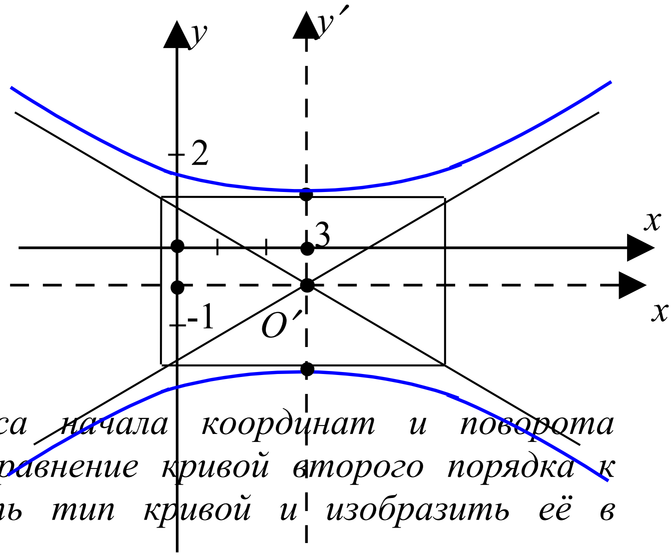
Делаем замену координат

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y+1. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(3,-1)$. Получившееся уравнение делим на $-12$:

$$- \ =-1.$$

Это уравнение задает гиперболу с полуосями $a$=2 ≈ 3,4 , $b$=2. Центр гиперболы находится в точке $O'(3,-1)$. Подробное описание построения приводится в решении задачи 2а).




**2.** *С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

**а)** $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0.$

***Решение.*** Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+c=0. \qquad (8)$$

Если

$$\delta=\left|\quad\right| \neq 0,$$

то кривая имеет центр $O'(x_o, y_o)$, координаты которого можно найти из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_o+a_{12}y_o+a_1=0, \\ a_{12}x_o+a_{22}y_o+a_2=0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если мы совершим параллельный перенос начала координат в точку $O'$, то уравнение кривой примет вид:

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+c'=0, \qquad (9)$$

где

$$c' = a_1 x_o + a_2 y_o + c. \qquad (12)$$

Вычисляем:

$$\delta = \quad = 576 \neq 0,$$

Значит, кривая имеет центр. Найдем координаты центра $(x_o, y_o)$ из системы уравнений (10):

$$\begin{cases} 25x_o - 7y_o + 32 = 0, \\ -7x_o + 25y_o - 32 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 25x_o - 7y_o = -32, \\ -7x_o + 25y_o = 32. \end{cases}$$

Для решения применим правило Крамера: $x_o = \ $, $y_o = \ $, где $\delta_x$ получается заменой первого столбца в $\delta$ на столбец свободных членов, а $\delta_y$ – второго столбца:

$$\delta_x = \quad = 32 \cdot \quad = 32 \cdot (-18) = -576.$$

$$\delta_y = \quad = 32 \cdot \quad = 32 \cdot 18 = 576.$$

$$x_o = \ = -1, \quad y_o = \ = 1.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(-1, 1)$. Совершим перенос начала координат в точку $O'$ и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

Однако делать эту подстановку в исходное уравнение кривой не следует; мы заранее из теории знаем, что получится в результате этой подстановки: уравнение примет вид (9) (то есть линейная часть уравнения исчезнет, а коэффициенты квадратичной части не изменятся), где $c'$ находится по формуле (12):

$$c' = 32 \cdot (-1) - 32 \cdot 1 - 224 = -288.$$

Уравнение данной кривой второго порядка в новой системе координат:

$$25x'^2 - 14x'y' + 25y'^2 = 288. \qquad (9')$$

Далее совершаем поворот координатных осей на угол $\alpha$, тангенс которого находится по формуле:

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22}) \cdot \mathrm{tg}\alpha - a_{12} = 0, \qquad (15)$$

$$-7\mathrm{tg}^2\alpha + (25 - 25)\mathrm{tg}\alpha + 7 = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{tg}\,\alpha_1 = 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = -1.$$

Можем выбрать любое из них. Но, как правило, выбираем такое $\alpha$, для которого $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$. Имеем: $\alpha = \ $, $\sin\alpha = \cos\alpha = \ $.

Получим новую систему координат $O'x''y''$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha\,, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha\,. \end{cases} \qquad (14)$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = (x'' - y''), \\ y' = (x'' + y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену в (9′):

$$[25(x''-y'')^2 - 14(x''-y'')\cdot(x''+y'') + 25(x''+y'')^2] = 288$$

$$[25x''^2 - 50x''y'' + 25\,y''^2 - 14x'' + 14\,y'' + 25x''^2 + 50x''y'' + 25\,y''^2] = 288.$$

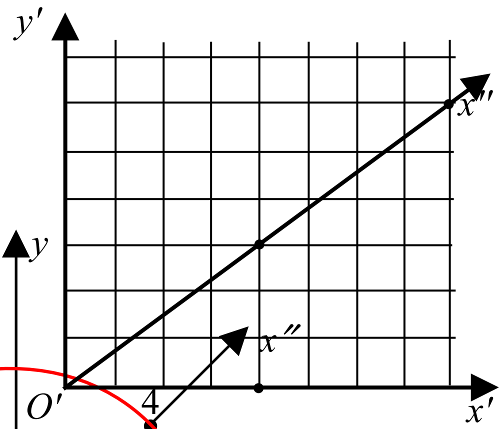
Слагаемые, содержащие произведение $x''y''$ обязательно должны сократиться. Если это не происходит, то следует искать ошибку выше.

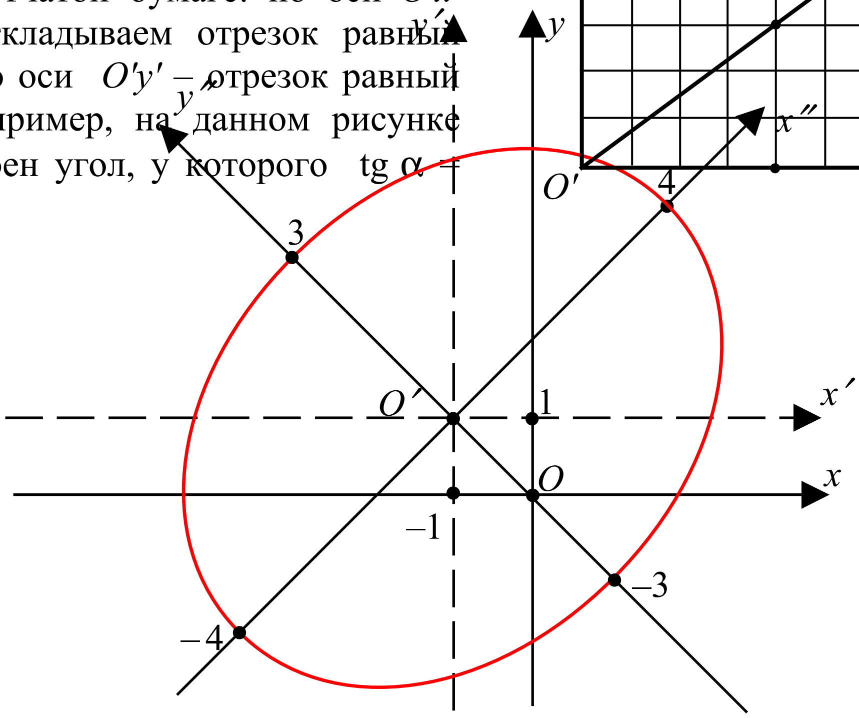
$$[36x''^2 + 64y''^2] = 288, \quad 9x''^2 + 16y''^2 = 144,$$

$$+ \; = 1.$$

Это уравнение задает эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$. Строим эллипс. Для этого сначала строим исходную систему координат $Oxy$, затем в этой системе находим точку $O'$ и строим промежуточную систему координат $O'x'y'$, которая получается из $Oxy$ переносом начала в точку $O'$. Затем поворачиваем координатные оси на выбранный нами ранее угол $\alpha$ и получаем окончательную систему координат $O'x''y''$. Именно на осях этой системы координат мы и откладываем полуоси эллипса.

В нашем случае $\alpha = 45^{\circ}$, и поэтому повернутые оси легко построить. В более общем случае, если мы нашли, что $\operatorname{tg}\alpha = a/b$, мы этот угол очень легко можем построить на клетчатой бумаге: по оси $O'x'$ мы откладываем отрезок равный $b$, а по оси $O'y'$ – отрезок равный $a$. Например, на данном рисунке построен угол, у которого $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$.



**б)** $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

***Решение.***

$$\delta=\left|\quad\right|=-161-64=-225\neq 0.$$

Значит, ищем координаты центра:

$$\begin{cases}7x_o+8y_o-7=0,\\ 8x_o-23y_o-8=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}7x_o+8y_o=7,\\ x_o-23y_o=8.\end{cases}$$

По правилу Крамера:

$$\delta_x=\left|\quad\right|=-161-64=-225\neq 0,\ \ \delta_y=\left|\quad\right|=0.$$

$$x_o= \ =-1,\ y_o= \ =0.$$

Значит центр кривой находится в точке $O'(1,\ 0)$. Совершаем перенос начала координат в точку $O'$ и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат:

$$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'\end{cases}$$

Находим $c'=-7x_o-8y_o+c=-7-218=-225$. Значит в новой системе координат уравнение кривой примет вид:

$$7x'^2+16x'y'-23y'^2-225=0. \qquad (*)$$

Совершаем поворот координатных осей на угол $\alpha$, тангенс которого находим из уравнения (5):

$$8\,\mathrm{tg}^2\alpha+30\,\mathrm{tg}\alpha-8=0,$$

$$4\,\mathrm{tg}^2\alpha+15\,\mathrm{tg}\alpha-4=0,$$

$$D=225+64=289,$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1= \ = \ ,\ \mathrm{tg}\alpha_2= \ =-4.$$

Выбираем положительный тангенс: $\mathrm{tg}\alpha=$ . Находим $\sin\alpha=$ , $\cos\alpha=$ .
В уравнении $(*)$ делаем замену:

$$[7(4x''-y'')^2+16(4x''-y'')(x''+4y'')-23(x''+4y'')^2]=225,$$

$$[112x''^2-\underline{56x''y''}+7y''^2+64x''^2+\underline{240x''y''}-64y''^2-$$
$$-23x''^2-\underline{184x''y''}-368y''^2]=225$$

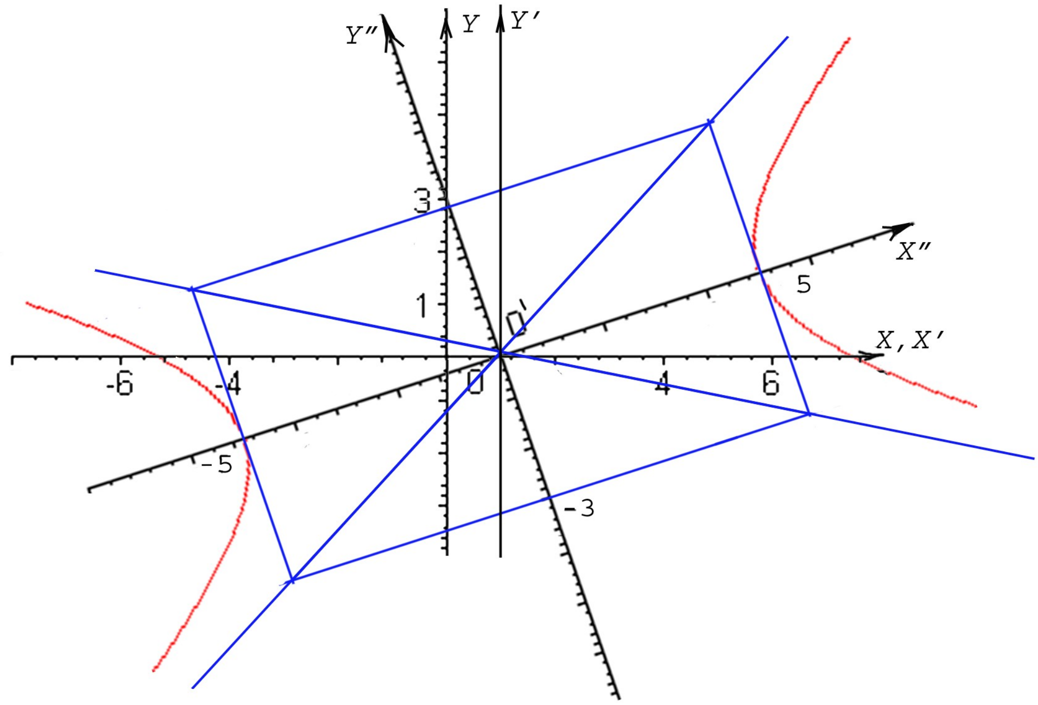
При приведении подобных, слагаемые содержащие произведения $x''y''$ должны сократиться. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$$[153x''^2 - 425y''^2] = 225,$$

$$9x''^2 - 25y''^2 = 225,$$

$$- \ = 1.$$

Получилось уравнение гиперболы с полуосями $a = 5$, $b = 3$.



Описание построения:

1) $O'(1,0)$ – новое начало координат, $O'x' \| Ox$, $O'y' \| Oy$ – вспомогательные оси;
2) совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$ ; получаем новые координатные оси $O'x''$ и $O'y''$ (способ построения см. в конце решения задачи 2а)).
3) в новой системе координат $O'x''y''$ строим фундаментальный прямоугольник: $a=5$, $b=3$ ;
4) проводим диагонали фундаментального прямоугольника, они будут являться асимптотами гиперболы;
5) строим гиперболу: она стремится к асимптотам, касаясь фундаментального прямоугольника.

**в)** $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

$$\delta = \left| \quad = 0 \quad \right|$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра и сразу поворачиваем координатные оси:

$$-12\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 12 = 0,$$

$$D = 49 + 576 = 625,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \ = \ , \operatorname{tg}\alpha_2 = \ = - \ .$$

$$\sin\alpha = \ ; \ \cos\alpha = \ .$$

Поскольку это первая замена координат, то вид формул отличается от (6) количеством штрихов. Подставляем в первоначальное уравнение:

$$[9(4x' - 3y')^2 - 24(4x' - 3y')(3x' + 4y') + 16(3x' + 4y')^2] -$$
$$- (4x' - 3y') + (3x' + 4y') - 50 = 0,$$
$$[144\,x'^2 - 216\,x'y' + 81y'^2 - 288\,x'^2 - 168\,x'y' + 288\,y'^2 + 144\,x'^2 + 384x'y' + 296y'^2] -$$
$$-16\,x' + 12\,y' + 66\,x' + 88\,y' - 50 = 0\ .$$

Слагаемые с $x'y'$ должны сократиться. Кроме того, если $\delta = 0$, то одна из переменных в квадрате сокращается полностью:

$$25\,y'^2 + 50\,x' + 100y' - 50 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0\ . \quad (*)$$

Выделяем полный квадрат:

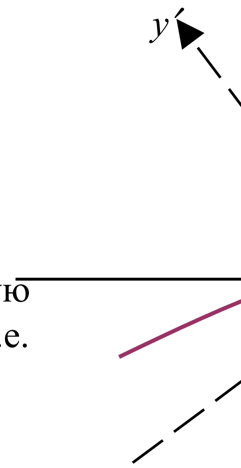
$$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0,$$
$$(y' + 2)^2 + 2(x' - 3) = 0.$$

Делаем замену координат:

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-2)_{O'x'y'}$. Подчеркнем, что это координаты относительно второй системы координат $O'x'y'$.

$$y''^2 = -2x'' \text{ – парабола.}$$

Ее параметр $p = 1$, а ось параболы – $O'x''$.




Описание построения:

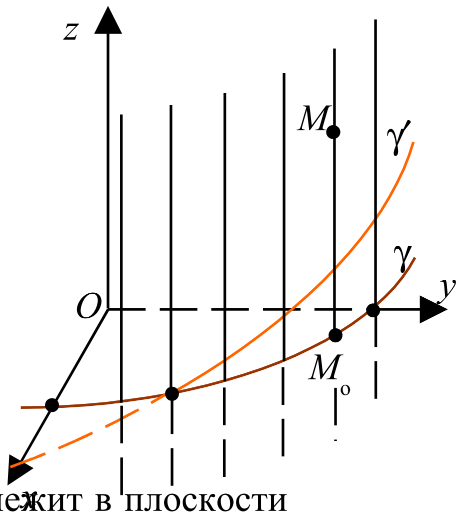
1. совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$;
2. новое начало координат $O'(3,-2)$ в системе координат $Ox'y'$;
3. координатные оси $O'x''$ и $O'y''$.
4. для построения параболы любым способом находим дополнительную точку; например, подставим в уравнение (*) $y' = 0$, тогда $x' = 1$. Т.е. $A(1,0)_{O'x'y'}$ – дополнительная точка (в системе $Ox'y'$).

# ГЛАВА 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## §1. *Цилиндрические поверхности.*

***Определение.*** *Линейчатой* называется поверхность, через каждую точку которой проходит хотя бы одна прямая, принадлежащая поверхности.

***Определение.*** *Цилиндрической* называется поверхность, которую образует множество параллельных прямых (*образующих*), проходящих через каждую точку некоторой кривой (*направляющей*).




Пусть Φ – цилиндрическая поверхность. Выберем декартову СК так, чтобы ось $Oz$ была параллельна образующим. Если, при этом, направляющая $\gamma'$ не лежит в плоскости $Oxy$, то мы ее спроецируем в эту плоскость, и получим некоторую кривую $\gamma$. Если теперь мы возьмем $\gamma$ в качестве направляющей, то получим ту же поверхность Φ. Поэтому будем с самого начала считать, что направляющей служит кривая $\gamma$, лежащая в плоскости $Oxy$. Пусть

$$\varphi(x, y) = 0 \quad – \qquad (1)$$

ее уравнение в плоскости $Oxy$ (в пространстве она задается системой из двух уравнений: $\varphi(x, y) = 0$ и $z = 0$). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности Φ. Тогда ее проекция на плоскость $Oxy$ будет точка $M_o(x,\ y,\ 0)$; и эта точка должна принадлежать кривой $\gamma$. Поэтому ее координаты удовлетворяют (1). Но тогда этому уравнению будут удовлетворять и координаты точки $M_o$: ведь координаты $x$ и $y$ у этих точек одинаковы, а $z$ в уравнение не входит.

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (1). Тогда этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки $M_o(x, y, 0)$, а т.к. $M_o \in Oxy$, то $M_o \in \gamma$. При этом, $M$ и $M_o$ лежат на одной прямой, параллельной оси $Oz$ $\Rightarrow$ $M \in \Phi$.

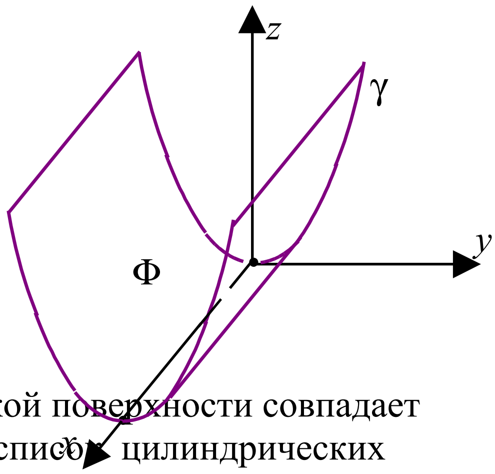
Итак, мы установили, что (1) и есть уравнение поверхности Φ, т.е. *уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением ее направляющей кривой* $\gamma$ *в плоскости* $Oxy$, *если образующие параллельны оси* $Oz$. Аналогично, если образующие параллельны $Oy$, то уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей кривой в плоскости $Oxz$.

И обратно, если в уравнении поверхности отсутствует, например, координата $x$, то сразу можем сделать вывод, что эта поверхность цилиндрическая, а ее образующие параллельны $Ox$.

***Пример.*** Пусть поверхность задана уравнением $y^2 = 2z$. Тогда это цилиндрическая поверхность, ее образующие параллельны $Ox$, а направляющей служит парабола

$$\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0. \end{cases}$$

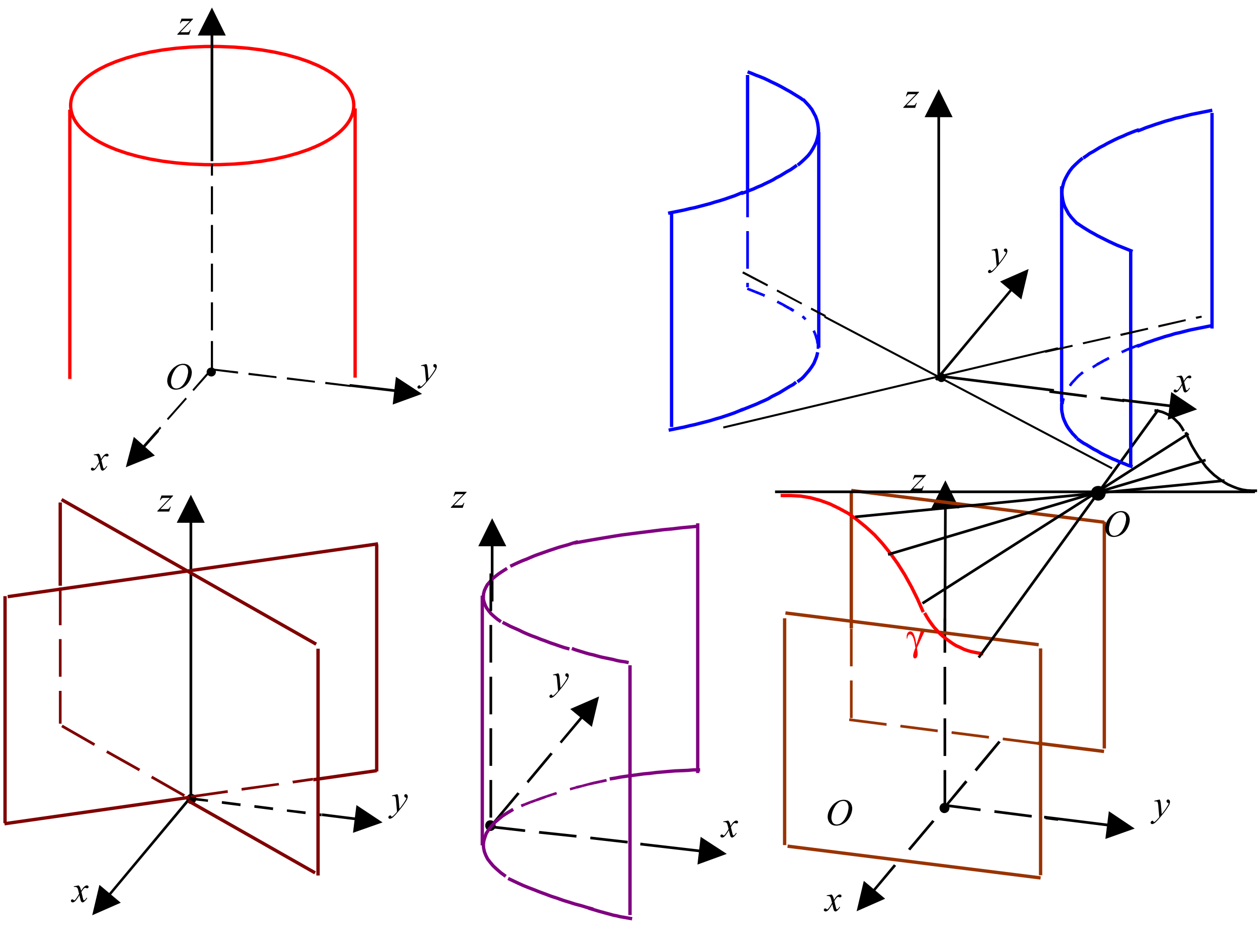
Такая поверхность называется «*параболический цилиндр*».




Поскольку уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей кривой, то список цилиндрических поверхностей второго порядка совпадает со списком их направляющих кривых второго порядка.

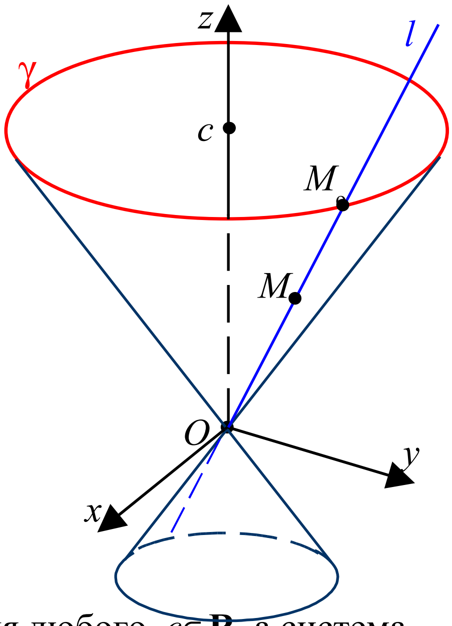
| | |
|---|---|
| 1. Эллиптический цилиндр | $+\ =1$ |
| 2. Мнимый эллиптический цилиндр ( ∅ ) | $+\ =-1$ |
| 3. Гиперболический цилиндр | $-\ =1$ |
| 4. Параболический цилиндр | $y^2 = 2px$ |
| 5. Пара пересекающихся плоскостей | $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ |
| 6. Пара мнимых плоскостей, которые пересекаются по действительной прямой | $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ |
| 7. Пара параллельных плоскостей | $x^2 = a^2$ |
| 8. Пара совпадающих плоскостей | $x^2 = 0$ |
| 9. Пара мнимых параллельных плоскостей ( ∅ ) | $x^2 = -a^2$ |

***Упражнение.*** Самостоятельно определите, какая поверхность изображена на каждом из следующих рисунков.



## §2. *Конические поверхности.*

***Определение.*** *Конической* называется поверхность, которую образует множество всех прямых (*образующих*), проходящих через каждую точку некоторой кривой (*направляющей*), и через некоторую точку $O$ (*вершину*).




Выберем декартову СК так, чтобы начало координат совпадало с вершиной конической поверхности Ф. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности Ф в этой СК. Поскольку мы рассматриваем только поверхности второго порядка, то $F$ – многочлен второй степени от 3 переменных. Тогда функция двух переменных

$$\varphi(x,y)=F(x,y,c)$$

будет также многочленом второй степени для любого $c\in\mathbf{R}$, а система

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=c\end{cases}$$

будет задавать сечение поверхности Ф плоскостью $z=c$. Получающуюся в сечении кривую $\gamma$ выберем в качестве направляющей. Т.к. $\varphi(x, y)$ – многочлен 2 степени, то $\gamma$ – кривая 2 порядка. Если $\gamma$ – центральная, то можем считать, что ось $Oz$ проходит через ее центр.

Предположим сначала, что направляющая – эллипс

$$\gamma\colon \begin{cases} + \; -1=0,\\ z=c\end{cases} \qquad (*)$$

Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка поверхности Ф. Тогда вся прямая $OM$ должна лежать на поверхности. Ее параметрическое уравнение:

$$OM\colon \begin{cases}x=x_1t,\\ y=y_1t,\\ z=z_1t.\end{cases}$$

Пусть она пересекает направляющую $\gamma$ в точке $M_o(x_o, y_o, c)$. Тогда ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой $OM$:

$$\begin{cases} x_o = x_1 t, \\ y_o = y_1 t, \\ c = z_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = x_1 c/z_1, \\ y_o = y_1 c/z_1, \\ t = c/z_1. \end{cases}$$

А теперь подставим найденные выражения в уравнение эллипса:

$$+ \quad - 1 = 0.$$

Домножим это уравнение на $z_1/c$, и получим

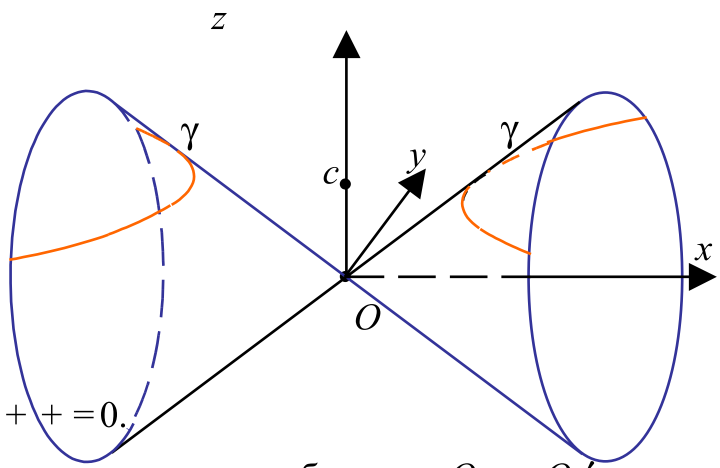
$$+ \quad - \quad = 0. \qquad (2)$$

Обратно, пусть координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяют уравнению (2). Тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки на прямой $OM$:

$$+ \quad - \quad = t^2( \quad + \quad - \quad ) = t^2 \cdot 0 = 0,$$

а подставив в (2) $z = c$, получим уравнение эллипса (∗). Значит, (2) и есть уравнение конической поверхности. Опуская индексы, окончательно получаем каноническое уравнение конуса.

$$+ \quad - \quad = 0.$$




Аналогично, если направляющая кривая – это гипербола

$$\begin{cases} - \quad - 1 = 0, \\ z = c\,, \end{cases}$$

получим уравнение конической поверхности

$$- \quad - \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad - \quad + \quad + \quad = 0.$$

Это такой же «эллиптический» конус, только ось его будет не $Oz$, а $Oz'$.

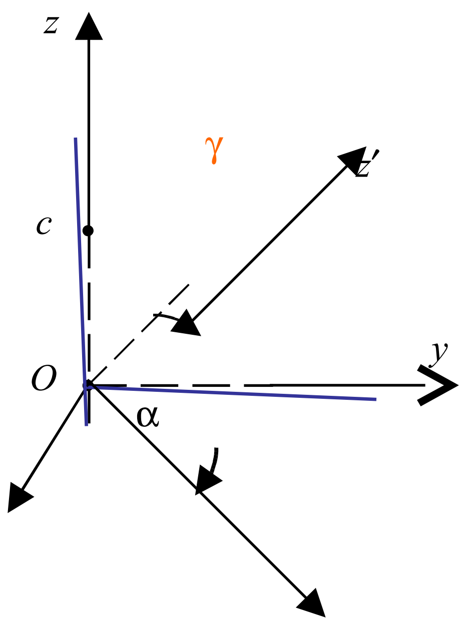
Пусть теперь направляющая $\gamma$ – это парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ z = c\,. \end{cases}$$

Тогда тем же способом получим уравнение

$$x^2 = yz. \qquad (**)$$

Повернем СК на $45°$ вокруг оси $Ox$. Тогда формулы замены координат имеют вид



$$\begin{cases} x = x', \\ y = \ (y'+z'), \\ z = \ (-y'+z'). \end{cases}$$

x

y′

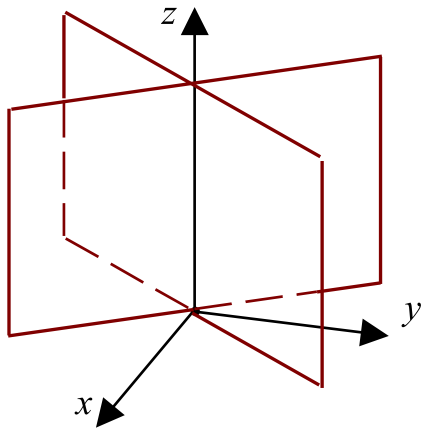
Подставим эти формулы в (**), и обозначив $a^2=p/c$, получим

$$x^2=a^2(-y'^2+z'^2) \quad \Leftrightarrow \quad +y'^2-z'^2=0.$$

Таким образом, уравнение (**) тоже определяет конус, ось которого является биссектрисой угла $yOz$. При этом, оси $Oy$ и $Oz$ принадлежат конусу. Поэтому плоскость, в которой лежит направляющая γ, параллельна образующей.

Мы уже говорили в предыдущей главе, что эллипс, гипербола и парабола – это конические сечения. Теперь мы в этом убедились.

Если направляющей служит пара прямых, то коническая поверхность представляет собой *пару плоскостей*, обязательно пересекающихся или совпадающих, т.к. обе плоскости должны проходить через начало координат. Эти поверхности относятся также к цилиндрическим и они были рассмотрены в предыдущем параграфе.



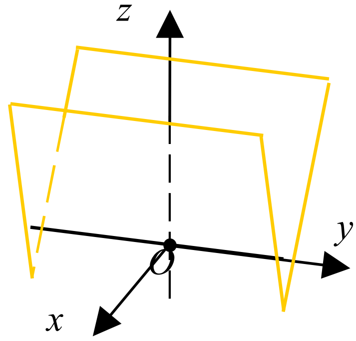

Итак, мы установили, что существуют 4 типа конических поверхностей:

**1.** Конус $\quad + \ - \ =0.$

**2.** Пара пересекающихся плоскостей $a^2x^2-b^2y^2=0$ .

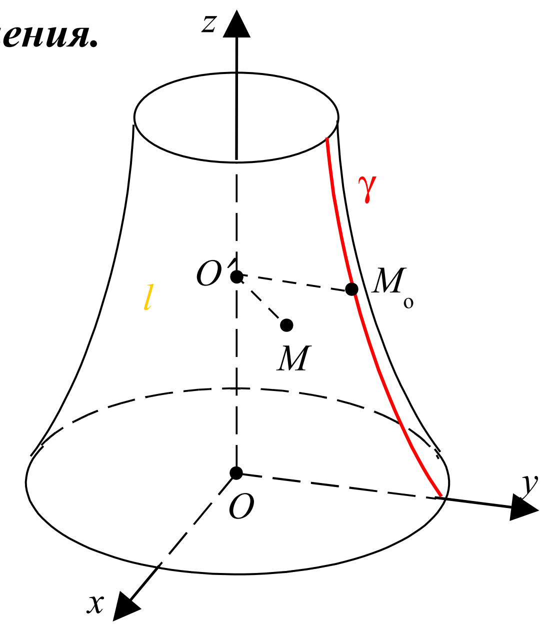
**3.** Пара мнимых пересекающихся плоскостей $a^2x^2+b^2y^2=0$ .

**4.** Пара совпадающих плоскостей $x^2=0$.




## §3. *Поверхность вращения.*

Пусть некоторая кривая γ расположена в плоскости $Oyz$. Будем вращать ее вокруг оси $Oz$. Получим некоторую поверхность Φ, которая называется *поверхностью вращения*. Каждая точка кривой γ описывает



окружность – *параллель*, центр которой лежит на оси $Oz$.

Пусть

$$\varphi(y,z)=0 \quad – \qquad (3)$$

уравнение кривой $\gamma$ в плоскости $Oyz$. Тогда в пространстве она задается системой

$$\begin{cases}\varphi(y,z)=0,\\ x=0.\end{cases}$$

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности $\Phi$. Тогда она лежит на одной из таких параллелей $l$ и может быть получена поворотом точки $M_o(0, y_o, z_o)=\gamma \cap l$. Очевидно, что $z_o= z$ (∗), и центр $O'$ параллели $l$ имеет координаты $O'(0,0,z)$. Кроме того, $|O'M| = |O'M_o|$ . В координатах это условие имеет вид

$$y_o= \ . \qquad (**)$$

Координаты точки $M_o$ должны удовлетворять уравнению (3): $\varphi(y_o, z_o)=0$. Подставляя сюда (∗) и (∗∗) получаем

$$\varphi( ,z)=0. \qquad (4)$$

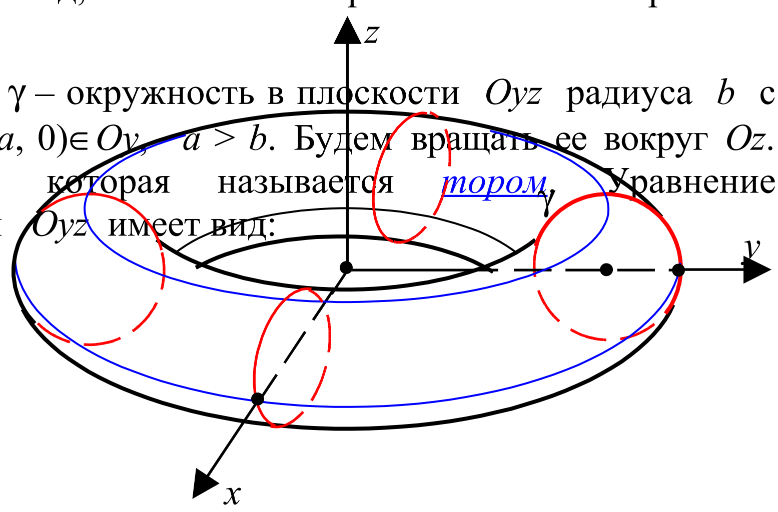
Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (4). Тогда, если выполнено (∗) и (∗∗), то этому уравнению будут удовлетворять координаты точки $M_o(0, y_o, z_o)$, а значит $M_o\in\gamma$. Кроме того, в силу (∗) и (∗∗) точка $M_o$ лежит на одной параллели с $M$, а значит $M$ может быть получена поворотом точки $M_o$ вокруг оси $Oz \Rightarrow M\in\Phi$.

Итак, мы доказали, что (4) есть уравнение поверхности вращения $\Phi$. Таким образом, *для того чтобы из уравнения кривой $\gamma$ получить уравнение поверхности вращения* $\Phi$*, мы в уравнении кривой оставляем без изменения координату $z$, а $y$ заменяем*: $y$ .

Обратно, если в уравнении поверхности можно выделить , и при этом, нигде более координаты $x$ и $y$ в уравнение не входят, то мы сразу можем сделать вывод, что наша поверхность есть поверхность вращения вокруг $Oz$.

***Пример* 1.** Пусть $\gamma$ – окружность в плоскости $Oyz$ радиуса $b$ с центром в точке $A(0, a, 0)\in Oy$, $a > b$. Будем вращать ее вокруг $Oz$. Получим поверхность, которая называется *тором*. Уравнение окружности в плоскости $Oyz$ имеет вид:

$$(y-a)^2+z^2=b^2.$$

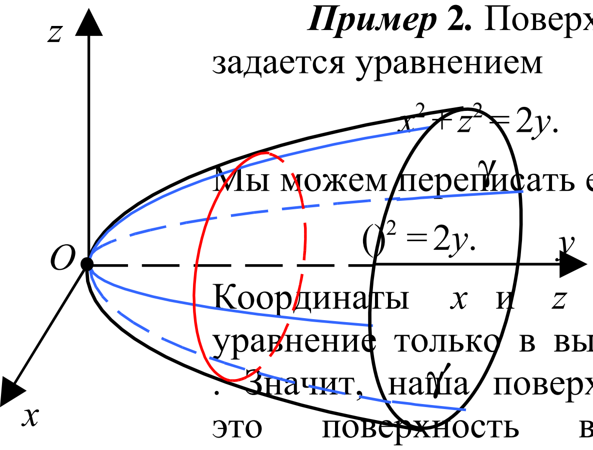


Вращаем вокруг $Oz$. Поэтому $z$ оставляем без изменений, а $y$ заменяем:

$y$ □ :

$(-a)^2+z^2=b^2.$

Получили уравнение тора. Заметим, что тор не относится к поверхностям 2 порядка.




***Пример* 2.** Поверхность $\Phi$ задается уравнением

$$x^2+z^2=2y.$$

Мы можем переписать его так:

$$(\ )^2=2y.$$

Координаты $x$ и $z$ входят в уравнение только в выражении . Значит, наша поверхность – это поверхность вращения вокруг $Oy$. Для того, чтобы получить уравнение кривой, которая вращается, мы заменяем на $x$ и получаем уравнение кривой $\gamma$ в плоскости $Oxy$: $x^2=2y$. В пространстве эта кривая задается системой

$$\begin{cases} x^2=2y, \\ z=0. \end{cases}$$

Точно так же мы можем заменить на $z$ и получить уравнение кривой $\gamma'$ в плоскости $Oyz$: $z^2=2y$. Вращая вокруг $Oy$ первую или вторую кривую, мы получим одну и ту же поверхность.

## §4. *Эллипсоид.*

***Определение.*** *Эллипсоидом* называется поверхность $\Phi$, имеющая каноническое уравнение вида

$$+\ +=1. \qquad (5)$$

Исследуем ее форму *методом параллельных сечений*. В сечениях плоскостями $z=h$ получаем кривую

$$+\ =1- \qquad (*)$$

Если $|h| \neq c$, то обозначим $a'^2 = a^2|1- \quad|$, $b'^2 = b^2|1- \quad|$.

При $|h| < c$ получаем эллипсы $\quad + \quad = 1$, полуоси которых $a'$ и $b'$ достигают максимального значения $a$ и $b$ при $h = 0$.

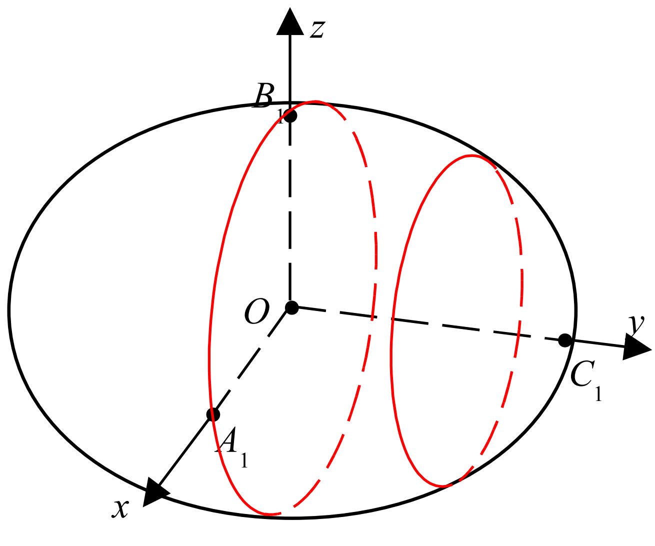
При $|h| > c$ получаем мнимые эллипсы $\quad + \quad = -1$ ($\varnothing$). А при $h = \pm c$ из ($*$) получаем уравнение $\quad + \quad = 0$, которое задает только одну из точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

Аналогично, в сечениях плоскостями $x = h$, или $y = h$ в случае $|h| < a$, или $|h| < b$, получаем только эллипсы, полуоси которых достигают максимальных значений при $h = 0$. При $h = \pm a$, или $h = \pm b$ будем получать одну точку.

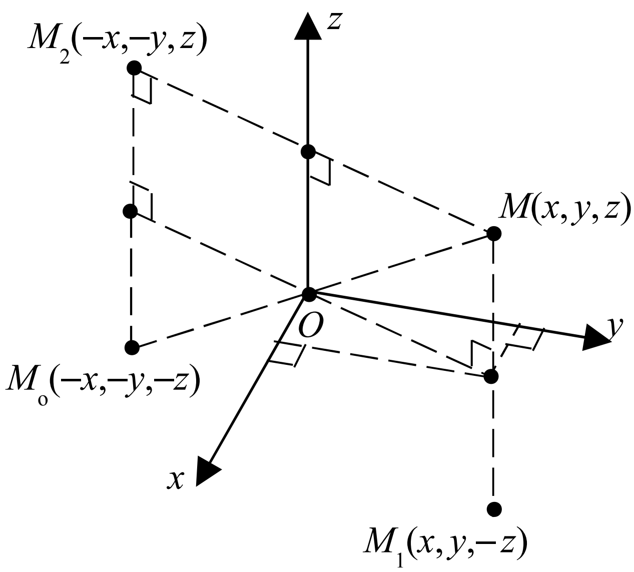
*Прочие геометрические свойства эллипсоида*.

**1.** Из уравнения (5) получаем, что $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$ (если $|x| > a$, то уже первое слагаемое в (5) будет больше 1, а к нему еще надо что-то прибавить). Значит, весь эллипсоид содержится в пар-де, который определяется этими неравенствами.

**2.** Координатные оси пересекают эллипсоид в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$, которые называются вершинами эллипсоида.




**3.** Координатные оси являются осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии, начало координат $O$ – центром симметрии.




Действительно, пусть $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка эллипсоида. Тогда ее координаты $(x,\ y,\ z)$ удовлетворяют уравнению (5). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также тройки чисел $(x,-y,-z)$, $(-x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$, $(x,y,-z)$, $(x,-y,z)$, $(-x,y,z)$, $(-x,-y,-z)$, которые определяют точки симметричные $M$ соответственно относительно осей $Ox$, $Oy$, $Oz$, плоскостей $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$ и точки $O$. Поэтому все эти точки тоже принадлежат эллипсоиду.

На рисунке показано, как изменяются координаты точки при симметрии относительно оси $Oz$, плоскости $Oxy$ и точки $O$.

**4.** При $a=b$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг $Oz$. Действительно, в этом случае его уравнение можно переписать так:

$$+ = 1.$$

Аналогично, при $a=c$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг $Oy$, а при $b=c$ – вокруг $Ox$.

При $a=b=c$ эллипсоид будет сферой:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (**).$$

Произвольный эллипсоид может быть получен из сферы (**) в результате равномерного сжатия (растяжения) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Действительно, если в (**) сделать замену координат $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, то получим уравнение (5), только со штрихами.

## §5. *Однополостной и двуполостной гиперболоиды.*

***Определение.*** *Однополостным и двуполостным гиперболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$\Phi_1$: $+ - = 1$ (6) $\qquad$ $\Phi_2$: $+ - = -1$. (7)

Исследуем их форму методом параллельных сечений. В сечениях плоскостями $z=h$ получаем соответственно кривые

$+ = 1 +$ $\qquad$ | $\qquad$ $+ = -1 +$ $\quad$ (*)

Обозначим соответственно

$a'^2=a^2(1+)$, $b'^2=b^2(1+)$; $\qquad$ | $\qquad$ $a'^2=a^2|-1+|$, $b'^2=b^2|-1+|$, $h\neq\pm c$

при любом $h$ получаем эллипсы $\qquad$ | $\qquad$ при $|h|>c$ получаем эллипсы

$$+ = 1$$

полуоси которых $a'$ и $b'$ неограни-неогченно возрастают при возрас-воз-тании $|h|$, и достигают минимумов $a$ и $b$ при $h=0$.

полуоси которых $a'$ и $b'$ раниченно возрастают при растаснии $|h|$; при $|h|<c$ получаем мнимые эллипсы $+ = -1$ (∅), а при $h=\pm c$ (*) превращается в $+ = 0$, а это уравнение задает одну из

точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем соответственно кривые

| | |
|---|---|
| $- = 1-$ (**) | $- = -1-$ |
| Обозначим соответственно $a'^2 = a^2 \mid 1- \mid$, $c'^2 = c^2 \mid 1- \mid$ | $a'^2 = a^2(1+)$, $c'^2 = c^2(1+)$ . |
| и при $h \neq \pm b$ получаем гиперболы, $+ = \pm 1$, | и при любом $h$ получаем гиперболы $- + = 1$. |
| а при $h = \pm b$ (**) превращается в уравнение $- = 0$, которое задает пару пересекающихся прямых. | |

Аналогично, в сечениях $\Phi_2$ плоскостями $y=h$ получаем только гиперболы, а в сечениях $\Phi_1$ – гиперболы или пары прямых при $h = \pm a$.

*Прочие геометрические свойства гиперболоидов*.

**1.** Из уравнения (7) получаем, что $|z| \geq c$, т.е. в пространственном слое $z < c$ нет точек $\Phi_2$. Координатные оси $Ox$ и $Oy$ пересекают $\Phi_1$ в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, которые называются его вершинами. Ось $Oz$ его не пересекает. Зато ось $Oz$ пересекает $\Phi_2$ в точках $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$, которые называются его вершинами. Оси $Ox$ и $Oy$ не пересекают $\Phi_2$.

**2.** Точно так же, как и для эллипсоида доказывается, что координатные оси являются осями симметрии гиперболоидов, координатные плоскости – плоскостями симметрии, а точка $O$ – центром симметрии.

**3.** При $a=b$ гиперболоиды будут поверхностями вращения, а при $a=c$ гиперболы в сечениях плоскостями $y=h$ будут равнобокими. При $b=c$ равнобокими будут гиперболы в сечениях плоскостями $x=h$.

**4.** Пусть $\Phi_o$ – конус, заданный уравнением

$$\Phi_o: \; + - = 0.$$

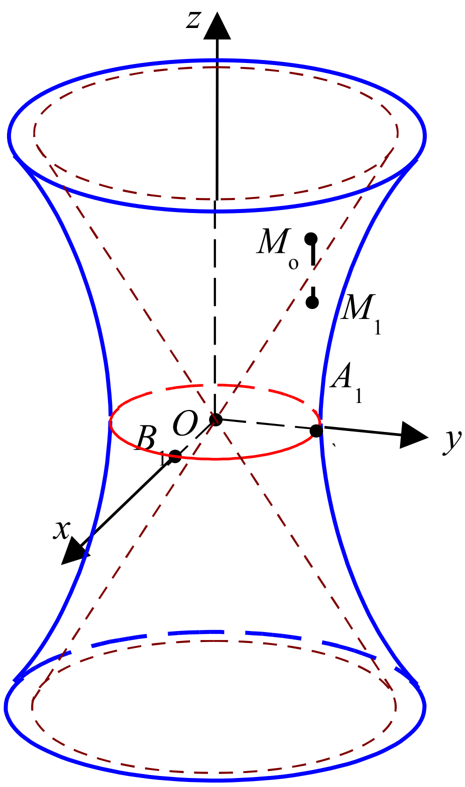
Пусть $M_o(x,y,z_o) \in \Phi_o$, $M_1(x,y,z_1) \in \Phi_1$, $M_2(x,y,z_2) \in \Phi_2$ – три точки с одинаковыми координатами $x$ и $y$, лежащие на конусе и на гиперболоидах. Тогда

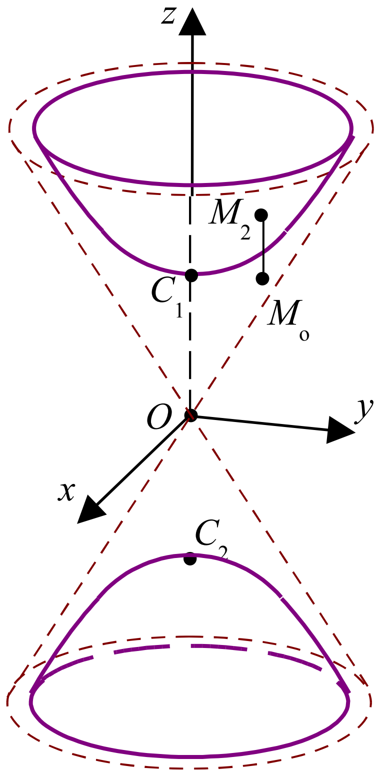
$$z_o^2 = c^2(\;+\;), \quad z_1^2 = c^2(\;+\;-1), \quad z_2^2 = c^2(\;+\;+1) \quad \Rightarrow$$

$|z_1^2| < |z_o^2| < |z_2^2|$ , а значит, $\Phi_1$ лежит снаружи конуса $\Phi_o$, а $\Phi_2$ – внутри. Кроме того, из тех же равенств следует $z_o^2 - z_1^2 = z_2^2 - z_o^2 = c^2$ $\Rightarrow$

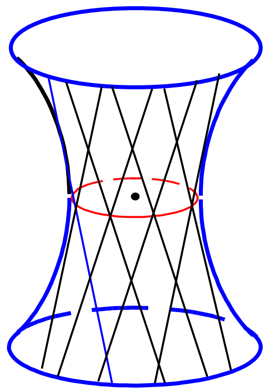
$$M_o M_1 = |z_o - z_1| = \; \to 0 \;\text{ и }\; M_2 M_o = |z_2 - z_o| = \; \to 0 \,,$$

когда точки $M_o$, $M_1$, $M_2$ уходят на бесконечность (необходимо при этом заметить, что $z_o$, $z_1$ и $z_2$ все стремятся к бесконечности при $x \to \infty$ или $y \to \infty$). Значит, оба гиперболоида асимптотически приближаются к конусу.




**5.** Мы уже видели, что в сечениях $\Phi_1$ плоскостями может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что $\Phi_1$ является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащая на поверхности.



## §6. *Эллиптический и гиперболический параболоиды.*

***Определение.*** *Эллиптическим и гиперболическим параболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$\Phi_3$: $+ = 2z$ (8) $\Phi_4$: $- = 2z.$ (9)

Исследуем их форму методом параллельных сечений. В сечениях плоскостями $z = h$ получаем соответственно кривые

$+ = 2h$ $- = 2h$ (*)

Обозначим $a'^2 = 2|\, h \,|\, a^2$, $b'^2 = 2|\, h \,|\, b^2$ .

При $h > 0$ получаем эллипсы

$+ = 1,$

полуоси которых возрастают при возрастании $h$, а при $h < 0$ получаем мнимые эллипсы

$+ = -1.$

При $h \neq 0$ получаем гиперболы

$- = \pm 1,$

(см. на рисунке $\gamma_4$), а при $h = 0$ из (∗) получаем уравнение, которое задает пару пересекающихся прямых

$- = 0.$

В сечениях плоскостями $y = h$ получаем для обеих поверхностей параболы

$x^2 = 2a^2(z - ).$ $x^2 = 2a^2(z + ).$

Причем параметр этих парабол одинаков для обеих поверхностей и не зависит от $h$: $p = a^2$. Таким образом, все параболы в сечениях равны друг другу и получаются одна из другой параллельным переносом. Вершины этих парабол имеют координаты

$(0, h, ).$ $(0, h, - ).$

Значит вершины при перемещении парабол описывают кривую в плоскости $Oyz$

$\gamma_2 : z = \ \Leftrightarrow\ y^2 = 2b^2 z$ $\gamma_2 : z = - \ \Leftrightarrow\ y^2 = -2b^2 z,$

т.е. параболу. Поэтому можем сказать, что оба параболоида получаются движением параболы $\gamma_1$, когда ее вершина скользит по параболе $\gamma_2$ (см. рисунки).

Аналогично, в сечениях параболоидов плоскостями $x = h$ получаем равные друг другу параболы, причем $\gamma_2$ тоже будет среди них; а вершины этих парабол описывают параболу $\gamma_1$: $x^2 = \pm 2b^2 z$ в плоскости $Oxz$ («+» для $\Phi_3$, «–» для $\Phi_4$).

*__Прочие геометрические свойства гиперболоидов__*.

**1.** Из уравнения (8) получаем, что $z \geq 0$, т.е. $\Phi_3$ целиком находится в полупространстве, которое определяется этим неравенством.

**2.** Координатные оси пересекают оба параболоида только в точке $O(0, 0, 0)$, которая называется вершиной.

**3.** Ось $Oz$ является осью симметрии параболоидов, а координатные плоскости $Oxz$ и $Oyz$ – плоскостями симметрии. Других симметрий у параболоидов нет.

**4.** При $a = b$ $\Phi_3$ будет поверхностью вращения, а гиперболы в сечениях $\Phi_4$ плоскостями $z = h$ будут равнобокими.

**5.** Мы уже видели, что в сечениях $\Phi_4$ плоскостями $z=h$ может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что $\Phi_1$ является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащая на поверхности.

## §7. *Классификация поверхностей второго порядка.*

***Определение.*** *Поверхностью второго порядка* называется геометрическое место точек пространства координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+c=0, \qquad (8)$$

где среди коэффициентов $a_{ij}$, $i,j=1,2,3$ есть хотя бы один ненулевой. Выражение в первой строке называется *квадратичной частью уравнения*, $c$ – *свободным членом*, остальное – *линейная часть*.

Квадратичная часть уравнения (8) представляет собой квадратичную форму. Её коэффициенты образуют матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

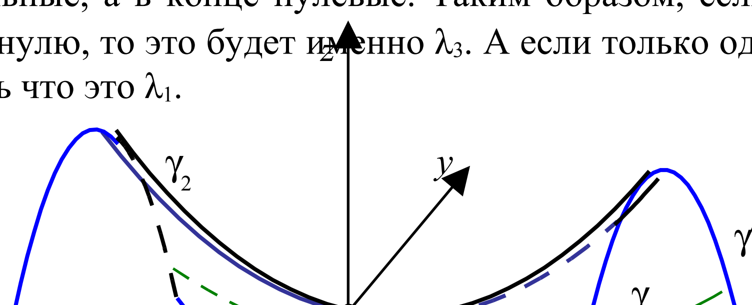
В курсе линейной алгебры доказывается, что матрицу любой квадратичной формы с помощью поворота координатных осей декартовой СК можно привести к диагональному виду

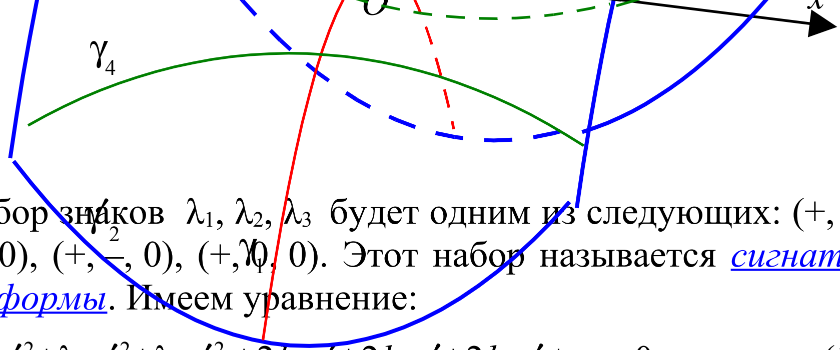
$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

Тогда в новой декартовой СК $Ox'y'z'$ с тем же началом квадратичная часть уравнения (8) примет к вид:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2, \qquad (9)$$

который тоже называется диагональным. При этом числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ не зависят от выбора новой декартовой СК $Ox'y'z'$. Т.е. если ещё в одной декартовой СК квадратичная часть уравнения имеет вид (9), то набор чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ будет тем же (может измениться только их порядок). Если количество отрицательных коэффициентов $\lambda_i$ больше, чем количество положительных, то мы во всём уравнении поверхности поменяем знаки. Затем мы выберем именно такой порядок обозначения координатных осей, что сначала будут следовать положительные $\lambda_i$, потом отрицательные, а в конце нулевые. Таким образом, если только одно из $\lambda_i$ равно нулю, то это будет именно $\lambda_3$. А если только одно $\lambda_i\neq 0$, то можем считать что это $\lambda_1$.






Тогда набор знаков $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будет одним из следующих: (+, +, +), (+, +, –), (+, +, 0), (+, –, 0), (+, 0, 0). Этот набор называется *сигнатурой квадратичной формы*. Имеем уравнение:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2 +2b_1x'+2b_2y'+2b_3z'+c=0 \qquad (10)$$

Далее, если все $\lambda_i \neq 0$ мы выделим полные квадраты

$$\lambda_1(x'^2+\ x'+\ )-\ +\lambda_2(y'^2+\ y'+\ )-\ +$$

$$+\lambda_3(z'^2+\ z'+\ )-\ +c=0,$$

$$\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+{}^2+c'=0.$$

Более подробно мы изучим эту процедуру выделения квадратов на практике. Затем делаем замену координат

$$x''=x'+\ ,\quad y''=y'+\ ,\quad z''=z'+\ ,$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'(-\ ,-\ ,-\ )$. Получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2=-c'.$$

Затем делим уравнение на $|c'|$, если $c'\neq 0$. Тогда в правой части уравнения останется 1, –1 или 0. Мы получим одно из уравнений 1 – 6 (см.таблицу ниже).

Если $\lambda_3=0$, то мы не можем выделить полный квадрат по $z'$, но тогда преобразуем выражение $2b_3z'+c'$ так: $2b_3(z'+c'/2b_3)$, и третья координата также будет участвовать в переносе начала координат в виде $z''=z'+c'/2b_3$. В этом случае в уравнении остается слагаемое $2b_3z''$, но не остается свободного члена и слагаемого, содержащего $(z'')^2$:

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-2b_3z''.$$

Мы разделим уравнение на $|b_3|$ и получим одно из уравнений вида 7, 8 (см.таблицу ниже). Если при этом справа получится не $2z''$, а $-2z''$, то это будет всё равно та же поверхность, только ориентированная по-другому относительно координатных осей.

Если $\lambda_3=0$ и $b_3=0$, то мы получим уравнение вида

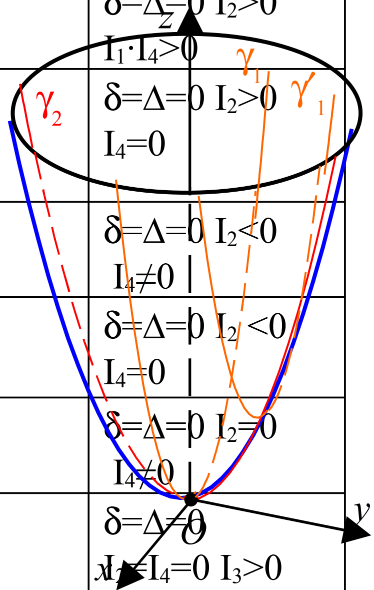
$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-c',$$

которое даст нам одну из поверхностей 9 – 13 из списка.

Аналогично рассматривается и случай $\lambda_2=\lambda_3=0$. Итак, мы показали, что уравнение (8) мы можем привести к одному из следующих:

| Поверхность | Её каноническое уравнение | Инварианты |
|---|---|---|
| 1. Эллипсоид | $+\ +\ =1,$ | $\delta>0$ $\Delta<0$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2. Мнимый эллипсоид (∅) | + + =–1, | δ>0 Δ>0 |
| 3. Мнимый конус (точка) | + + =0, | δ>0 Δ=0 |
| 4. Двуполостной гиперболоид | + − =–1, | δ<0 Δ<0 |
| 5. Однополосной гиперболоид | + − =1, | δ<0 Δ>0 |
| 6. Конус | + − =0, | δ<0 Δ=0 |
| 7. Эллиптический параболоид | + = 2*z*, | δ=0 Δ<0 |
| 8. Гиперболический параболоид | − =2*z*, | δ=0 Δ>0 |
| 9. Эллиптический цилиндр | + =1, | δ=Δ=0 $I_2>0$ $I_1 \cdot I_4<0$ |
| 10. Мнимый эллиптический цилиндр | + =–1, | δ=Δ=0 $I_2>0$ $I_1 \cdot I_4>0$ |
| 11. Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой | + =0, | δ=Δ=0 $I_2>0$ $I_4=0$ |
| 12. Гиперболический цилиндр | – =1, | δ=Δ=0 $I_2<0$ $I_4\neq0$ |
| 13. Пара пересекающихся плоскостей | – =0, | δ=Δ=0 $I_2<0$ $I_4=0$ |
| 14. Параболический цилиндр | $x^2 = 2py$ | δ=Δ=0 $I_2=0$ $I_4\neq0$ |
| 15. Пара параллельных плоскостей | $x^2=a^2$ | δ=Δ=0 $I_2=I_4=0$ $I_3>0$ |
| 16. Пара совпадающих плоскостей | $x^2=0$ | δ=Δ=0 $I_2=I_4=0$ $I_3=0$ |
| 17. Пара мнимых параллельных плоскостей | $x^2=-a^2$ | δ=Δ=0 $I_2=I_4=0$ $I_3<0$ |




Здесь мы использовали инварианты:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ & & & \end{vmatrix}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad c$

$\mathrm{I}_1 = \mathrm{trace}\,\delta = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$\mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров второго порядка в $\delta$

$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & c \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров второго порядка из $\Delta$, не входящих в $\delta$.

$\mathrm{I}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & c \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров третьего порядка в $\Delta$, кроме $\delta$

***Теорема.*** *Величины* $\delta$, $\Delta$, $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$ *не изменяются при любых преобразованиях декартовой* СК, $\mathrm{I}_3$ , $\mathrm{I}_4$ *не изменяются при повороте координатных осей, но меняются при переносе начала координат* (без доказательства).

Поэтому эти величины называют *инвариантами поверхности второго порядка*. Вычислив эти инварианты мы можем определить тип поверхности, не упрощая ее уравнения. Однако так мы не сможем определить положение поверхности в пространстве и величины полуосей.

## §8. *Примеры решения задач*

**1**. *С помощью переноса начала координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

$$4x^2+z^2-24x+8y+2z+5=0.$$

***Решение.*** Выделим в уравнении полные квадраты:

$$4(x^2-6x+9)-36+(z^2+2z+1)-1+8y+5=0,$$

$$4(x-3)^2+(z+1)^2+8y-32=0,$$

$$4(x-3)^2+(z+1)^2=-8(y-4).$$

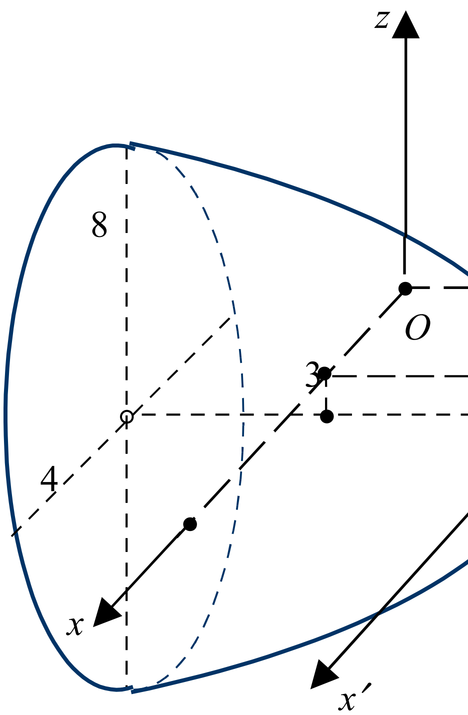
Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y-4, \\ z'=z+1, \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,\ 4,–1)$. После замены получаем уравнение

$$4x'^2+z'^2=-8y', \quad \Leftrightarrow \qquad (x')^2+\ =-8y',$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, ось которого будет $O'y'$. В сечении плоскостью $y'=-8$ получится эллипс $+\ =1$ с полуосями 4 и 8. Это следует учесть при изображении.




**2.** *Определите, какое множество определяется в декартовой системе координат неравенством*

$$(x-3)-4(y+4)^2 \geq 0.$$

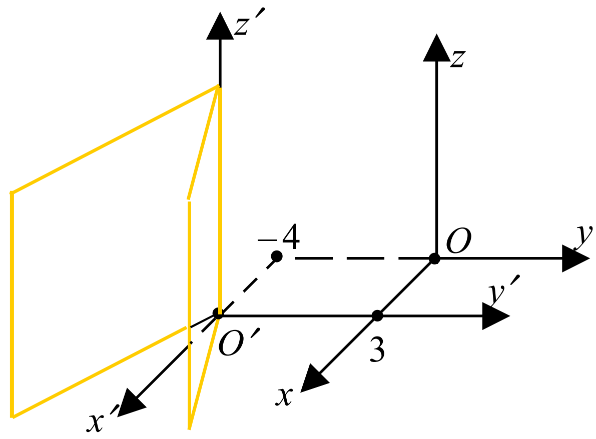
*Изобразите это множество.*

***Решение.*** Определим сначала, какое множество определяется уравнением $(x-3)-4(y+4)^2=0$. Делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x-3, \\ y' = y+4, \\ z' = z. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-4,0)$. В новой системе координат $O'x'y'z'$ получаем, что поверхность задается уравнением

$$(x')^2 - 4(y')^2 = 0. \qquad (*)$$




Поскольку в уравнении отсутствует координата $z'$, то мы сразу делаем вывод, что наша поверхность является цилиндрической и ее образующие параллельны оси $O'z'$. На плоскости $O'x'y'$ уравнение $(*)$ задает пару пересекающихся прямых

$$(x'-2y')(x'+2y')=0.$$

Эта кривая 2 порядка будет направляющей для нашей поверхности. Значит, наша поверхность – это пара пересекающихся плоскостей. Для того, чтобы не загромождать изображение мы нарисовали только небольшую часть этой поверхности. Поскольку изначально у нас было неравенство, то искомое множество – это внутренность одной из двух пар вертикальных углов, образуемых этими плоскостями. Мы возьмем любую точку на оси $O'x'$: $A(a,0,0)_{O'x'y'z'}$ и убедимся, что ее координаты удовлетворяют неравенству $(x')^2 - 4(y')^2 \geq 0$. Значит, ось $O'x'$ лежит в нашем множестве. Таким образом, исходное неравенство задает внутренность изображенного двугранного угла и угла, вертикального с ним. А т.к. неравенство нестрогое, то и сами плоскости тоже принадлежат множеству.

**3.** *Составить уравнение поверхности, полученной вращением кривой*

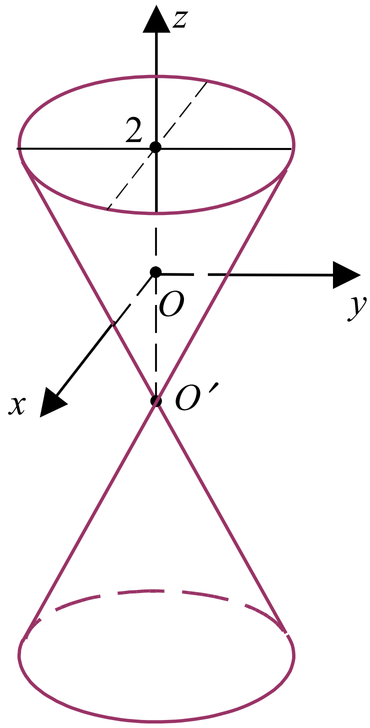
$$\begin{cases} z=2y-2, \\ x=0. \end{cases}$$

*вокруг оси* а) $Oz$ , б) $Oy$. *Определить тип поверхности. Изобразите ее.*

***Решение.*** Данная система уравнений задает прямую $l$ , лежащую в плоскости $Oyz$. Первое из уравнений – это уравнение $l$ в данной плоскости. Для того, чтобы составить уравнение поверхности Ф, получающейся вращением $l$ вокруг $Oz$ , мы должны в уравнении $l$ оставить $z$ без изменения, а $y$ заменить на квадратный корень из суммы квадратов оставшихся координат: $y$ ▯ . Получаем уравнение

$$z=2\quad-2, \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-\quad=0.$$

Данное уравнение определяет конус, ось которого – $Oz$ , а вершина находится в точке $O'(0,0,-2)$.




Строим изображение данного конуса.

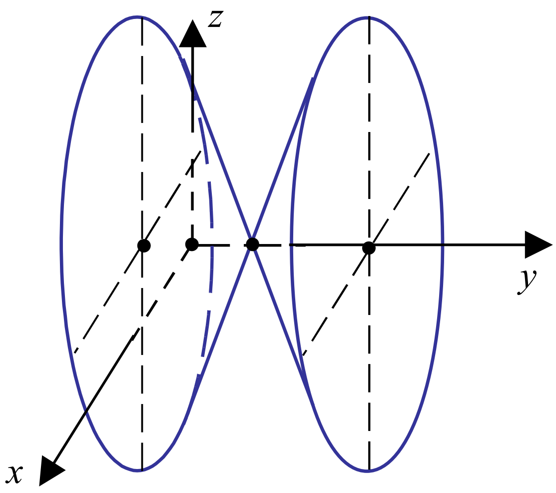
1) Подставив в уравнение конуса $z=2$, получим $x^2+y^2=4$. Значит, в сечении плоскостью $z=2$ получается окружность радиуса 2. Проводим через точку $z=2$ на оси $Oz$ вспомогательные линии, параллельно осям $Ox$ и $Oy$; откладываем на них от данной точки отрезки длины 2 и через получившиеся точки проводим эллипс, изображающий окружность. При этом, масштаб по оси $Ox$ выбираем в два раза меньше, чем по осям $Oy$ и $Oz$.
2) Строим эллипс равный данному с центром в точке $z=-6$ на оси $Oz$.
3) Проводим касательные к эллипсам через точку $O'$. *Подчеркнем, что точки касания ни в коем случае не совпадают с вершинами эллипса*.
4) Часть нижнего эллипса, заключенную между точками касания изображаем пунктиром.

Аналогично, для того чтобы получить уравнение поверхности вращения вокруг $Oy$ , мы в уравнении $l$ оставляем $y$ без изменения, а $z$ заменяем: $z$ ▯ . Получаем уравнение

$$x^2-4(y-1)^2+z^2=0,$$

$$-(y-1)^2+\quad=0.$$

Оно задает конус, вершина которого находится в точке $O'(0,1,0)$ , а ось конуса – $Oy$. Эту поверхность тоже следует изобразить. При этом, учитываем, что в сечении плоскостью $y = 3$ получается окружность радиуса 4.




**4.** *Является ли поверхность заданная уравнением*

$$-x^2+\quad+\quad=1$$

*поверхностью вращения? Если да, то вращением какой кривой (написать уравнение) вокруг какой оси она получена? Изобразите ее.*

***Решение.*** Данная поверхность – это однополостной гиперболоид. В уравнении поверхности можно выделить выражение :

$$-x^2+\quad=1,$$

и больше нигде в уравнении $x$ и $z$ не встречаются. Поэтому сразу делаем вывод, что это уравнение задает поверхность вращения вокруг $Oy$. Для того, чтобы определить, какая кривая $\gamma$ вращается, мы заменяем на $y$ и получаем уравнение $-x^2+\quad=1$ кривой, которая лежит в плоскости $z=0$. Для того, чтобы задать эту кривую в пространстве, мы должны написать систему уравнений

$$\begin{cases} -x^2+\quad=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Можем заменить на $z$ , и тогда получим уравнение кривой $\gamma'$, лежащей в плоскости $y=0$:

$$\begin{cases} -x^2+\quad=1, \\ y=0. \end{cases}$$

**5.** *Составьте уравнение поверхности, каждая точка которой равноудалена от плоскости* $x = -a$ *и от точки* $F(a, 0, 0)$.

***Решение.*** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка поверхности. Тогда

$$|MF| = ,$$

а расстояние от $M$ до плоскости равно $|x + a|$. По условию

$$= |x + a|.$$

Возводим это равенство в квадрат:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 + z^2 = 4ax \quad \Leftrightarrow \quad + \;= 2ax.$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, осью которого является $Ox$.

**6.** *Найдите точки пересечения эллипсоида* $+ \; + = 1$ *и прямой* $=$ $=$ .

***Решение.*** Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = -6 + 12t. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение эллипсоида:

$$+ \; + = 1,$$

$$1 + 2t + t^2 + 4 - 12t + 9t^2 + 4 - 16t + 16t^2 = 9,$$

$$26t^2 - 26t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 26t(t - 1) = 0.$$

Имеем два решения: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Подставляя их в уравнение прямой, находим две точки $M_1(1, 4, -6)$, $M_2(2, -2, 6)$.

***Ответ*:** $M_1(1, 4, -6)$, $M_2(2, -2, 6)$.

**7.** *Определить, какая кривая получается в сечении поверхности* $+ \; - = 1$ *плоскостью* **а)** $y = 2z$; **б)** $y = 2z + 2$.

***Решение.*** **а)** Данная поверхность – это однополостной гиперболоид. Подставим $y = 2z$ в уравнение поверхности:

$$+ \; - = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость $Oxz$. Оно задает пару параллельных прямых. Следовательно, наша кривая – это тоже пара параллельных прямых.

**б)** Подставим $y = 2z + 4$ в уравнение поверхности:

$$+ \; - = 1 \quad \Leftrightarrow \quad + \; = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9z.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость $Oxz$. Оно задает параболу. Следовательно, наша кривая – это тоже парабола.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## §1. *Матрицы и определители.*

*Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в которых находится данный элемент. Например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер 2×4. В ней $a_{11}= 1$, $a_{12}= 2$, а $a_{21}= 6$. Матрица размера $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка $n$.

Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*).

Понятие *определитель* вводится только для квадратных матриц. Определитель матрицы $A$ обозначается $\det\boldsymbol{A}$. Если вместо круглых скобок вокруг матрицы мы поставим прямые палочки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Обозначим $M_{ij}$ – это определитель матрицы, которая получается из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца. Он называется *минором, дополнительным к элементу* $a_{ij}$. Тогда определитель матрицы порядка 3 можно вычислить с помощью разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

*Пример*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0.$$

*Свойства определителя*.

**1.** Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

**2.** Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

**3.** При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

**4.** Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трём. Поэтому мы можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Вычтем в нашем примере из второй и третьей строки первую строку (сама первая строка при этом остается на своем месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 9 = -27$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому её определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

## §2. *Правило Крамера.*

Пусть дана система линейных уравнений, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \, . \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{ij}$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1$, $b_2$, $b_3$ – *свободными членами*. Коэффициенты системы образуют матрицу $A$, а свободные члены – столбец $B$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det \boldsymbol{A}$, а $\Delta_i$ – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой $i$-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема*. (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (1) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \quad , \; x_2 = \quad , \; x_3 = \quad .$$

Эта теорема верна и для систем, состоящих произвольного числа $n$ уравнений и неизвестных.

***Пример.*** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

***Решение.***

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \; = \; = -3, \quad x_2 = \; = \; = 2.$$

<u>*Ответ*</u>: $(-3, 2)$.

## *Используемые сокращения*

СК – система координат

КС – коническое сечение

## *Алфавитный указатель*

## *Литература*


1. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. М.:Наука,1978
2. Погорелов А.В. Геометрия. М.: Наука, 1984.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.I. М.:Просвещение, 1986.
4. Базылев В.Т., Дуничев К.И. и др. Геометрия. Ч.I. М.: Просвещение, 1974
5. Атанасян Л.С. Геометрия. Ч.I. М.: Просвещение, 1973
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981.
7. Постников М.М. Аналитическая геометрия. М.:Наука, 1973.
8. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I: Аналитическая геометрия. М.:Наука, 1986.
9. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М.: Наука, 1990.
10. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Алгебра и геометрия. Минск: Вышэйшая школа,1989
11. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии. М.:Просвещение, 1980.
12. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. Ч.1. М.: Просвещение, 1973.
13. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Под ред. Феденко А.С. Минск: Изд-во Университетское, 1989, 1999.
14. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987
15. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.:Наука, 1965
16. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986
17. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Мн.: «Вышейшая школа», 1976
18. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1969

**1. Задание**

**1.** Найти произведения матриц $AB, BA, BC, CB, AC, CA$, если они определены.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$.

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

17. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$.

22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$.

23. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$.

24. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

26. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

27. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T$.

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

29. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad C \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T$.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}^T$.

**2.** Найти значение многочлена $f(C)$ от матрицы $C$, если $C = AB$.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $f(x) = 3x^3 - 4$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x) = 2x^2 + 3$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad B = E$.

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $f(x) = -2x^2 + 5$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad B = E$.

7. $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$, $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $f(x) = -3x^2 + 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

11. $f(x) = 3x^2 - x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

12. $f(x) = -5x^2 + 2x - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $f(x) = 4x^2 - x - 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $f(x) = -2x^2 + 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

15. $f(x) = -x^2 + 2x - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

16. $f(x) = 2x^2 + x + 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $f(x) = 2x^3 - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

18. $f(x) = -3x^2 + x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

19. $f(x) = 3x^2 - 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

20. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

21. $f(x) = 3x^3 - 5$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $f(x) = 5x^2 - x + 3$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

24. $f(x) = -3x^2 - 2$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\qquad B = E$.

25. $f(x) = -x^2 + 2x - 5$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

27. $f(x) = 4x^2 + x - 3$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $f(x) = 4x^2 - x - 2$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

29. $f(x) = 4x^2 - 1$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\qquad B = E$.

30. $f(x) = 4x^2 + 2x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

### 2. Задание

Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду и методом понижения порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$ 17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$ 21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

**3. Задание**

Найти матрицу, обратную данной, если она существует, двумя способами:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
19. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
24. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
25. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
26. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
28. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
29. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**4. Задание**

Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \\ 6 & -3 & 17 & -38 & 23 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 & -6 \\ 4 & 3 & -9 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & 8 & -7 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -10 & -15 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

**Варианты индивидуальных заданий**

**Вариант 1**

1. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество $\mathbb{C}^{2\times 2}$ всех комплексных матриц второго порядка.

2. Образуют ли базис в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матвиц второго порядка элементы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и если образуют, то найти в указанном базисе координаты элемента

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \mathrm{tr} XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису $\mathbf{e_1} = (1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{e_2} = (0,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{e_3} = (2,\ -1,\ 0)$ построить ортонормированный базис.

6. Найти длину вектора $\mathbf{x} = (1,\ i)$ с заданным скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (1,\ -i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (1,\ -1)$.

**Вариант 2**

1. Является ли множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов $1+3x+5x^2,\ 2x+6x^2,\ 1+x+x^2$, и если образует, то найти в указанном базисе координаты элемента $1+x+3x^2$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1x_2y_1y_2$;

б) $3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2$?

5. Является ли ортогональным базисом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

а) $(0,\ 1,\ 0),\ (-6,\ 0,\ 4)$;

б) $(2,\ 1, 4),\ (3,\ 0,\ 5)$;

в) $(-1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 5,\ 0),\ (0,\ 0,\ 9)$;

г) $(1,\ 1,\ 3),\ (-1,\ -2,\ 1),\ (7,\ -4,\ -1)$.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1,\ i),\ (2i,\ 1),\ \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ i)$.

**Вариант 3**

1. Является ли множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3) | a_i \in \mathbb{R})\}$ данная система векторов:

а) $(1,\ 2, 7),\ (0,\ 3,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)$;

б) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0)$;

в) $(3,\ 0,\ 5),\ (1,\ 2, 1)$;

г) $(1,\ 2, 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (-1,\ 7,\ 2),\ (3,\ 4,\ 6)$.

3. В пространстве $V_3$ найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к базису:

а) $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ -\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{j},\ \mathbf{i},\ \mathbf{k}$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x = \alpha_1 + \beta_1 i;\ y = \alpha_2 + \beta_2 i$ поставлено в соответствие число $\beta_1 \cdot \beta_2$?

5. Установить, образуют ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(-1,\ 3),\ (6,\ 2),\ n = 2$;

б) $(5,\ 1),\ (3,\ -1),\ n = 2$;

в) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 7,\ 0),\ (0,\ 0,\ 2),\ n = 3$;

г) $(0,\ 0,\ 0,\ 5),\ (0,\ 0{,}1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 0),\ n = 4$;

д) $(-2,\ 3,\ 0,\ 0),\ (3,\ 2,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 2{,}5,\ 0),\ n = 4$.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1+i,\ i),\ (1,\ 1-i),\ \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$.

7. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ 3,\ -1,\ 1)$.

**Вариант 4**

1. Является ли множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij})(a_{ij} \in \mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ к базису $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x = \alpha_1 + \beta_1 i;\ y = \alpha_2 + \beta_2 i$ поставлено в соответствие число $(\alpha_1 + \beta_1 i)(\overline{\alpha_2 + \beta_2 i}) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 0)$, $\mathbf{g}_2 = (-1,\ 1,\ 1,\ 3)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(1+i,\ 3),\ (1+2i,\ 6+2i),\ \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - \qquad 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 5**

1. Является ли множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij}), (a_{ij} \in \mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. В пространстве $P_2(x)$ найти матрицу перехода от базиса $x^2, \ x, \ 1,$ к базису $(x+1)^2, \ (x+1), \ 1$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1, \ 2, \ 1, \ 2)$, $\mathbf{g}_2 = (1, \ 1, \ -1, \ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама $\Gamma$ этого базиса: $(i, \ 2), \ (1+i, \ 3), \ \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (2+i, \ 0, \ 2-i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (-1, \ i, \ 1+i)$.

**Вариант 6**

1. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

а) множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$;

б) множество функций, неотрицательных на $[a, b]$.

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов:

а) $1,\ x,\ x^2$; б) $3,\ x-2,\ x+1$; в) $1,\ (x-2),\ (x-2)^2$;
г) $3x+3,\ x^2-1,\ x^2+3x+2$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ к базису $\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число:

а) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$; б) $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$?

5. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-1, 1]$ ( операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$:
а) $1,\ x^2$; б) $x^2,\ x^3$; в) $1,\ \sin \pi x,\ \cos \pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x, \ldots,\ \sin n\pi x,\ \cos n\pi x$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(i,\ 1,\ 1+i)$.

**Вариант 7**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами:

а) степени не выше $n$; б) степени $n$; в) степени выше $n$?

2. Выяснить, является ли базисом система элементов в линейном пространстве $P_n(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше $n$:

а) $2x+3,\ x-1,\ n=1$; б) $x^3 - 2x^2 + 2,\ x^2+5,\ 5,\ n=3$?

3. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора:
а) $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; б) $\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

4. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где $k \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, если каждой паре функций $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$ поставлено в соответствие число

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(a_m \cos mx + b_m \sin mx)dx?$$

5. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n=5$;

б) $(1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n=5$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-1,\ 1+i)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ i,\ 1)$, $(i,\ 1,\ 0)$.

**Вариант 8**

1. Является ли множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц размеров $m\times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ -1)^T$, $\mathbf{b} = (1\ -1)^T$, $\mathbf{c} = (1\ -1)^T$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Пусть $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – базис $n$-мерного линейного комплексного пространства. Является ли данное пространство унитарным, если каждой паре векторов $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n$ этого пространства поставлено в соответствие число $\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3)$; $\mathbf{g_2} = (0,\ 3,\ -2)$; $\mathbf{g_3} = (0,\ 1,\ -1)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти:

а) длину вектора $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$;

б) скалярное произведение векторов $(i,\ i,\ i, \ldots,\ i)$ и $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 \qquad\qquad = 0, \\ x_1 - 3x_2 - \qquad\quad 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 9**

1. Пусть $\mathbb{R}^{1\times 2}$- множество всех вещественных матриц вида $(a_1\ a_2)$. Является ли это множество вещественным линейным пространством, если операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством: $\alpha(a_1\ , a_2) = (a_1\ \alpha a_2)$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов $(1-t)^3,\ t^3,\ 1,\ t+t^2$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_2,\ \mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;

б) $9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{g_2} = (0,\ 2,\ 0),\ \mathbf{g_3} = (0,\ 0,\ 3)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением выяснить, являются ли ортогональными векторы:

а) $(i,\ 2,\ i),\ (i,\ -1,\ i)$;

б) $(1-i,\ 2,\ i),\ (3,\ 2-i,\ i)$;

в) $(3+i,\ 2,\ i),\ (-3+5i,\ 18,\ 11)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (2+i,\ i,\ 2-i)$ на линейную оболочку векторов $\mathbf{a}_1 = (1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (i,\ 0,\ -i)$.

**Вариант 10**

1. Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество положительных чисел, в котором операция сложения определена равенством $x + y = xy$, а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством $\alpha x = x^\alpha$. Является ли множество $\mathbb{R}^+$ с указанными операциями вещественным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ \ -1)^T,\ \mathbf{b} = (-1\ 1)^T,\ \mathbf{c} = (2\ \ -2)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\ \mathbf{x} = \mathbf{e}'_1 - 3\mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $2x_1y_1 + 3x_2y_2$, а)$n = 2$, б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 0,\ 0),\ \ \mathbf{g}_2 = (0,\ 1,\ -1),\ \ \mathbf{g}_3 = (1,\ 1,\ 1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\ |\mathbf{a}|,\ |\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = i\mathbf{e}_1 + (i-1)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (3+i)\mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора
$\mathbf{x} = (1+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов
$\mathbf{a}_1 = (-1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (1+i,\ 1-i,\ 0)$.

**Вариант 11**

1. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

а) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

б) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой.

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (-3\ \ 2\ \ 0)^T,\ \mathbf{b} = (-3\ \ 6\ \ -15)^T,\ \mathbf{c} = (0\ \ -4\ \ 15)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_2,\ \ \mathbf{x} = 2\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i),\ (1,\ 1)$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти:

а) длину элемента $\cos x + \sin x$;

б) скалярное произведение элементов $\sin 2x,\ \sin 3x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора
$\mathbf{x} = (-2+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов
$\mathbf{a}_1 = (1,\ -2,\ i),\ \mathbf{a}_2 = (1,\ 0,\ 3i)$.

**Вариант 12**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество:

а) геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}| > a$, где $a$ – фиксированное число;

б) векторов трехмерного пространства,перпендикулярных данной прямой?

2. Выяснить, является ли базисом данная система векторов в пространстве $V_3$:

а) $\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{k}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1, 1, 0, 0), \ \mathbf{g}_2 = (0, 0, 1, 1), \ \mathbf{g}_3 = (1, 0, 1, 1), \ \mathbf{g}_4 = (0, 1, 0, -1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \ |\mathbf{a}|, \ |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4 + i)\mathbf{e}_2, \ \mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3 - i)\mathbf{e}_2, \ |\mathbf{e}_1| = 2, \ |\mathbf{e}_2| = 3$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений: $x_1 + ix_2 = 0$.

**Вариант 13**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество решений системы линейных однородных уравнений?

2. Доказать, что многочлены $2t + t^5, \ t^3 - t^5, \ t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше пятой, и найти координатный столбец многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный:

$\mathbf{g}_1 = (1, 0, 1, 2), \ \mathbf{g}_2 = (-1, 0, -1, 0), \ \mathbf{g}_3 = (0, 0, 2, 1), \ \mathbf{g}_4 = (0, 1, 1, 1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2}$, $|\mathbf{e}_2| = 1$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - \phantom{2x_2 -{}} x_3 + \phantom{8}x_4 & = & 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 & = & 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

**Вариант 14**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$;

б) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$?

2. Найти координаты каждого из указанных элементов пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в базисе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:
а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:
а) $x_1\bar{y}_2$;
б) $(3+i)x_1\bar{y}_2 + (3-i)x_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$ ($(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$), по данному базису $g_1 = 1$, $g_2 = x$ построить ортонормированный.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 - (3+4i)\mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = 3i\mathbf{e}_1 + (i-2)\mathbf{e}_2$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (1, -2, 3, -4)$.

**Вариант 15**

1. Является ли комплексным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами:

а) степени не выше $n$; б) степени $n$; в) степени выше $n$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ 2\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (1\ 0\ 1\ 3)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$, а)$n = 2$, б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве $V_3$ даны два ортогональных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ такой, при котором векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют ортогональный базис, если: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти угол между элементами $\sin x$ и $\cos x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ -ix_1 + (2+i)x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 16**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных функций, непрерывных во всех точках [a,b] числовой оси, кроме $x_0 \in [a, b]$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ 1\ 1\ 1)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (3\ -5\ 7\ 2)^T,\ \mathbf{d} = (1\ -7\ 5\ -2)^T$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным расположениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = 7\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$;

б) $x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметическо-

го пространства со стандартным скалярным произведением: $(2-i,\ i)$, $(4-i,\ 2-3i)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1| = 3$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 4$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (8,\ -2,\ 8,\ 3)$.

**Вариант 17**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

$$\text{а)}\ L = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \middle| \, d_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n};$$

$$\text{б)}\ L = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \middle| \, d_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}?$$

2. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис, найти координаты вектора $\mathbf{c} = \mathbf{2e_1} - \mathbf{4e_2}$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$;

б) $5x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i,\ 1)$, $(2-i,\ i-1,\ 2)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $|\mathbf{e}_3| = 3$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 & = & 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 \qquad\quad & = & 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (2,\ 3,\ -1,\ -2)$.

**Вариант 18**

1. Является ли вещественным линейным пространством множество

а) всех сходящихся последовательностей;

б) всех расходящихся последовательностей?

2. Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $b = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{d} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$;

б) $x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ 2,\ 0)$,
$\mathbf{g}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), |\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4+i)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3-i)\mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$.

7. Линейное подпространство $L$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на $L$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно $L$ вектора $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ -2,\ 3)$.

**Вариант 19**

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 1$; б) $2f(0) - 3f(1) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства вещественных матриц $\mathbb{R}^{3\times 2}$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$
$\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}_3 = 4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X,Y) = \mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $(1,\ i,\ 1,\ i)$, $(1,\ i,\ 1,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2,\ |\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2},\ |\mathbf{e}_2| = 1.$

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (10\quad -20\quad 10)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(0\ 1\ 0)^T$.

**Вариант 20**

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 0$; б)$f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства многочленов степени не выше четвертой $P_4(x)$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ к базису
$(x-1)^2,\ x-1,\ 1$ в пространстве многочленов $P_2(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X,Y) = \det XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а

в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В унитарном пространстве $\mathbb{C}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ i),\ \mathbf{g}_2 = (i,\ 1,\ 1),\ \mathbf{g}_3 = (1,\ i,\ 1)$.

6. Обозначим через $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ и $a_{22}$, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $F(x, y) = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + a_{21}x_2\bar{y}_1 + a_{22}x_2\bar{y}_2$ задавала унитарное скалярное произведение.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой вектора, заданного в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (4\ 3\ 2\ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)^T$.

**Вариант 21**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством: $L = \{f(x) \mid\ |f(x)| \leq 3\} \subset F_{[a,b]}$,
где $F_{[a,b]}$ – множество всех вещественных функций, область определения которых – отрезок $[a, b]$.

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 1)$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ 2x - 3$ к базису $x + 1,\ x$ в пространстве многочленов $P_1(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T D Y$ ($D$ – диагональная матрица порядка $n$ с положительными элементами на главной диагонали). Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1 + i,\ 2 + i,\ 1 - i),\ (-2,\ 4 + i,\ 1 - i),\ (1,\ 2 + i,\ 2 - i)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0),\ \mathbf{f}_2 = (1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпростран-

ства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 & = & 0, \\ (1+i)x_1 + \quad 3x_2 + ix_3 & = & 0, \\ -ix_2 + \ x_3 & = & 0. \end{cases}$$

**Вариант 22**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \left\{\alpha + \ln(x^2+1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$;

б) $L = \left\{\ln(x^2+1)^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$?

2. Систему многочленов $t^5+t^4,\ t^5-3t^3,\ t^5+2t^2,\ t^5-t$ дополнить до базиса пространства $P_5(t)$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. Найти координаты $\mathbf{e}_2'$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и координаты $\mathbf{e}_1$ в базисе $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X,Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1,\ i,\ 1),\ (i,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1/2,\ 1/2),\ \mathbf{f}_2 = (-1/2,\ 1/2)$.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 0)^T,\ \mathbf{a}_2 = (2\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ 0\ \ 2\ \ -2)^T$.

**Вариант 23**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ |a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. Проверить, образуют ли элементы $\mathbf{e}_1 = (2, 2, -1), \mathbf{e}_2 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, 2)$ базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, и если образуют, найти координаты элемента $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X\bar{Y}^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/\sqrt{3}\,(1,\ -1,\ 0,\ 1),\ 1/\sqrt{3}\,(1,\ 1,\ -1,\ 0)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T,\ \mathbf{y}_e = (0\ 1)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ . Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ -ix_1 + 2x_2 + (-1-i)x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6ix_2 + (3-3i)x_3 = 0. \end{cases}$$

**Вариант 24**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_i > 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_1 + a_2 + a_3 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 2, 1)$.

3. Какая из данных матриц может быть матрицей перехода от одного базиса к другому и объяснить почему: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка $n$ ($n \geq 2$) задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} \bar{X} Y^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/2\,(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $1/2\,(1,\ -1,\ 1,\ -1)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T$, $\mathbf{y}_e = (1\ 3)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ . Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ -i,\ 3)$, $(2i,\ 2,\ 6i)$, $(1-i,\ -1-i,\ 3-3i)$.

**Вариант 25**

1. Является ли подмножество $L$ элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

б) $L = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

в) $L = \{a \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$?

2. Определить является ли система элементов $1,\ t + 1,\ t^2 + 1,\ t^3 + 1,$ $t^4 + 1,\ t^5 + 1$ базисом в пространстве $P_5(t)$, и если является, то найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = -4\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

4. Пусть $x_1, x_2$ и $y_1, y_2$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе вещественного линейного двумерного пространства. Найти условия на вещественные коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ и $a_{22}$, необходимые и достаточные для

того, чтобы функция $F(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$ задавала евклидово скалярное произведение.

5. Ортогональную систему векторов $(1,\ 1,\ i,\ i)$, $(1,\ -1,\ i,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортогонального базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ \ i)^T$, $\mathbf{y}_e = (1+i\ \ 2)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ . Вычислить матрицу Грама $\Gamma_e$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = -3i\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$.

7. Подпространство $L$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1\ 4\ \ -1\ 0)^T$. Найти ортогональную проекцию на $L$ и ортогональную составляющую относительно $L$ вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(2\ 1\ 1\ 0)^T$.

**Задание**

**1.** Выяснить, какие из преобразований трехмерного арифметического пространства $\mathbb{R}_3$ являются линейными. Для линейных преобразований найти:

а) матрицу в каноническом базисе;

б) дефект;

в) образ, ядро, а также построить базисы образа и ядра.

Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$; при этом компоненты векторов $\varphi(x), f(x)$ заданы как функции компонент вектора $x$.

1. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + x_1,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.
2. $f(x) = (x_1 - x_2 + 1,\ 3x_1 + x_2,\ x_3)$,
   $\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ x_3 - x_1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.
3. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.
4. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.
5. $f(x) = (x_1 - x_2,\ x_3 - x_2,\ 2x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.
6. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.
7. $f(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3^2,\ x_3 - x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_2,\ -x_1 + x_3, -3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
8. $f(x) = (x_2 - x_3,\ x_3 - x_1,\ -x_3 + 2x_2 + x_1)$,
   $\varphi(x) = (x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 3,\ x_1 + x_2)$.
9. $f(x) = (2x_1 - 1,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (-x_1,\ 3x_1 + x_2 + x_3,\ x_3 + x_2)$.
10. $f(x) = (3x_1 - 3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$,
    $\varphi(x) = (2x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_2 - x_3)$.
11. $f(x) = (2x_1 - x_2,\ x_3 - x_1,\ -x_2 + 2x_3)$,
    $\varphi(x) = (3x_1 + x_2,\ x_2^2 + x_3,\ x_3 - x_1)$.

12. $f(x) = ((x_2 - x_1)^2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_1)$,
$\varphi(x) = (5x_1 - x_2,\ -x_2 + x_3,\ 5x_1 + x_2 - 2x_3)$.

13. $f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3 + x_1,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.

14. $f(x) = (x_1 - 2x_2,\ x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 - 3x_3,\ x_2 - x_3\ x_3 - 2)$.

15. $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.

16. $f(x) = (x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2,\ 3x_2 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.

17. $f(x) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1)$,
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

18. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3,\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3)$,
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

19. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - x_3,\ -x_1 + 2x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.

20. $f(x) = (-2x_1 - 3x_3,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1 + x_2)$,
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 + 1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

21. $f(x) = (2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3 - 1,\ x_1 + 2x_2)$.

22. $f(x) = (-x_1 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.

23. $f(x) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2)$.

24. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3 - 1,\ x_1 - x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$.

25. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2,\ x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3)$.

26. $f(x) = (2x_1 - x_3,\ 2x_2 - x_1,\ 4x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 - 3,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

27. $f(x) = (4x_1 - x_2,\ 4x_2 - x_3,\ 4x_1 + 3x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.

28. $f(x) = (3x_1 - x_3,\ 3x_2 - x_1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_3 - x_1,\ x_2 - 1,\ x_1 - 5)$.

29. $f(x) = (x_3 - 2x_1,\ x_2 - 2x_3,\ x_2 - 4x_1)$,
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

30. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

**2.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 2 & 11 & 8 \\ -10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 8 & 11 & 2 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 \\ -8 & -5 & -8 \\ 16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -4 \\ -4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
21. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.
23. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

**3.** Для заданной эрмитово-симметричной матрицы $A$ найти такие унитарную матрицу $U$ и диагональную вещественную матрицу $\Lambda$, чтобы $\Lambda = \overline{U}^T AU$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Задание**

**1.** Дана матрица билинейной формы в базисе $e_1, e_2, e_3$, и соотношения между новыми и старыми базисными векторами. Найти матрицу билинейной формы в новом базисе $e_1',\ e_2',\ e_3'$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

0. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' &= \tfrac{2}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 1. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{2}{3}e_3 \\ e_2' &= 2e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e_2' &= \tfrac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 3. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 4e_3 \\ e_2' &= \tfrac{4}{5}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{4}{5}e_3 \\ e_2' &= -4e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 5. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 5e_3 \\ e_2' &= \tfrac{5}{6}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{5}{6}e_3 \\ e_2' &= -5e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 7. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' &= \tfrac{3}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + 4e_3 \\ e_2' &= \tfrac{4}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 9. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{3}{2}e_3 \\ e_2' &= 3e_1 + e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

Номер варианта состоит из двух цифр - номера матрицы и номера системы. Например, вариант 46 - четвертая матрица, шестая система.

**2.** Преобразовать квадратичную форму по методу Лагранжа и найти матрицу перехода к новому базису

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$

3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - x_3^2$

5. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

6. $x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_3+x_3^2$

7. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$

8. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$

9. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$

10. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$

11. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+12x_2x_3+4x_3^2$

12.$4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$

13. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

14. $x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$

15. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$

16. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+16x_2x_3+7x_3^2$

17. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$

18. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$

19. $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$

20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$

21.$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$

22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$

23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$

24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$

25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$

## Варианты билетов к контрольной работе «Векторная алгебра»

**Билет №1**

**1.** Даны вершины тетраэдра *A32,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8)*. Найти длину его высоты, опущенной из вершины *D*.

**2.** Найти угол *A* треугольника с вершинами *A(2,-1,3), B(4,5,0), C(1,1,-1)*.

**3.** Определить правой или левой является тройка векторов ***k, i***+***k, j***?

**4.** Три вектора ***a***, ***b, c*** связаны соотношениями ***a***=[***b,c***], ***b***=[***c,a***], ***c***=[***a,b***]. Найти длины этих векторов и углы между ними.

**5.** Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках *A(1,0,0), B(3,1,0), C(3,2,1)*.

## Билет №1

**1.** Луч света направлен по прямой *x-2y+7=0.* Дойдя до прямой *3x-2y+7=0*, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

**2.** Найти проекцию точки А(7,3,10) на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

**3.** Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости *Oxz,* проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{12}$.

**4.** Проверить, что прямые $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$ пересекаются. Найти уравнение плоскости, в которой они лежат.

**5.** Составить уравнение прямой, проведенной через точку М(4,-3,5) перпендикулярно двум данным прямым: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{2}$; $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+7}{-2}$.

**Билет №1**

**1.** Доказать, что множество всех векторов, у которых первая и последняя координаты равны между собой, образуют линейное подпространство. Найти его базис и размерность.
**2.** Определить, можно ли скалярное произведение в евклидовом пространстве определить формулой $(x, y) = x_2 y_1$.
**3.** Найти углы между векторами, заданными их координатами:
**1)** (1, 1 ,1, 1), (0, 2, 0, 2), базис ортонормированный;
**4.** При помощи процесса ортогон-ии построить ОНБ в линейной оболочке заданных векторов унитарного пространства со стандартным скалярным произведением**:** *(1,2i), (2, 1).*
**5.** Найти СЛУ, определяющую ортогональное дополнение лин. подпр-ва, заданного в некотором ОНБ евклидова пространства СЛУ:
$5x_1+x_2-x_3 = 0,$
$x_1-x_2+7x_3 = 0.$

## Билет №1

**1.** Евклидово пространство представляет собой линейное пространство многочленов степени не выше второй со скалярным произведением $(p,q)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$, где $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, $q(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$. Найти матрицу преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования в базисе $1, t, 3t^2-1$. Является ли это преобразование нормальным?

**2.** Доказать, что сингулярные числа самосопряженного преобразования равны модулям его собственных значений.

**3** Доказать, что преобразование $\varphi$ нормально тогда и только тогда, когда каждый собственный вектор для $\varphi$ является собственным и для $\varphi^*$.

**4.** Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\varphi$, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 3-i \\ 3+i & 3 \end{pmatrix}$.

# Варианты билетов к контрольной работе «Билинейные и квадратичные формы»

**Билет №1**

**1.** Привести данную квадратичную форму (КФ) к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. Выяснить, является ли форма положительно определенной, отрицательно определенной, полуопределенной. $4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$.

**2.** Привести КФ, зависящую от действительного параметра $\lambda$, к каноническому виду при всевозможных значениях $\lambda$: $3x_1^2-2x_1x_2+\lambda x_2^2$.

**3.** При каких значениях параметра $\lambda$ данная КФ положительно, отрицательно определена или полуопределена: $\lambda x_1^2-4x_1x_2+(\lambda+3)x_2^2$.

**4.** Эрмитова КФ записана в ОНБ двумерного унитарного пространства. Найти ОНБ, в котором данная КФ имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид. $2|x_1|^2+ix_1\overline{x}_2-ix_2\overline{x}_1+2|x_2|^2$.

**5.** Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных КФ является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих форм. $f=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$, $g=4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$

**Вопросы к экзамену по дисциплине «Алгебра и геометрия»**
**1 семестр**

1. Понятие матрицы. Терминология и обозначения.
2. Операции над матрицами.
3. Перестановки. Теорема о числе всевозможных перестановок из n чисел. Теорема о связи транспозиции и четности перестановки. Теорема о перестановке из натуральных чисел, преобразованной в натуральную перестановку.
4. Построение определителя n-го порядка.
5. Свойства определителя.
6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
7. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема об определителе треугольной блочной матрицы. Теорема об определителе произведения квадратных матриц.
8. Обратная матрица. Теорема о «чужих» алгебраических дополнениях. Критерий обратимости матрицы.
9. Основные свойства обратной матрицы. Способы вычисления обратной матрицы.
10. Ранг матрицы. Теорема о необходимом и достаточном условии линейной зависимости строк матрицы.
11. Теорема о базисном миноре. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.
12. Методы вычисления ранга матрицы.
13. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Терминология.
14. Нетривиальная совместность однородной системы. Условие совместности общей линейной системы.
15. СЛАУ общего вида. Теорема об укороченной системе, эквивалентной исходной системе. Общее решение системы. Частное решение системы.
16. Схема исследования и решения СЛАУ общего вида.
17. Связь между решениями однородной и неоднородной СЛАУ. Фундаментальная система решений.
18. Определение вектора. Линейные операции над векторами.
19. Понятие базиса в пространстве, на плоскости, на прямой. Теорема о разложении вектора по базису. Свойство линейности координат.
20. Линейная зависимость векторов.
21. Декартова система координат. Деление отрезка в заданном отношении.
22. Декартова прямоугольная система координат. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
23. Теорема о нахождении скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе. Проекция вектора.
24. Ориентация пары (тройки) векторов. Векторное произведение. Критерий коллинеарности векторов. Теорема об антикоммутативности векторного произведения.
25. Смешанное произведение. Теорема о величине смешанного произведения некомпланарных векторов. Критерий компланарности векторов.
26. Линейность смешанного и векторного произведения.
27. Выражение векторного и смешанного произведения через компоненты сомножителей.
28. Понятие об уравнениях линии.
29. Канонические, параметрические уравнения прямой на плоскости.
30. Общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках прямой на плоскости.
31. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
32. Уравнение пучка прямых.
33. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости.

34. Алгебраические линии второго порядка. Эллипс. Теорема об уравнении эллипса в канонической системе координат.
35. Эксцентриситет, директрисы эллипса. Директориальное свойство.
36. Гипербола. Теорема об уравнении гиперболы в канонической системе координат.
37. Эксцентриситет, асимптоты, директрисы гиперболы. Директориальное свойство.
38. Парабола. Теорема об уравнении параболы в канонической системе координат.
39. Эксцентриситет, директриса параболы. Директориальное свойство.
40. Теорема об уравнениях касательных к эллипсу, гиперболе и параболе в канонической системе координат.
41. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
42. Понятие общего уравнения линии второго порядка.
43. Понятие об уравнениях поверхности.
44. Канонические, параметрические уравнения плоскости в пространстве.
45. Общее уравнение и уравнение в отрезках плоскости в пространстве.
46. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
47. Уравнение пучка плоскостей.
48. Расстояние от точки до плоскости в пространстве. Угол между плоскостями в пространстве.
49. Канонические, параметрические, общие уравнения прямой в пространстве.
50. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
51. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямыми, прямой и плоскостью в пространстве.
52. Алгебраические поверхности 2-го порядка. Поверхности вращения.
53. Эллипсоид. Конус.
54. Однополостный гиперболоид. Двуполостный гиперболоид.
55. Эллиптический параболоид. Цилиндрические поверхности.
56. Гиперболический параболоид.
57. Понятие общего уравнения поверхности второго порядка.
58. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств.
59. Свойства линейного пространства.
60. Понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Свойства систем элементов линейного пространства.
61. Базис и координаты линейного пространства.
62. Размерность линейного пространства.
63. Изоморфизм линейных пространств. Критерий изоморфизма линейных пространств.
64. Линейные подпространства. Примеры линейных подпространств. Понятие линейной оболочки.
65. Размерность подпространства.
66. Сумма и пересечение подпространств.
67. Теорема о размерности суммы подпространств.
68. Прямая сумма подпространств.
69. Преобразование координат при преобразовании базиса.

**Вопросы к экзамену по дисциплине «Алгебра и геометрия» (2 семестр)**

1. Евклидово пространство. Определение, примеры. Свойства скалярного произведения.
2. Неравенство Коши-Буняковского. Основные метрические понятия.
3. Ортогональные и ортонормированные системы элементов и базисы.
4. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
5. Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре.
6. Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей. Матрица Грама.
7. Ортогональная матрица и ее свойства.
8. Изометрия.
9. Унитарное пространство. Определение, примеры. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве.
10. Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей в унитарном пространстве.
11. Унитарная матрица и ее свойства.
12. Линейные операторы. Определение, примеры и простейшие свойства линейных операторов. Задание линейного оператора.
13. Матрица линейного оператора. Координаты вектора и его образа.
14. Матрицы оператора в различных базисах.
15. Линейное пространство линейных операторов.
16. Произведение линейных операторов.
17. Образ и ядро линейного оператора.
18. Обратный оператор.
19. Характеристический многочлен линейного оператора.
20. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.
21. Собственное подпространство линейного оператора.
22. Свойства собственных векторов. Теоремы о собственных векторах.
23. Схема вычисления собственных значений и собственных векторов.
24. Сопряженный оператор. Определение и свойства. Инвариантность ортогонального дополнения подпространства относительно сопряженного оператора.
25. Связь матриц линейного оператора и сопряженного к нему в вещественном (комплексном) евклидовом пространстве. Теорема о существовании единственного сопряженного оператора для любого линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве.
26. Собственные значения и собственные векторы сопряженного оператора.
27. Определение нормального оператора. Теоремы о собственных векторах нормального оператора.
28. Определение ортогонального (унитарного) оператора. Примеры ортогональных (унитарных) операторов. Свойства собственных значений, собственных векторов ортогонального (унитарного) оператора.
29. Необходимые и достаточные условия ортогональности (унитарности) линейного оператора.
30. Самосопряженный оператор. Определение. Необходимое и достаточное условие самосопряженности линейного оператора.
31. Теорема о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора.
32. Теорема о собственных векторах самосопряженного оператора, отвечающим различным собственным значениям. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду.
33. Сингулярные числа. Сингулярные базисы.
34. Сингулярное разложение. Схема построения сингулярного разложения.
35. Билинейные формы (БФ). Определение. Примеры БФ. Теорема об однозначном представлении БФ в общем виде.

36. Теорема о необходимом и достаточном условии симметричности БФ. Теорема о связи матриц БФ в различных базисах. Ранг БФ.
37. Квадратичные формы (КФ). Определение. Примеры КФ. Теорема об однозначном представлении КФ в общем виде.
38. Виды КФ. Теорема о связи БФ, полярной к КФ и скалярного произведения.
39. Приведение КФ к каноническому виду методом Лагранжа.
40. Приведение КФ к каноническому виду методом Якоби.
41. Закон инерции КФ.
42. Необходимые и достаточные условия знакоопределенности, знакопеременности, полуопределенности квадратичных форм.
43. Критерий Сильвестра.
44. БФ и КФ в комплексном пространстве.
45. БФ и КФ в вещественном евклидовом пространстве. Теорема о представлении БФ в евклидовом пространстве.
46. Теорема о связи матриц БФ и линейного оператора в ортонормированном базисе. Теорема о необходимом и достаточном условии симметричности БФ в евклидовом пространстве
47. Приведение КФ к сумме квадратов в ортонормированном базисе.
48. Теорема об одновременном приведении двух КФ к каноническому виду.

# Тест по теме «Алгебраические линии и поверхности»

| Вопрос | Ответ |
|---|---|
| **1.** ***Общим уравнением, уравнением с угловым коэффициентом, уравнением в отрезках и уравнением прямой, проходящей через точку на плоскости, соответственно являются уравнения:***<br>1) x/a+x/b=1;<br>2) Ax+By+C=0;<br>3) $y-y_0=k(x-x_0)$;<br>4) y=kx+b? | A) 4,2,1,3<br>B) 2,4,1,3<br>C) 1,2,4,3<br>D) 3,4,1,2 |
| ***2. Какие из следующих утверждений верны для двух прямых на плоскости с угловыми коэффициентами $k_1$ и $k_2$:***<br>1) две прямые параллельны, если $k_1=-k_2$;<br>2) две прямые перпендикулярны, если $k_1k_2= -1$;<br>3) две прямые перпендикулярны, если $k_1k_2= 1$<br>4) две прямые параллельны, если $k_1k_2= -1$? | A) 1,2<br>B) 3,4<br>C) 2<br>D) 4 |
| ***3. Какие из следующих определений верны:***<br>1) эллипс – геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости есть величина постоянная;<br>2) гипербола – геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости есть величина постоянная;<br>3) парабола – геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, непроходящей через эту точку. | A) 1,2<br>B) все<br>C) 3<br>D) 1 |
| ***4. Какие из следующих утверждений для эксцентриситета верны:***<br>1) Эксцентриситет эллипса >1;<br>2) Эксцентриситет окружности равен 1;<br>3) Эксцентриситет гиперболы <1;<br>4) Эксцентриситет параболы равен 0? | A) все<br>B) 1, 2, 3<br>C) 2, 3<br>D) никакие |
| ***5. Канонические уравнения мнимого эллипса, пары мнимых пересекающихся прямых, пары параллельных прямых и пары совпадающих прямых соответственно:***<br>1) $y^2=0$;<br>2) $y^2=a^2$;<br>3) $x^2/a^2+y^2/b^2=-1$;<br>4) $x^2/a^2 +y^2/b^2=0$? | A) 4,1,2,3<br>B) 4,3,2,1<br>C) 4,3,1,2<br>D) 3,4,2,1 |
| ***6. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) Плоскость Ax+By+Cz=0 проходит через начало координат;<br>2) Плоскость Ax+By+D=0 параллельна оси OZ;<br>3) Плоскость Ax+D =0 параллельна оси OX;<br>4) Ay+D=0 параллельна плоскости OXZ или совпадает с ней? | A) 1,2<br>B) 1,3<br>C) 1,2,4<br>D) 2,4 |
| ***7. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) две плоскости параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны;<br>2) прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости коллинеарны;<br>3) прямая перпендикулярна плоскости тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой перпендикулярен к нормальному вектору плоскости;<br>4) две прямые перпендикулярны, если их направляющие векторы перпендикулярны? | A) никакие<br>B) все<br>C) 1,4<br>D) 2,3 |
| ***8. Прямолинейные образующие есть у следующих поверхностей:***<br>1) эллипс;<br>2) однополостный гиперболоид;<br>3) двуполостный гиперболоид;<br>4) конус;<br>5) цилиндр;<br>6) гиперболический параболоид? | A) 4,5<br>B) все<br>C) 2, 4,5,6<br>D) 2,4,5 |

| | |
|---|---|
| ***9. Плоскими сечениями гиперболического параболоида являются:***<br>1) гипербола;<br>2) эллипс;<br>3) парабола;<br>4) пара пересекающихся прямых. | A) все<br>B) 1,3<br>C) 1,3,4<br>D) 1 |
| ***10. Каноническими уравнениями однополостного и двуполостного гиперболоида, конуса, гиперболического параболоида соответственно являются:***<br>1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$;<br>2) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$;<br>3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$;<br>4) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$? | A) 1,2,3,4<br>B) 2,3,1,4<br>C) 3,2,1,4<br>D) 1,2,4,3 |

# Тест по теме «Билинейные и квадратичные формы»

| Вопрос | Ответ |
|---|---|
| **1.** ***Какие из следующих утверждений верны:***<br>1)БФ может иметь симметричную матрицу;<br>2) КФ может иметь несимметричную матрицу;<br>3) Полуторалинейная форма может иметь симметричную матрицу;<br>4) Полуторалинейная форма может иметь несимметричную матрицу? | A) все<br>B) 1,3<br>C) 1,2,3<br>D) 1,3,4 |
| **2.** ***Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) Положительно определенная КФ может иметь отрицательные коэффициенты;<br>2) Положительно определенная КФ может иметь канонические коэффициенты, равные нулю;<br>3) Отрицательно определенная КФ может иметь отрицательные коэффициенты? | A) все<br>B) 1,3<br>C) 3<br>D)2,3 |
| ***3. Ранг квадратичной формы это:***<br>1) Ранг ее матрицы в произвольном базисе;<br>2)Размерность пространства, в котором рассматривается КФ;<br>3)Ранг ее матрицы в каноническом базисе. | A) 2<br>B) 1,3<br>C) 3<br>D) 1 |
| ***4. Квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью:***<br>1) Критерия Сильвестра;<br>2) Метода Якоби;<br>3) Закона инерции КФ;<br>4) Метода Лагранжа. | A) все<br>B) 1, 2, 4<br>C) 2, 3, 4<br>D) 2, 4 |
| ***5. Примером полуторалинейной формы является:***<br>1)Скалярное произведение в вещественном пространстве;<br>2)Скалярное произведение в комплексном пространстве;<br>3) Произведение линейных форм в вещественном пространстве;<br>4) Произведение линейных форм в комплексном пространстве. | A) все<br>B) 2, 4<br>C) 1,2<br>D) 2 |
| ***6 Билинейная форма в евклидовом пространстве связана с оператором равенством:***<br>1) f(x,y)= (φx, φy);<br>2) f(x,y)= (φx, y);<br>3) f(x,y)= (x, φy)? | A) все<br>B) 2,3<br>C) 1<br>D) 3 |
| ***7.Одновременное приведение двух КФ в евклидовом пространстве возможно, если:***<br>1) Обе КФ положительно определенные;<br>2)Одна КФ положительно определенная;<br>3)Одна КФ положительно определенная, другая КФ знакопеременная? | A) 2, 3<br>B) 1<br>C) 2<br>D) 3 |
| ***8.Общее уравнение гиперповерхности второго порядка содержит :***<br>1) Квадратичную форму, тождественно неравную нулю;<br>2) Квадратичную форму;<br>3)Линейную форму, тождественно неравную нулю;<br>4) Линейную форму. | A) все<br>B) 1,3<br>C) 2, 4<br>D) 1, 4 |
| ***9. Инвариантами гиперповерхности второго порядка относительно параллельного переноса являются:***<br>1) След матрицы квадратичной формы;<br>2)Определитель матрицы квадратичной формы;<br>3) Характеристический многочлен матрицы квадратичной формы;<br>4)Ранг матрицы квадратичной формы. | A) 1,2,4<br>B) 1,2,3<br>C) все<br>D) 2, 3, 4 |
| ***10.Инвариантами гиперповерхности второго порядка относительно ортогонального преобразования являются:***<br>1) След матрицы квадратичной формы;<br>2)Определитель матрицы квадратичной формы;<br>3) Характеристический многочлен матрицы квадратичной формы;<br>4)Ранг матрицы квадратичной формы.. | A) 1,2,3<br>B) 1, 3<br>C) 2,4<br>D) все |

# Тест по теме «Векторная алгебра»

| Вопрос | Ответ |
|---|---|
| **1.** ***Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) Орт – это вектор, который исходит из начала координат.<br>2) Вектор – это направленный отрезок.<br>3) Нулевой вектор не имеет определенного направления.<br>4) Равные векторы могут не иметь одинакового направления? | A) 1,2,3,4<br>B) 2<br>C) 2,3,4<br>D) 2,3 |
| ***2. Линейные операции над векторами это:***<br>1) сложение векторов;<br>2) умножение векторов;<br>3) умножение вектора на число? | A) 1<br>B) все<br>C) 1,2<br>D) 1,3 |
| ***3. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) Любые два векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.<br>2) Любые три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.<br>3)Если векторы некомпланарны, то они линейно независимы.<br>4) Среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора? | A) 1,2<br>B) 1,2,3<br>C) все<br>D) 1,2,4 |
| ***4. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) каждый вектор, параллельный какой-либо прямой может быть разложен по базису на этой прямой;<br>2) каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости может быть разложен по базису на этой плоскости;<br>3) каждый вектор может быть разложен по базису в пространстве;<br>4) компоненты вектора в каждом случае определяются однозначно? | A) 1,2,3<br>B) все<br>C) 3,4<br>D) 2,3 |
| ***5. Декартова система координат это:***<br>1) совокупность точки и базиса;<br>2) совокупность начала координат и осей координат;<br>3) совокупность начала координат и ортонормированного базиса? | A) 2<br>B) все<br>C) 1,2<br>D) 3 |
| ***6. Какие из следующих определений можно считать определениями скалярного произведения:***<br>1) скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;<br>2) скалярным произведением двух векторов называется вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;<br>3) скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определенную первым из указанных векторов;<br>4) скалярным произведением двух векторов называется вектор, равный произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определенную первым из указанных векторов? | A) 1<br>B) 2<br>C) 1,3<br>D) 2,4 |
| ***7. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если:***<br>1) из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки;<br>2) из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден по часовой стрелке;<br>3) из конца третьего вектора кратчайший поворот от второго к первому виден против часовой стрелки? | A) 1<br>B) никакие<br>C) 2<br>D) 3 |
| ***8. Какие из следующих требований входят в определение векторного произведения c=[a,b]:***<br>1) вектор **c** направлен так, что тройка векторов **abc** является правой;<br>2) вектор **c** направлен так, что тройка векторов **abc** является левой;<br>3) вектор **c** ортогонален к каждому из векторов **a** и **b;**<br>4) векторы **a,b,c –** компланарны**;**<br>5) векторы **a,b -** коллинеарны? | A) 1,3,4,5<br>B) 2,3,4,5<br>C) 1,3,4<br>D) 1,3 |

| | |
|---|---|
| ***9. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору;<br>2) длина векторного произведения [**a**,**b**] равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах **a** и **b**;<br>3) длина векторного произведения [**a**,**b**] равняется площади треугольника , построенного на приведенных к общему началу векторах **a** и **b**;<br>4) векторное произведение коммутативно? | A) 1,2<br>B) 1,3<br>C) 1,3,4<br>D) 2,3,4 |
| ***10 . Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны;<br>2) смешанное произведение – это вектор;<br>3) смешанное произведение некомпланарных векторов равно 1/6 объема параллепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу? | A) 2,3<br>B) 1<br>C) все<br>D) 1,3 |

# Тест по теме «Евклидовы пространства»

| Вопрос | Ответ |
|---|---|
| 1. ***Неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство, когда:***<br>1) один из элементов нулевой;<br>2) элементы равны;<br>3) элементы линейно зависимы? | A) 1<br>B) 2<br>C) 1,3<br>D) 2,3 |
| ***2. Корректность определения угла между ненулевыми элементами x и y в евклидовом пространстве следует из:***<br>1) определения евклидова пространства;<br>2) неравенства треугольника;<br>3) неравенства Коши - Буняковского? | A) 1<br>B) 2<br>C) 3<br>D) все |
| ***3. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) ортогональная система ненулевых элементов линейно независима;<br>2) линейно независимая система является ортогональной? | A) 1<br>B) все<br>C) никакие<br>D) 2 |
| ***4. Свойства матрицы Грама в вещественном евклидовом пространстве:***<br>1) симметричная;<br>2) положительно определенная;<br>3) верхняя треугольная;<br>4) положительно полуопределенная? | A) 1,3,4<br>B) 1, 4<br>C) 2,3<br>D) 1,2 |
| ***5. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) система элементов линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама равен нулю;<br>2) определитель матрицы Грама положителен;<br>3) определитель матрицы Грама неотрицателен? | A) все<br>B) 1<br>C) 1,2<br>D) 1,3 |
| ***6.*** | A)<br>B)<br>C)<br>D) |
| *7* | A)<br>B)<br>C)<br>D) |
| ***8.*** | A)<br>B)<br>C)<br>D) |
| ***9.*** | A)<br>B)<br>C)<br>D) |
| ***10.*** | A)<br>B)<br>C)<br>D) |

# Тест по теме «Линейные пространства»

| Вопрос | Ответ |
|---|---|
| **1.** ***Какие из перечисленных аксиом не входят в 8 аксиом вещественного линейного пространства:***<br>1) $\forall x, y \in L\colon x + y = y + x$;<br>2) $\forall x, y \in L\colon xy = yx$;<br>3) $\forall x, y, z \in L\colon (x+y)z = xy + zy$;<br>4) $\forall x, y \in L, \forall \lambda \in C\colon \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$? | A) 2<br>B) 3<br>C) 2,3<br>D) 2,3,4 |
| ***2. Является ли линейным пространством:***<br>1) пустое множество;<br>2) множество, состоящее из одного нулевого элемента? | A) 1-да, 2-нет<br>B) 1-нет, 2-да<br>C) 1,2-да<br>D) 1,2-нет |
| ***3. Может ли линейное пр-во состоять из:***<br>1) двух элементов;<br>2) одного элемента;<br>3) 100 элементов? | A) 1,3-да, 2-нет<br>B) 2,3-да, 1-нет<br>C) 3-да, 1,2-нет<br>D) 2-да, 1,3-нет |
| ***4. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) если среди элементов $x, y, \mathrm{K}\ , z$ есть нулевой, то эти элементы л.н.;<br>2) если среди элементов $x, y, \mathrm{K}\ , z$ есть нулевой, то эти элементы л.з.;<br>3) если часть элементов $x, y, \mathrm{K}\ , z$ является л.з, то и все эти элементы л.з.;<br>4) если часть элементов $x, y, \mathrm{K}\ , z$ является л.н, то и все эти элементы л.н.? | A) 1,4<br>B) 1,3<br>C) 2,3<br>D) 2,3,4 |
| ***5. Какие из следующих равенств истинны:***<br>1) $L(x_1, x_2) = L(x_2, x_1)$;<br>2) $L(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = L(x_1, x_2)$;<br>3) $L(x_1, x_2, \theta) = L(x_1, x_2)$? | A) 1<br>B) 1,2,3<br>C) 1,2<br>D) 1,3 |
| ***6. Какие из следующих определений можно считать определениями размерности линейного пр-ва:***<br>1) линейное пр-во, в котором существует базис из n элементов, называется n-мерным, а число n-размерностью пространства;<br>2) максимальное количество л.н. элементов в линейном пр-ве называют размерностью линейного пр-ва;<br>3) линейное пр-во называется n-мерным, если в нем существует n л.н. элементов? | A) 1,2<br>B) никакие<br>C) 1<br>D) 2 |
| ***7. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) изменив порядок элементов в системе, которая является базисом, мы получим другой базис;<br>2) базис линейного пр-ва – это любая упорядоченная система л. н. элементов? | A) 1,2<br>B) никакие<br>C) 1<br>D) 2 |
| ***8. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) два изоморфных пространства не обязаны иметь одинаковую размерность;<br>2) в изоморфных пространствах максимальное число л.н. элементов может быть различным? | A) 1,2<br>B) никакие<br>C) 2<br>D) 1 |
| ***9. Какие из следующих утверждений верны:***<br>1) линейное подпространство конечномерного линейного пр-ва может быть бесконечномерным;<br>2) линейное подпространство может состоять из одного элемента;<br>3) сумма размерностей подпространств равна размерности суммы этих подпространств? | A) 1,2,3<br>B) никакие<br>C) 2<br>D) 2,3 |
| ***10 . Какие из следующих равенств истинны:***<br>**1)** $x_{e'} = P_{e \to e'} x_e$; **3)** $x_{e'} = (P_{e \to e'})^{-1} x_e$<br>**2)** $x_e = P_{e' \to e} x_{e'}$; **4)** $x_{e'} = (P_{e' \to e})^{-1} x_e$ | A) 2,3<br>B) никакие<br>C) 3<br>D) 1 |